Problema 1

Punto 1) Determiniamo l'equazione dell'arco di parabola, tenendo conto che il vertice della parabola è in $D(6,0)$ e che essa passa per $C(4,2)$:

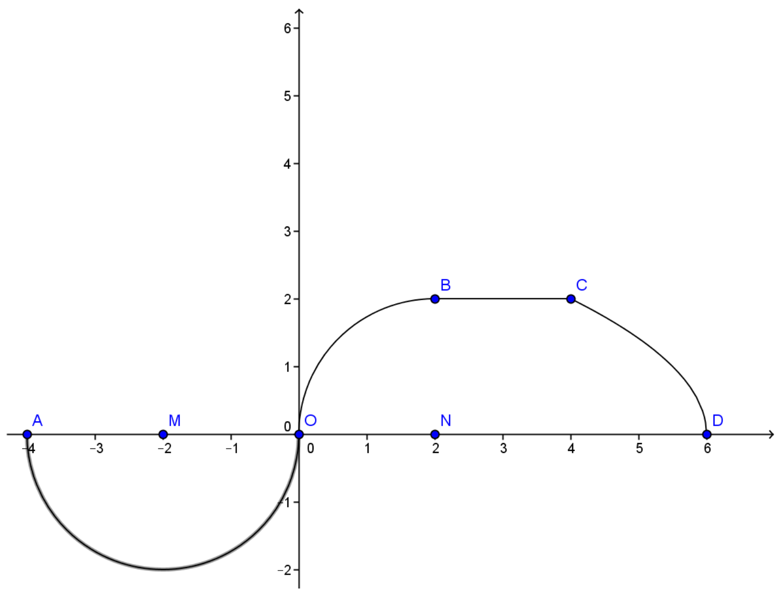
$$x - x_V = a\left(y - y_V\right)^2$$

$$4 - 6 = a\left(2 - 0\right)^2$$

Quindi a = -1/2 e l'equazione della parabola è: $x - 6 = -\frac{1}{2}y^2$ o anche $y = \sqrt{12 - 2x}$, tenuto conto che si tratta del solo arco con i punti di ordinata non negativa.

Detti M e N i centri dei due archi di circonferenza, possiamo dire che:

- in A la funzione non è derivabile, perché punto con tangente verticale, essendo la tangente alla circonferenza perpendicolare al raggio MA. Si potrebbe anche determinare l'equazione della semicirconferenza ($y = -\sqrt{-x^2 - 4x}$) e dimostrare che la sua derivata prima tende a -∞ quando x tende a -4 da destra, ma il calcolo è sicuramente più pesante!
- in O la funzione non è derivabile, perché punto con tangente verticale (anzi, è un flesso con tangente verticale) per motivo analogo al precedente
- in B la funzione è derivabile perché la tangente in B al ramo sinistro è orizzontale (la tangente al quarto di circonferenza è perpendicolare al raggio NB e quindi parallela all'asse x) e così pure la tangente al ramo destro della funzione g, che è costituito da un tratto orizzontale
- in C la funzione non è derivabile perché le derivate sinistra e destra in x = 4 non sono uguali; infatti la tangente al ramo sinistro ha pendenza uguale a 0, mentre quella al ramo destro ha pendenza negativa, pari a -1/2 (derivando $y = \sqrt{12 - 2x}$ si ottiene $y' = \frac{-1}{\sqrt{12 - 2x}}$, che calcolata in x = 4 dà $m = y'(4) = -1/2$)



- in D la funzione non è derivabile perché punto con tangente verticale, essendo D il vertice della parabola ed essendo la tangente nel vertice perpendicolare all'asse di simmetria della parabola, per note proprietà geometriche di tale conica.

Punto 2) Premesso che un integrale definito di una funzione fra due estremi fornisce:

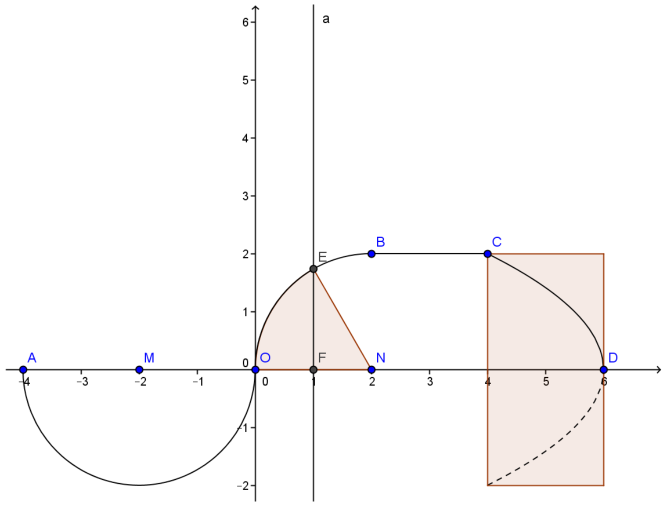
- l'area del sottografico della funzione fra i due estremi, se essa è positiva,
- l'opposto dell'area se essa è negativa

possiamo dire allora che:

f (-4) = 0 per le proprietà degli integrali definiti, dato che i due estremi di integrazione sono coincidenti

f (0) è l'opposto dell'area del semicerchio di raggio 2; dunque f (-4) = - 4π /2 = -2π

$f(1) = \int_{-4}^{0} g(t)\,dt + \int_{0}^{1} g(t)\,dt = f(0) +$ area regione OFE = -2π + (area settore circolare – area triangolo NFE) = -2π + (4π/6 - $\frac{1 \cdot \sqrt{3}}{2}$) (si tenga conto che la retta $x = 1$ è l'asse del raggio NO e che il triangolo NFE ha gli angoli di 30°, 60° in N, 90° in F, essendo la sua ipotenusa doppia del cateto minore; quindi il settore circolare è un sesto di cerchio e l'altezza del triangolo rettangolo misura $\sqrt{3}$).



$f(1) = -2\pi + 2\pi/3 - \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{4}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}$

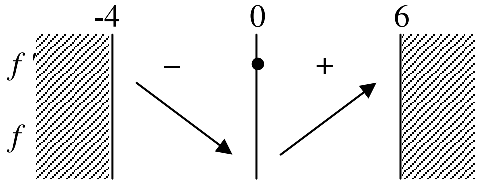
$f(2) = f(0)$ + area del quarto di cerchio = -2π + π = -π

$f(4) = f(2)$ + area rettangolo = -π + 2·2 = -π + 4

$f(6) = f(4)$ + area semisegmento parabolico = -π + 4 + $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} 2 \cdot 4$ = -π + 20/3

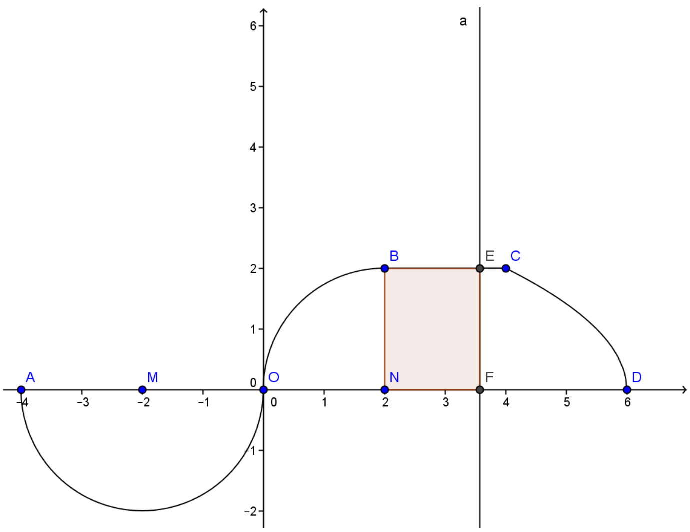
Punto 3)

$g(x)$ è la derivata prima di $f(x)$. I segni di $g(x)$, desumibili dal grafico assegnato, sono i segni di $f'(x)$:



$f(-4) = 0$ e per valori di x compresi fra -4 e 0 la funzione decresce (e ha segno negativo), fino a raggiungere il valore minimo -2π in $x = 0$ e successivamente cresce, fino a raggiungere il valore -π + 20/3 in $x = 6$

Dato che per il teorema fondamentale del calcolo integrale $f(x)$ è una funzione continua e considerato che $f(2) <0$, mentre $f(4) >0$, deve esistere un'ascissa c compresa fra 2 e 4, nella quale $f(c) = 0$. Tale situazione si realizza, quindi, quando il rettangolo in figura ha area pari a un quarto di cerchio, cioè quando l'area del rettangolo, di altezza 2, è uguale a π: ciò significa che la base del rettangolo deve avere lunghezza π/2 e che l'ascissa c = 2+ π/2



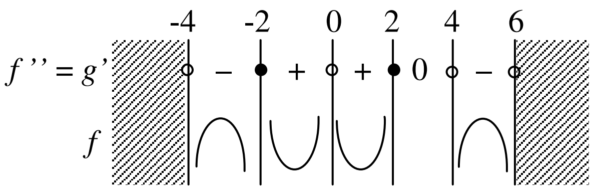
Pertanto, la funzione f è negativa se $-4 < x < 2 + \frac{\pi}{2}$, è nulla se x = -4 o se x = 2 + π/2, è positiva se

$2 + \frac{\pi}{2} < x \le 6$

Poiché $f''(x) = g'(x)$,
f'' è positiva, negativa, nulla se
g' è positiva, negativa, nulla, cioè se
g è crescente, decrescente, costante.

Dall’osservazione del grafico di *g* si ottengono gli intervalli in cui *g* cresce, decresce o è stazionaria, traducibili nel segno positivo o negativo di *f* ’’:

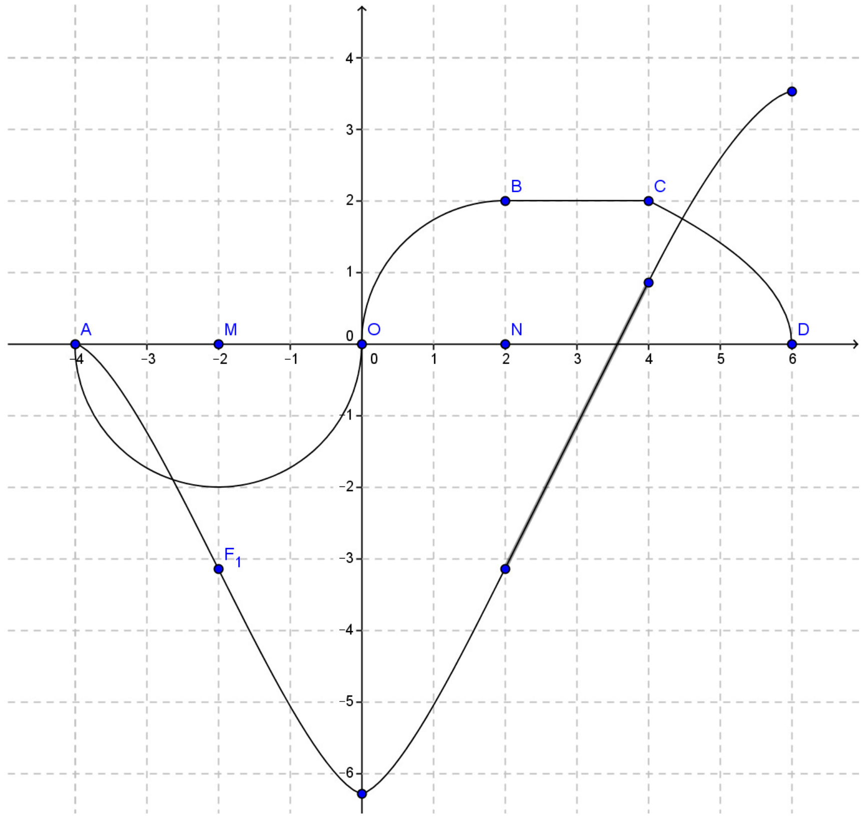
Nel prospetto sono riportate anche le concavità di del grafico di *f* ed è visibile l’ascissa del flesso, in $x = -2$. Dove la derivata seconda di *f* è nulla, per le x comprese fra 2 e 4, la funzione ha una crescita lineare, dato che in quel tratto la funzione integrale *f* cresce come cresce l’area di un rettangolo con altezza costante,



Punto 4)

Per quanto già visto nel punto precedente, *f* ha un minimo assoluto in $x = 0$, con $f(0) = -2\pi$. Poi cresce fino a $x = 6$, dove ha un massimo assoluto nel punto $(6, -\pi+20/3)$.

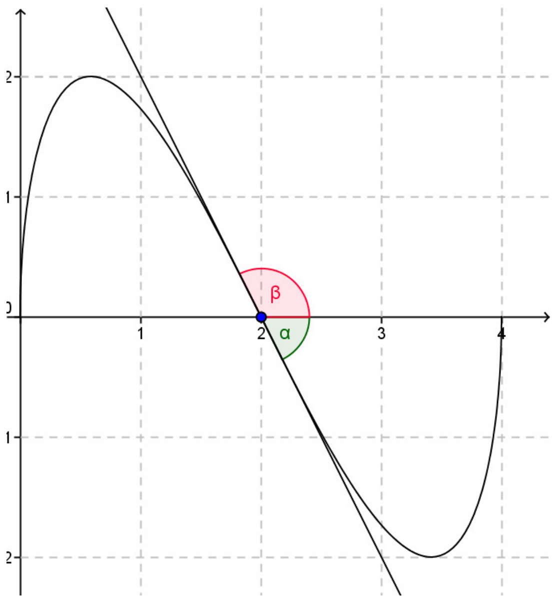
Mettendo insieme tutti gli elementi trovati circa la funzione *f*, si ottiene il seguente andamento:



Punto 1

Scritte le equazioni della simmetria centrale di centro (2,0):
$\begin{cases} x' = 4 - x \\ y' = y \end{cases}$ e le equazioni inverse: $\begin{cases} x = 4 - x' \\ y = y' \end{cases}$, è sufficiente far vedere che la trasformata della funzione è ancora se stessa, ovvero che sostituendo le espressioni 4 - *x*' e *y*' al posto delle variabili *x* e *y* nella funzione, l'espressione rimane invariata.

$$y = (2-x)\sqrt{4x-x^2} \quad \rightarrow \quad -y = (2-(4-x))\sqrt{4(4-x)-(4-x)^2}$$
$$-y = (-2+x)\sqrt{16-4x-16-x^2+8x}$$
$$-y = (-2+x)\sqrt{-x^2+4x}$$
$$y = (2-x)\sqrt{4x-x^2}$$



Quindi è dimostrata la simmetria centrale.
Dal calcolo della derivata prima si trova:

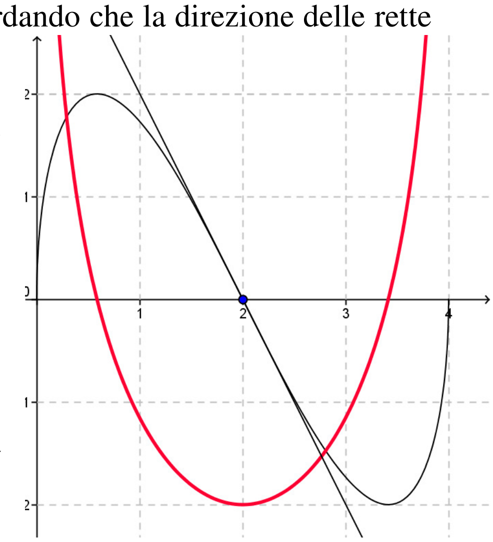
$$f'(x) = \frac{2x^2-8x+4}{\sqrt{4x-x^2}}.$$

$f'(2) = \dfrac{8-16+4}{\sqrt{8-4}} = -2$, ovvero che la pendenza della tangente nel punto (2,0) è -2.
Di conseguenza $\alpha = \arctan(-2) = -63°26'$ e $\beta = 116°34'$.

Punto 2

Sia *t* un numero reale fra 0 e 2. Occorre dimostrare che le due rette tangenti nei punti di ascissa 2-*t* e 2+*t* sono parallele, ovvero che $f'(2-t) = f'(2+t) \quad \forall t \in (0,2)$.
Considerato che le due parabole $y = 2x^2 - 8x + 4$ e $y = 4x - x^2$ sono simmetriche rispetto a *x* = 2, essendo 2 l'ascissa dei loro vertici, anche la derivata $f'(x) = \dfrac{2x^2-8x+4}{\sqrt{4x-x^2}}$ è simmetrica rispetto a *x* = 2. Pertanto è vero che $f'(2-t) = f'(2+t) \quad \forall t \in (0,2)$.

Si potrebbe anche motivare il parallelismo delle due tangenti ricordando che la direzione delle rette è invariante nelle simmetrie centrali.



Dall'andamento del grafico in figura si trova che *f ''* è negativa fra 0 e 2, positiva fra 2 e 4, nulla in *x* = 2 e tendente a +∞ agli estremi 0 e 4. Pertanto l'andamento di *f '* sarà quello a fianco, con un minimo assoluto di *f '* in (2,-2). Gli zeri del grafico rosso sono in $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{2}$, dove si azzera il numeratore di $f'(x)$.
Pertanto le pendenze delle rette tangenti al grafico di *f* (ovvero i valori della derivata di *f*) non possono assumere valori minori del valore -2.
È pertanto impossibile trovare punti del grafico di *f* nei quali la tangente sia parallela alla retta $21x + 10y + 35 = 0$, il cui coefficiente angolare è -21/10 < -2. È invece possibile trovare due

punti in cui la tangente sia parallela alla retta $23x+12y+35=0$, essendo questa volta m = -23/12 > -2. I due punti sono simmetrici rispetto all'ascissa 2.

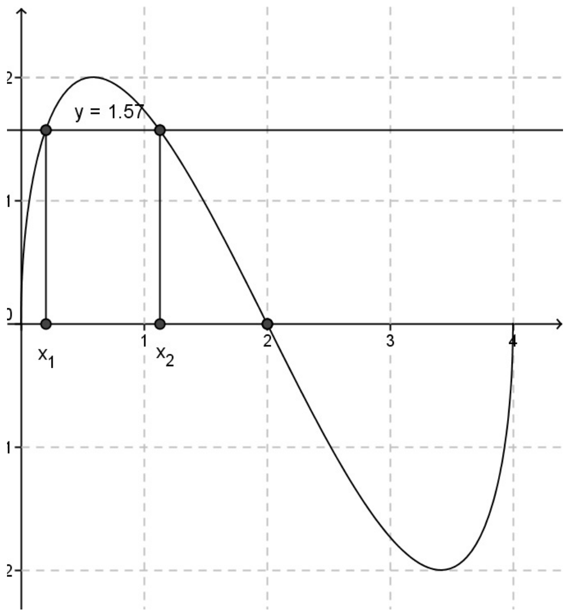
Punto 3

L'area della regione, poiché la funzione non è positiva fra le ascisse 0 e 4, non è calcolabile come integrale fra gli estremi 0 e 4. Data la simmetria dimostrata nel punto 1 l'area richiesta è invece uguale al doppio dell'integrale definito della funzione fra gli estremi 0 e 2:

$$A=2\int_0^2(2-x)\sqrt{4x-x^2}\,dx=\int_0^2(4-2x)\sqrt{4x-x^2}\,dx=\left[\frac{2}{3}\left(4x-x^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^2=\frac{2}{3}8=\frac{16}{3}$$

Punto 4

Posta $h(x)=\sin(f(x))$, sia avrà $h(x)=1$ quando $f(x)=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ (con k in $\mathbf{Z}$), ovvero quando $f(x)=\frac{\pi}{2}$, dato che la funzione f assume valori compresi solo fra -2 e +2.



Dal grafico si vedono due soluzioni dell'equazione $f(x)=\frac{\pi}{2}$, in x_1 e in x_2. Per dimostrare la loro esistenza, consideriamo la funzione ausiliaria $g(x)=f(x)-\frac{\pi}{2}$ e facciamo vedere che valgono le ipotesi del teorema di esistenza degli zeri.

In effetti g è continua, perché somma di funzioni continue e assume valori discordi in x = 0 e x = $2-\sqrt{2}$:

$$g(0)=f(0)-\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi}{2}<0$$

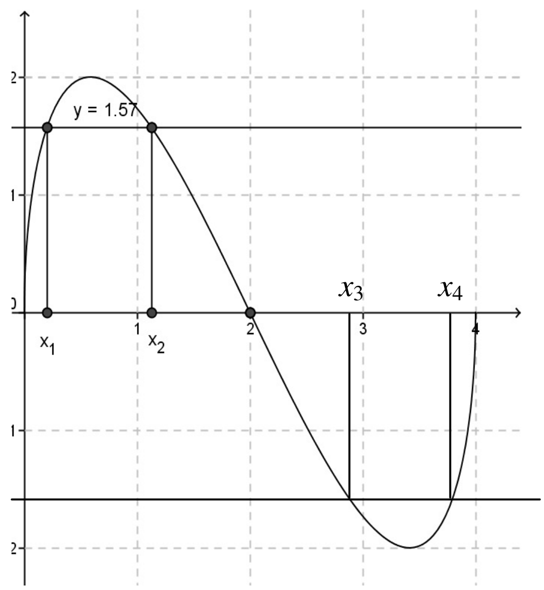
$$g\left(2-\sqrt{2}\right)=f\left(2-\sqrt{2}\right)-\frac{\pi}{2}=2-\frac{\pi}{2}>0$$

così come in x = 1 e x = 2:

$$g\left(2-\sqrt{2}\right)>0$$

$$g(2)=f(2)-\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi}{2}<0$$

Allora esiste almeno uno zero della funzione g in ciascuno dei due intervalli $(0;2-\sqrt{2})$ e $(2-\sqrt{2},2)$. Tali zeri sono unici nei rispettivi intervalli, a causa della monotonia di f (x) in ciascuno di essi.

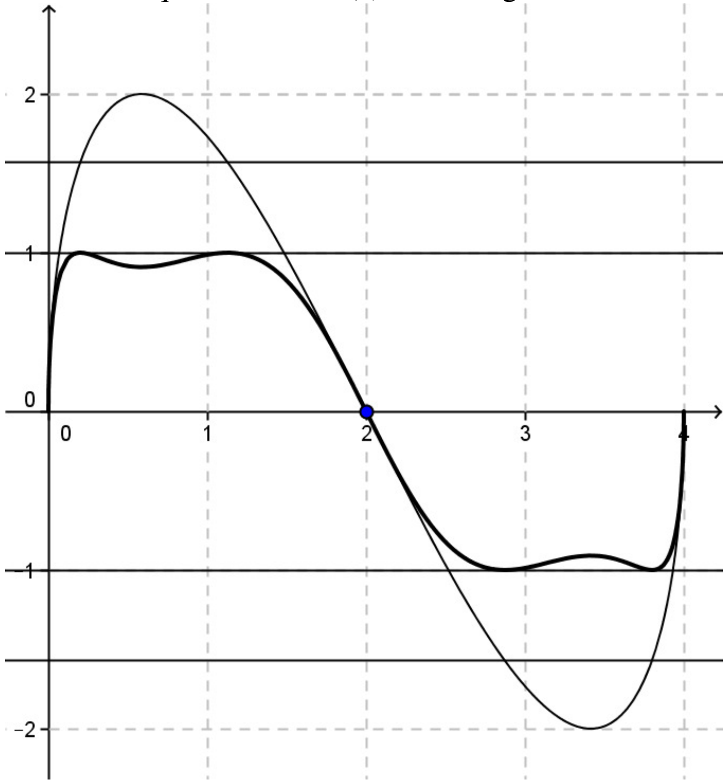


Quindi i punti di $h(x)$ di ordinata 1 sono 2: $0<x_1<2-\sqrt{2}$ e $2-\sqrt{2}<x_2<2$.

La funzione $h(x)$ è la composizione di $f(x)$ con la funzione seno, la quale è crescente per argomenti compresi fra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$, decrescente per valori dell'argomento fra $\frac{\pi}{2}$ e 2 e fra -2 e $-\frac{\pi}{2}$.

Quindi $h(x)$ segue l'andamento crescente o decrescente di $f(x)$ negli intervalli $(0;x_1)$, $(x_2;x_3)$, $(x_4;4)$; esse hanno inoltre gli zeri negli stessi punti.

Negli intervalli $(x_1;x_2)$ e $(x_3;x_4)$, invece, $h(x)$ cresce se $f(x)$ decresce e viceversa. Pertanto un andamento qualitativo di $h(x)$ sarà il seguente:



La funzione $h(x)$ avrà allora un minimo relativo nell'ascissa del massimo di $f(x)$, cioè in $x = 2-\sqrt{2}$ e due minimi assoluti nei punti in cui $f(x) = -\frac{\pi}{2}$, cioè nei simmetrici di x_1 e x_2 rispetto all'ascissa 2. I minimi assoluti hanno ordinata -1.

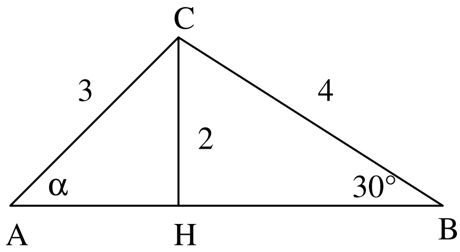
L'equazione $h(x) = k$ ha 4 soluzioni distinte se k è compreso fra le ordinate del minimo relativo ($y_{min} = \sin(2)$) e dei due massimi assoluti (che hanno ordinata 1, per simmetria centrale) o se k è compreso fra le ordinate dei due minimi assoluti e l'ordinata del massimo relativo (-sin(-2)):

$\sin 2 < k < 1$ o $-1 < k < -\sin 2$.

L'integrale della funzione $h(x)$ fra gli estremi 0 e 4 è invece nullo, in quanto la funzione $h(x)$ è simmetrica rispetto al punto (2;0).

Infatti applicando la simmetria centrale a $y = \sin\left(f(x)\right)$ si ottiene $-y = \sin\left(f(4-x)\right)$, ovvero $-y = \sin\left(-f(x)\right)$. Da cui: $-y = -\sin\left(f(x)\right)$ per la disparità della funzione seno e quindi $y = \sin\left(f(x)\right)$.

Quesito 1



L'altezza CH relativa alla base AB misura 2, per le proprietà dei triangoli metà di triangoli equilateri.

Dunque $\sin\alpha = \frac{2}{3}$ (risultato a cui si perviene anche utilizzando direttamente il teorema dei seni sul triangolo ABC). Dunque $\alpha = \arcsin\frac{2}{3} = 41°48'37'' \simeq 41°49'$

Quesito 2

In un vertice di qualunque poliedro devono concorrere almeno 3 facce e la somma degli angoli in quel vertice deve essere strettamente inferiore a 360°. Poiché ogni angolo in ciascun vertice di un esagono regolare è di 120°, la somma di tre angoli (delle tre facce concorrenti in un vertice) raggiunge 360°. Non essendo tale somma inferiore a 360°, non è possibile formare un poliedro regolare con facce esagonali.

Quesito 3

E_1 = "esattamente una pallina è rossa"

$$p(E_1) = \frac{\text{numero delle terne composte da una rossa e due non rosse}}{\text{numero delle terne possibili}} = \frac{\binom{5}{1}\binom{15}{2}}{\binom{20}{3}} = \frac{35}{76}$$

Oppure

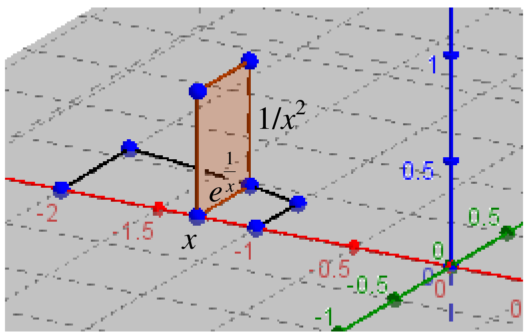
$$p(E_1) = p(R \wedge \overline{R} \wedge \overline{R}) + p(\overline{R} \wedge R \wedge \overline{R}) + p(\overline{R} \wedge \overline{R} \wedge R) = 3 \cdot \frac{5}{20} \cdot \frac{15}{19} \cdot \frac{14}{18} = \frac{35}{76}$$

E_2 = "le tre palline sono di colori differenti"

Le terne possibili di colori differenti sono 4 e sono tutte equiprobabili. Trovando la probabilità di una di queste terne, il suo quadruplo è allora la probabilità cercata:

$$P(E_2) = 4 \cdot p(R,V,G) = 4\frac{\binom{5}{1}\binom{5}{1}\binom{5}{1}}{\binom{20}{3}} = 4\frac{5\cdot5\cdot5}{\frac{20\cdot19\cdot18}{6}} = \frac{25}{57}$$

Quesito 4

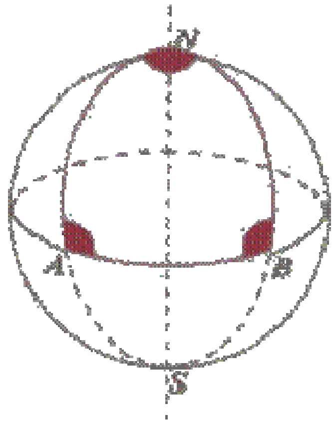


Fissata un'ascissa x, la sezione che si forma con piani secanti perpendicolari all'asse x, è un rettangolo di altezza $1/x^2$, mentre la base del rettangolo è un segmento lungo $e^{\frac{1}{x}}$. L'area del rettangolo "sezione" è allora $\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$, per ogni ascissa x compresa fra -2 e -1. Considerati due piani secanti il solido e distanti reciprocamente dx, il volume della porzione di solido compresa fra i due piani è allora $\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}dx$. Il volume del solido è quindi dato da

$$V=\int_{-2}^{-1}\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}dx=-\int_{-2}^{-1}-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}dx=\left[-e^{\frac{1}{x}}\right]_{-2}^{-1}=-e^{-1}+e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}-\frac{1}{e}=\frac{\sqrt{e}-1}{e}$$

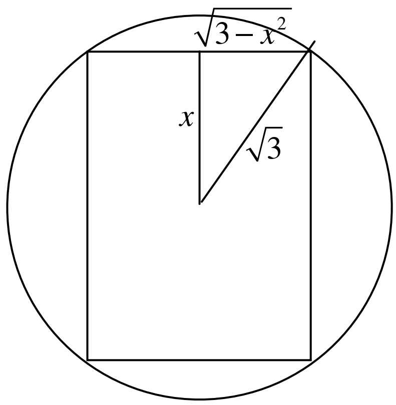
Quesito 5

Nel modello di geometria non euclidea di Riemann, nel quale il "piano" è la superficie di una sfera, le "rette" sono le circonferenze di raggio massimo, la somma degli angoli del triangolo ABN rappresentato in figura, delimitato dalla "retta equatoriale" e da due "rette meridiane", è maggiore di 180°, essendo già uguale a 180° la somma dei due angoli retti in A e in B



Quesito 6

Detta x la misura della semialtezza del cilindro, si osserva che $0<x<\sqrt{3}$ e che il volume del solido si riduce a 0 nei due casi limite. Il raggio di base del cilindro si determina mediante il teorema di Pitagora nel triangolo rettangolo evidenziato in figura.



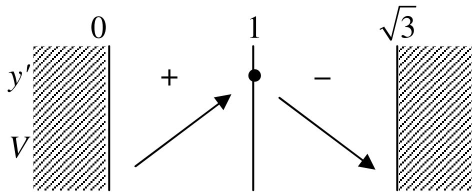
Il volume del cilindro inscritto vale pertanto:

$V=\pi\left(\sqrt{3-x^2}\right)^2\cdot 2x=2\pi x\left(3-x^2\right)=2\pi\left(3x-x^3\right)$

Tale volume è massimo se è massima la funzione $y=3x-x^3$.

Ne studiamo allora il segno della derivata:

$y'=3-3x^2=3\left(1-x^2\right)$, che risulta positiva per valori interni all'intervallo (-1; 1); considerando inoltre le limitazioni geometriche di x:



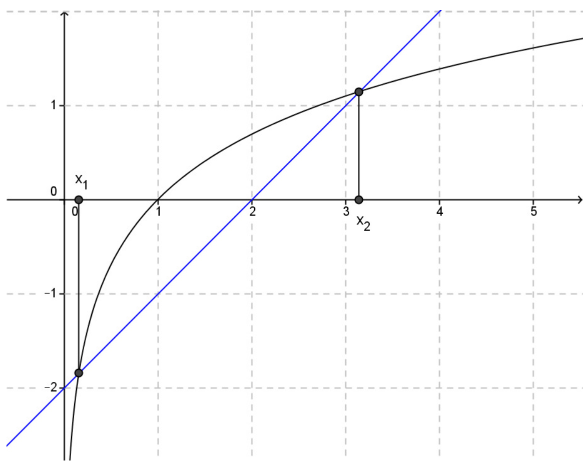
Pertanto il volume del cilindro è massimo se x = 1, cioè se l'altezza del cilindro è 2 e il raggio di base $\sqrt{2}$.

Quesito 7

$f'(x)=\ln x-x+2$

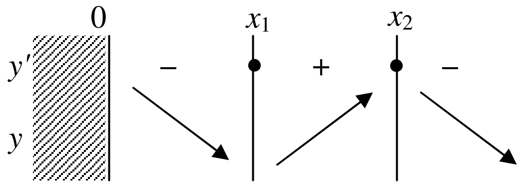
Studiamone il segno: $f'(x)>0$ se e solo se $\ln x>x-2$

Risolviamo graficamente l'equazione associata: $\ln x=x-2$, tracciando i grafici di $y=\ln x$ e di $y=x-2$.



Il grafico del logaritmico ha ordinate maggiori della retta nell'intervallo $(x_1; x_2)$:

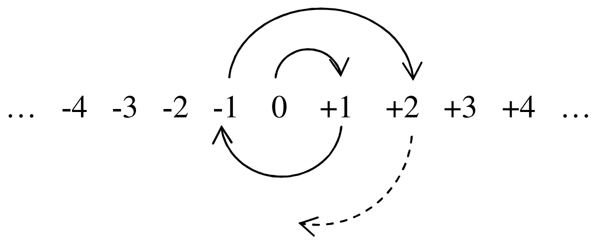
La funzione f ha allora un minimo relativo in $x = x_1$, come si evince dal prospetto a lato.
Inoltre, per il teorema di esistenza degli zeri, $0{,}1 < x_1 < 1$, essendo $f\,'(x)$ una funzione continua ed essendo $f\,'(0{,}1) < 0$ e $f\,'(1) > 0$.
Allora la scelta cade sul valore 0,159 (risposta D)



Quesito 8
Si ottiene 9 lanciando tre dadi se escono:
1 2 6 (con 6 permutazioni)
1 3 5 (con 6 permutazioni)
1 4 4 (con 3 permutazioni)
2 2 5 (con 3 permutazioni)
2 3 4 (con 6 permutazioni)
3 3 3 (con 1 permutazioni)
Ci sono quindi (6 + 6 + 6 + 3 + 3 + 1) = 25 terne favorevoli, su 6^3 terne possibili
Quindi $p(9) = \dfrac{25}{6^3}$

Si ottiene 10 lanciando tre dadi se escono:
1 3 6 (con 6 permutazioni)
1 4 5 (con 6 permutazioni)
2 2 6 (con 3 permutazioni)
2 3 5 (con 6 permutazioni)
2 4 4 (con 3 permutazioni)
3 3 4 (con 3 permutazioni)
Ci sono quindi (6 + 6 + 6 + 3 + 3 + 3) = 27 terne favorevoli, su 6^3 terne possibili
Quindi $p(10) = \dfrac{27}{6^3} > p(9)$

Quesito 9
Z è in corrispondenza biunivoca con **N**, perché possiamo contare gli elementi di **Z** procedendo a spirale, a partire dallo 0:



Q è in corrispondenza biunivoca con **N**, grazie al noto procedimento di disposizione e conteggio dell'insieme delle frazioni, noto come diagonalizzazione di Cantor, per il quale si rinvia ad un qualunque testo scolastico. Quindi, se è numerabile l'insieme delle frazioni, lo è a maggior ragione l'insieme dei numeri razionali, costituito da classi di equivalenza dell'insieme delle frazioni.
R, invece, è più che numerabile; anzi è già più che numerabile il sottoinsieme di **R** costituito dai numeri compresi fra 0 e 1, come dimostrato per assurdo da Cantor mediante un altro metodo pure

noto come diagonalizzazione di Cantor, che opera sui numeri reali scritti come allineamenti decimali. Anche per questo si rinvia ad un qualunque testo scolastico.

Quesito 10

Per $x \to 0$, il denominatore di $\frac{\sqrt{a+bx}-2}{x}$ tende a 0. Pertanto, per evitare che il limite sia infinito (deve infatti valere 1), anche il numeratore deve tendere a 0 (così che si abbia una forma indeterminata 0/0, che potenzialmente può portare anche, fra gli infiniti possibili risultati, anche a 1):

$$\lim_{x\to 0}\left(\sqrt{a+bx}-2\right)=\sqrt{a}-2$$

Pertanto, affinché tale limite valga 0, deve essere $a = 4$.

Vogliamo ora determinare b in modo che $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+bx}-2}{x} = 1$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+bx}-2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+bx}-2}{x}\cdot\frac{\sqrt{4+bx}+2}{\sqrt{4+bx}+2}=\lim_{x\to 0}\frac{4+bx-4}{x\left(\sqrt{4+bx}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{b}{\sqrt{4+bx}+2}=\frac{b}{\sqrt{4}+2}=\frac{b}{4}$$

Quindi deve essere $\frac{b}{4}=1$, da cui $b = 4$.