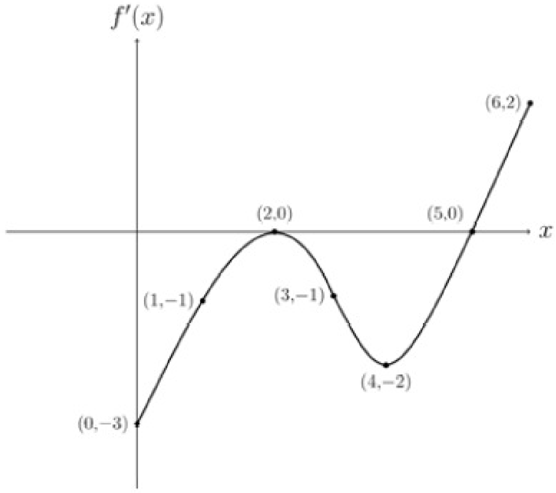
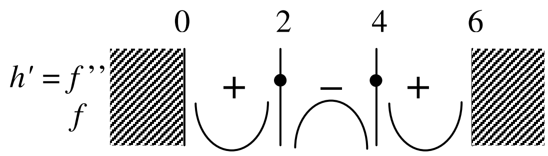
SOLUZIONE PROBLEMA N°1

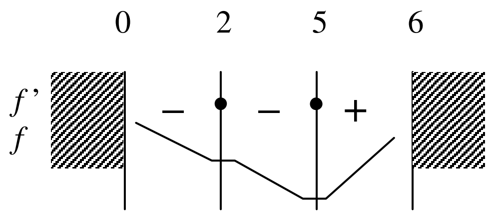


<u>Punto 1</u>: Se una funzione $y = f(x)$ è dotata di derivata seconda, condizione necessaria (non sufficiente) per l'esistenza dei flessi è l'annullarsi di $f''(x)$.
Detta $y = h(x)$ la funzione il cui grafico è quello assegnato, si ha che $h(x) = f'(x)$ e quindi $h'(x) = f''(x)$. Per la determinazione dei punti di flesso dovremo dunque ricercare i punti in cui si ha $f''(x) = 0 = h'(x)$.
Il testo ci dice che $h'(x) = 0$ se e solo se $x = 2$ e $x = 4$; inoltre h' cambia segno in corrispondenza di tali ascisse (infatti la funzione rappresentata nel grafico è crescente in]0;2[, decrescente in]2;4[, di nuovo crescente in]4;6[; dunque h' è positiva in]0;2[, negativa in]2;4[, di nuovo positiva in]4;6[)

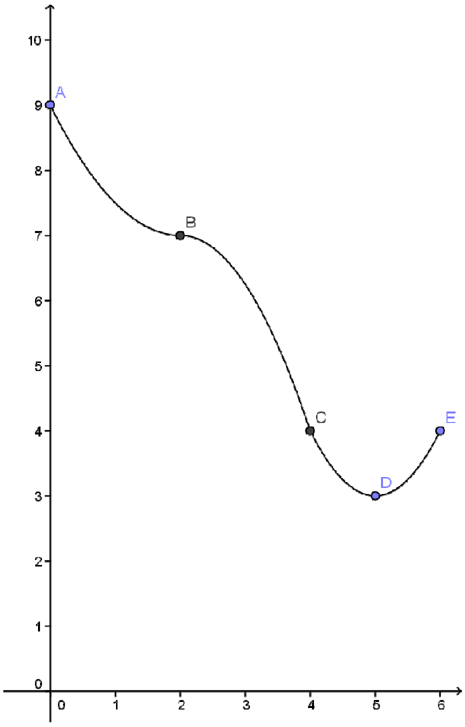


$x = 2$ e $x = 4$ sono dunque le ascisse dei punti di flesso, perché in tali ascisse avviene il cambio di concavità di f. Le stesse ascisse, nonostante siano zeri di f'' non sarebbero ascisse di flessi, se non corrispondessero a cambi di segno di f''.
In particolare (sarà utile successivamente per il grafico di f) poiché $f'(2) = 0$, in $x = 2$ si ha un punto di flesso a tangente orizzontale, mentre, poiché $f'(4) < 0$ in $x = 4$ si ha un flesso discendente, per la precisione, un flesso di con tangente di pendenza -2.

<u>Punto 2</u>: Possiamo fare qualche semplice considerazione grafica osservando che la funzione h è negativa negli intervalli (0 , 2) e (2 , 5). In tali intervalli la funzione $f(x)$ decresce. La positività di $h(x)$ in (5 , 6) comporta che la f sia crescente in tale intervallo con un conseguente minimo assoluto per $x = 5$ (con $f(5) = 3$).



Il massimo assoluto di f, non essendo alcuno dei punti a tangente orizzontale, potrà essere solo negli estremi dell'intervallo di definizione, cioè in $x = 0$ o in $x = 6$.



Ma dal teorema di Torricelli-Barrow $\int_0^6 (f'(t))dt = f(6) - f(0)$; poiché il testo ci dice che $\int_0^6 (f'(t))dt = -5$ e $f(0) = 9$, allora $f(6) = 4$ e quindi il massimo assoluto si ha per $x = 0$, poiché $f(0) > f(6)$.

Punto 3 : Riassumendo la funzione è non crescente in [0,5] e crescente in (5,6]; passa per i punti $A(0,9)$ [massimo assoluto], per $B(2, f(2))$ flesso a tangente orizzontale, per $C(4, f(4))$ flesso a tangente obliqua (con coefficiente angolare -2); per $D(5,3)$ [minimo assoluto] e per $E(6,4)$

Punto 4: Cominciamo con il determinare la retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa 3. L'equazione della retta tangente è $y - f(3) = f'(3)(x-3)$: dai dati del problema si ottiene $y = -x + 9$ e l'angolo che tale retta forma con l'asse x è di $\alpha = -45°$.

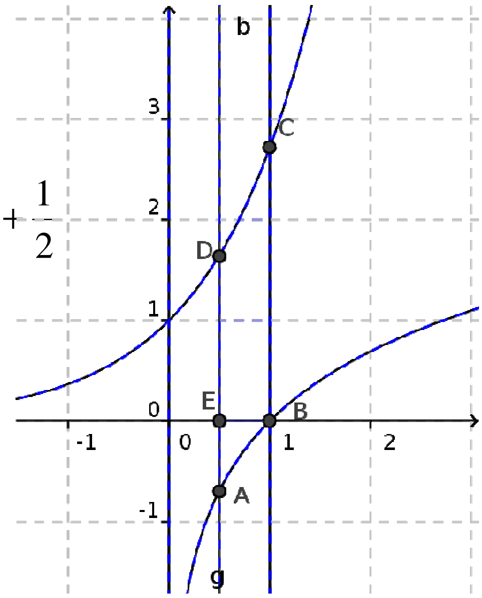
La derivata di $g(x)$ si determina mediante la formula della derivata di un prodotto ottenendo $g'(x) = xf'(x) + f(x)$, con $g'(3) = 3(-1) + 6 = 3$.

La retta tangente s ha equazione $y - 18 = 3(x-3)$ cioè $y - 18 = 3(x-3)$ e dunque $y = 3x + 9$.

L'angolo formato con l'asse delle x dalla retta s è $\beta = \arctan(3) = 71°34'$.

Gli angoli formati dalle due rette sono quindi $|\alpha| + \beta = 116°34'$ ed il suo supplementare (che è quello acuto richiesto) $\gamma = 63°26'$.

SOLUZIONE PROBLEMA N°2

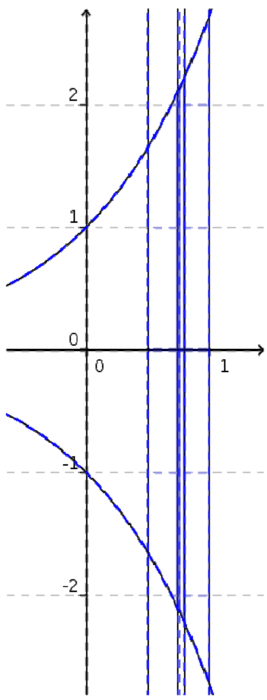


Punto 1

La regione di cui si richiede l'area è il quadrilatero mistilineo *ABCD* in figura. L'area vale:

$$\mathcal{A} = \int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(e^x - \ln x\right)dx = \left[e^x - x\left(\ln x - 1\right)\right]_{\frac{1}{2}}^{1} = e - \sqrt{e} - \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}$$

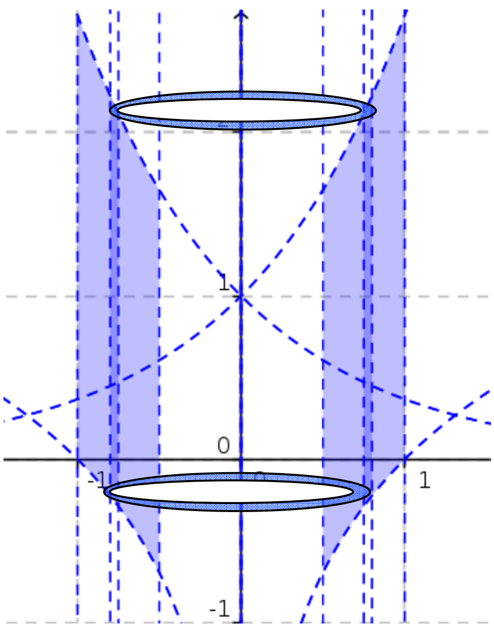
Punto 2



Premesso che la domanda non precisa l'angolo di rotazione, se si intende una rotazione di 360°, la porzione *S* di spazio descritta dalla regione *R* nella sua rotazione attorno all'asse *x* è data dal solido, la cui sezione è rappresentata in figura a lato.

Il suo volume può essere determinato considerando il piano perpendicolare all'asse *x* nell'ascissa *x* e quello nell'ascissa *x* + *dx*. La parte di solido *S* compresa fra i due piani (più scura in figura) è un "cilindretto" di altezza *dx* e base circolare di raggio $f(x)$. Pertanto il volume infinitesimo del cilindretto vale $dV = \pi\left[f(x)\right]^2 dx$. Il volume complessivo varrà:

$$V_S = \int_{\frac{1}{2}}^{1}\pi\left(e^x\right)^2 dx = \pi\int_{\frac{1}{2}}^{1}e^{2x}dx.$$



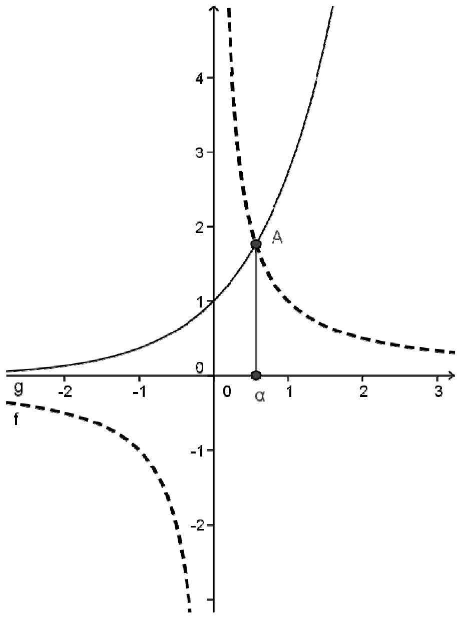
Nel caso in cui si consideri una rotazione di soli 180°, la formula diventerebbe

$$V_S = \frac{\pi}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{1}e^{2x}dx + \frac{\pi}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\ln x\right)^2 dx$$

Il solido *T*, visto in sezione si presenta come in figura a lato; il suo volume può essere determinato, ispirandosi al metodo degli indivisibili cilindrici di Torricelli, come somma di gusci cilindrici coassiali all'asse *y*, ciascuno dotato di spessore infinitesimo *dx*. Se si taglia uno di questi gusci, di raggio *x* con un semipiano di origine l'asse *y*, lo sviluppo del guscio sarà un parallelepipedo di spessore *dx* e con area di base data da $2\pi x \cdot \left(f\left(x\right) - g\left(x\right) \right) = 2\pi x\left(e^x - \ln x\right)$. Pertanto il volumetto del guscio cilindrico sarà: $dV = 2\pi x\left(e^x - \ln x\right)dx$ e il volume di *T*: $V_T = \int_{\frac{1}{2}}^{1} 2\pi x\left(e^x - \ln x\right)dx = 2\pi \int_{\frac{1}{2}}^{1} x\left(e^x - \ln x\right)dx$.

<u>Punto 3</u>

La pendenza della retta tangente in un punto è data dalla derivata prima della funzione nell'ascissa del punto stesso. Pertanto la condizione richiesta è che le due derivate di *f* e di *g* siano uguali fra loro, ovvero: $e^x = \frac{1}{x}$. Si deve dimostrare che tale equazione possiede una ed una sola soluzione, cioè che la funzione $k\left(x\right) = e^x - \frac{1}{x}$ ha un unico zero.



La rappresentazione grafica di $y = e^x$ e $y = \frac{1}{x}$ porta ad individuare qualitativamente gli zeri: il grafico mostra uno zero α fra le ascisse 1/2 e 1.

Esistenza: poiché *k* è una funzione continua nell'intervallo $\left[\frac{1}{2};1\right]$ (dato che è somma di funzioni ivi continue) e inoltre $k\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{e} - 2 < 0$ e $k\left(1\right) = e - 1 > 0$, per il teorema di esistenza degli zeri si può concludere l'esistenza di almeno uno zero nell'intervallo.

Unicità: poiché $k'\left(x\right) = e^x + \frac{1}{x^2} > 0 \quad \forall x \in \left[\frac{1}{2};1\right]$, dato che è somma di positivi, la funzione *k* risulta crescente nell'intervallo; pertanto lo zero deve essere unico in $\left[\frac{1}{2};1\right]$.

Per determinare α si può ricorrere ad un metodo numerico (bisezione o metodo delle tangenti di Newton), trovando così α circa uguale a 0,56 (si noti che abbiamo interpretato la richiesta "arrotondata ai centesimi" come "con un errore massimo minore di 0,01").

<u>Punto 4</u>

Considerata $h\left(x\right) = e^x - \ln x$, la sua derivata è: $h'\left(x\right) = e^x - \frac{1}{x}$. Dall'ultimo grafico si evince che tale derivata è positiva per $x < 0 \vee x > \alpha$, negativa per $0 < x < \alpha$, nulla per

$x = \alpha$. Pertanto nell'intervallo $\left[\frac{1}{2};1\right]$, h decresce da $h\left(\frac{1}{2}\right)$, fino a raggiungere l'ordinata minima in $x = \alpha$ e successivamente cresce fino a $h(1)$. Considerato che $h\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{e} + \ln 2$ (circa 2,3) e che $h(1) = e$, la funzione avrà il minimo assoluto in $x = \alpha$ ed il massimo assoluto nell'estremo $x = 1$ (essendo $h(1) > h(1/2)$).

QUESTIONARIO

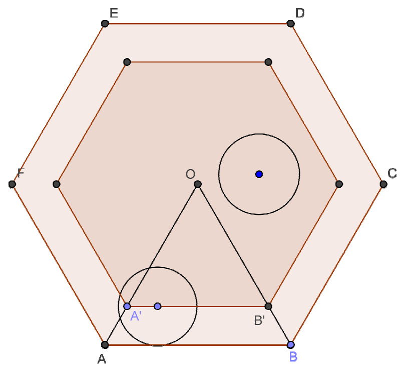
1. Il limite si calcola utilizzando il teorema di De l'Hôpital , dopo aver verificato che la frazione data soddisfa le ipotesi:

- entrambe le funzioni $f(x)=2^{3x}-3^{4x}$ e $g(x)=x^2$ sono definite, continue e derivabili in uno stesso intorno destro di 0 (per esempio $I_0^+=[0,1[$), dal momento che lo sono in $\mathbb{R}$;
- entrambe tendono a 0, quando x tende a 0^+;
- $g'(x)=2x$ è diversa da 0 per ogni x appartenente a I_0^+, eccetto in $x = 0$ (ma è concesso dalle ipotesi del teorema)
- $$\lim_{x\to 0^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2^{3x}\cdot 3\cdot \ln(2)-3^{4x}\cdot 4\cdot \ln(3)}{2x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2^{3x}\ln 8-3^{4x}\ln 81}{2x}=-\infty,$$

  poiché si arriva ad una forma del tipo $\frac{N}{0}$, ove $N=\ln 8-\ln 81<0$.

Valendo tutte le ipotesi del teorema, ne deriva che anche il limite richiesto è $-\infty$.

2. Il centro della moneta deve appartenere all'esagono concentrico a quello della mattonella, tale che la distanza fra i lati dei due esagoni sia il raggio della moneta. Il rapporto tra le aree dei suddetti esagoni ci fornisce la probabilità richiesta .
Posti h ed h' le altezze di ABO e di $A'B'O$ (triangoli equilateri) si hanno:



$h=\frac{AB\sqrt{3}}{2}=5\sqrt{3}\text{ cm}\approx 8.66\text{ cm}$, $h' = h - r$ (con r raggio della moneta) = 8.66 –1.16≈7.50 cm e $A'B'=\frac{2h'}{\sqrt{3}}\approx 8.65766$ cm.

L'area di un triangolo equilatero è $Area=\frac{l^2\sqrt{3}}{4}\text{cm}^2$; si ha dunque $Area(ABO)\approx 43.30\text{ cm}^2$, mentre $Area(A'B'O)\approx 32.46\text{ cm}^2$

La probabilità risulta quindi $P=\frac{Area(A'B'O)}{Area(ABO)}\approx 0.75$

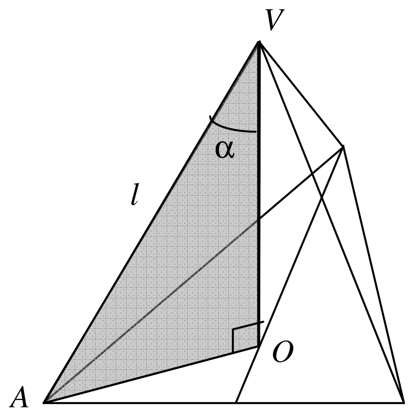
3. La pendenza della retta tangente è fornita dalla derivata di $f(x)$. Dato che $f'(x)=3^x\ln(3)$, si deve ricercare il valore di x per cui $3^x\ln(3)=1$. In effetti tale valore può essere determinato in modo preciso mediante i seguenti passaggi

$3^x = \frac{1}{\ln(3)}$ da cui, applicando i logaritmi ad entrambi i membri $\ln 3^x = \ln \frac{1}{\ln(3)}$; utilizzando ora una proprietà dei logaritmi si ottiene $x \ln 3 = \ln \frac{1}{\ln(3)}$ giungendo infine a $x = \frac{1}{\ln 3} \ln \frac{1}{\ln(3)}$. Un valore di x approssimato a meno di 1/1000 è –0.086.

4. L'insieme dei numeri naturali ha la medesima cardinalità dell'insieme dei numeri razionali. Dobbiamo questa affascinante e (apparentemente) paradossale affermazione a Cantor che la dimostrò con il cosiddetto metodo diagonale.

5. Per determinare il numero di segmenti basta valutare le scelte di coppie (non ordinate). Si tratta dunque di una combinazione $C_{n,2} = \frac{n(n-1)}{2}$. Analogamente il numeri di triangoli e il numeri di tetraedri, con le ipotesi fatte, sono rispettivamente $C_{n,3}$ e $C_{n,4}$.

6. I punti di flesso di una cubica si ottengono determinando gli zeri e il segno della derivata seconda, che in questo caso vale $f''(x) = 6x$. Dunque l'unico punto di flesso si ha per $x = 0$. Si deve (ma il testo è ambiguo riguardo tale richiesta, non essendo chiaro se il fatto che F sia punto di flesso sia da dimostrare o sia solo una precisazione che il testo del quesito fa circa F, ma che non necessita di essere dimostrata) dimostrare che la curva è simmetrica rispetto al punto $P(0,b)$. Le equazioni di una simmetria rispetto ad un punto P (generico) sono : $\begin{cases} x' = 2x_P - x \\ y' = 2y_P - y \end{cases}$. In questo caso si ha $\begin{cases} x' = -x \\ y' = 2b - y \end{cases}$. Scrivo la trasformazione inversa $\begin{cases} x = -x' \\ y = 2b - y' \end{cases}$ e sostituisco nella funzione data. $y = x^3 + ax + b$, che diventa $2b - y' = (-x')^3 + a(-x') + b$ dunque (togliendo gli apici) $2b - y = -x^3 - ax + b$ giungendo infine a $y = x^3 + ax + b$, come volevasi dimostrare.



7. Premesso che l'altezza del tetraedro interseca il triangolo equilatero di base nel baricentro O, che dista dal vertice A: $\overline{OA} = l\frac{\sqrt{3}}{3}$, si può determinare il seno

dell'angolo $\alpha = A\hat{V}O$, applicando i teoremi trigonometrici relativi ai triangoli rettangoli sul triangolo rettangolo *AOV:*

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\overline{OA}}{l} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

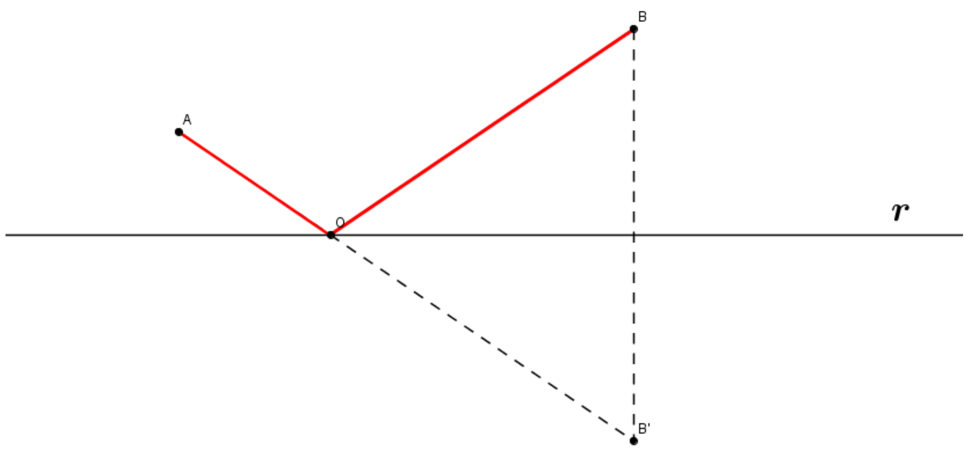
Pertanto $\alpha = \operatorname{arcsen}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \approx 35°$.

8. Dette $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$ le probabilità di scegliere a caso un pezzo rispettivamente dallo stabilimento *A*, *B*, *C*, si ha $P(A)=1/2$, $P(B)=1/3$, $P(C)=1/6$. Detto *D* l'evento "scelta di un pezzo difettoso", dal teorema delle probabilità totali si ha che $P(D)=P(D/A)\cdot P(A)+P(D/B)\cdot P(B)+P(D/C)\cdot P(C)= \frac{10}{100}\cdot\frac{1}{2}+\frac{7}{100}\cdot\frac{1}{3}+\frac{5}{100}\cdot\frac{1}{6}$, pari a $\frac{49}{600}$. Il teorema di Bayes ci permette poi di determinare la $P(A/D) =$

$$\frac{P(D/A)\cdot P(A)}{P(D)} = \frac{\frac{10}{100}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{49}{600}} = \frac{30}{49} = 61,2\%$$

9. Il problema di Erone di determinare il percorso minimo che si deve compiere per andare da un punto *A* ad un punto *B* toccando una certa retta *r* esterna ai due punti equivale a cercare il punto *O* sulla retta che minimizza la somma delle distanze *AO* + *OB*.

Costruito il punto *B'* simmetrico di *B* rispetto alla retta *r*, sia *O* il punto di intersezione del segmento *AB'* con la retta *r*.

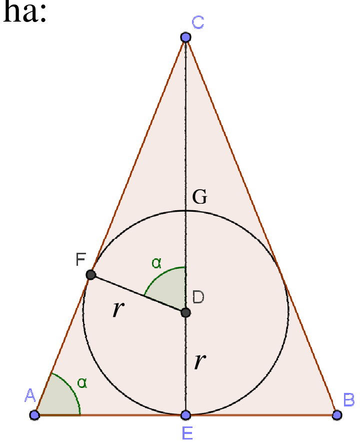


La distanza più breve tra *B'* e *A* è data dal segmento che congiunge i due punti (segmento che incontra *r* in *O*). Il punto di intersezione *O* è quello che minimizza la somma *AO* + *OB* (essendo *OB'*= *OB,* per simmetria).

Per qualunque altro punto *O'* di *r* diverso da *O* la somma delle distanze *O'A* + *O'B'* risulterebbe maggiore di *AO* + *OB'* (poiché, con riferimento al triangolo *AO'B',* ogni lato è minore alla somma degli altri due).

Inoltre, il punto *O* così definito è l'unico punto della retta *r* tale che i segmenti *AO* e *OB* formino con *r* angoli isometrici.
Il contesto in cui appare questo teorema è quello dell'ottica geometrica. Erone lo usò per dimostrare che un raggio di luce che da A giunge a B riflettendosi su uno specchio piano sceglie il percorso minimo tra tutti quelli che toccano lo specchio. Questa scelta equivale alla legge della riflessione (già nota ai greci).

10. Detto α (compreso fra 0 e π/2) l'angolo $C\hat{A}B$, si ha:



$$\overline{CF} = r\,\mathrm{tg}\,\alpha$$

$$\overline{CD} = \frac{r}{\cos\alpha}$$

$$\overline{CE} = r\left(1+\frac{1}{\cos\alpha}\right)$$

$$\overline{CA} = \frac{r}{\mathrm{sen}\,\alpha}\left(1+\frac{1}{\cos\alpha}\right)$$

$$\overline{AE} = \frac{r}{\tan\alpha}\left(1+\frac{1}{\cos\alpha}\right) = r\frac{1+\cos\alpha}{\mathrm{sen}\,\alpha}$$

Pertanto l'area laterale del cono è:

$$A_L = \pi\frac{r}{\mathrm{sen}\,\alpha}(1+\cos\alpha)\frac{r}{\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha}(1+\cos\alpha) = \pi r^2\frac{1+\cos\alpha}{\cos\alpha(1-\cos\alpha)}$$

Posto $\cos\alpha = t$, possiamo trovare il massimo della funzione $y = \dfrac{1+t}{t-t^2}$, la cui derivata è: $y' = \dfrac{t^2+2t-1}{(t-t^2)^2}$. Dallo studio degli zeri e del segno di *y'*, si trova che *y* è massima per $t = \cos\alpha = \sqrt{2}-1$. La distanza *d* fra il vertice del cono e la superficie sferica varrà:

$$d = \overline{CE} - 2r = r\left(\frac{1}{\cos\alpha}-1\right) = r\left(\frac{1}{\sqrt{2}-1}-1\right) = r\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = r\sqrt{2}$$

Secondo modo: ponendo come incognita $\overline{CG} = x$ (con $x > 0$), si ha:

$\overline{CD} = x + r$; $\overline{CE} = x + 2r$; $\overline{CF} = \sqrt{(x+r)^2 - x^2} = \sqrt{x^2+2rx}$

Dalla similitudine dei triangoli *AEC* e *CDF*:

$\overline{AE}:\overline{DF} = \overline{CE}:\overline{CF}$ ovvero $\overline{AE}: r = (x+2r):\sqrt{x^2+2rx}$, da cui $\overline{AE} = \dfrac{r(x+2r)}{\sqrt{x(x+2r)}}$.

Allora l'apotema del cono varrà:

$$\overline{CA} = \overline{CF} + \overline{FA} = \overline{CF} + \overline{AE} = \sqrt{x(x+2r)} + \frac{r(x+2r)}{\sqrt{x(x+2r)}} = \frac{x(x+2r)+r(x+2r)}{\sqrt{x(x+2r)}} =$$

$$= \frac{(x+r)(x+2r)}{\sqrt{x(x+2r)}}$$

Pertanto l'area laterale del cono varrà:

$$\mathcal{A}_l = \pi \overline{AE} \cdot \overline{CA} = \pi \frac{r(x+2r)}{\sqrt{x(x+2r)}} \cdot \frac{(x+r)(x+2r)}{\sqrt{x(x+2r)}} = \pi \frac{r(x+2r)^2(x+r)}{x(x+2r)} =$$

$$= \pi r \frac{(x+r)(x+2r)}{x} = \pi r \frac{x^2+3rx+2r^2}{x}$$

L'area laterale del cono sarà minima quando è minima la funzione $y = \dfrac{x^2+3rx+2r^2}{x}$.

Dallo studio degli zeri e del segno della derivata $y' = \dfrac{x^2-2r^2}{x^2}$ si trova che, per $x > 0$, la funzione è minima per $x = r\sqrt{2}$.

Soluzione a cura dei docenti

Dalloli Anna
Ferrari Alberto
Gregori Silvano
Nolli Nicoletta

Liceo "Aselli" Cremona