



Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

Y557 – ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO SPERIMENTALE

Indirizzo: PIANO NAZIONALE INFORMATICA

Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 dei 10 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Dato il triangolo ABC, rettangolo in C, di cateti 3 e 4, si consideri una retta passante per C, non secante il triangolo e formante un angolo x con il cateto AC.

1. Dette A' e B' le proiezioni ortogonali di A e B su tale retta, si esprima mediante $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ il perimetro y del quadrilatero $AA'B'B$, controllando che risulta:

$$y = \frac{-2t^2 + 14t + 12}{t^2 + 1}.$$

2. Si studi e si rappresenti graficamente tale funzione.
3. Si esprima in funzione di $\sin 2x$ il rapporto tra l'area del quadrilatero $AA'B'B$ e quella del triangolo dato e se ne tracci il grafico nell'intervallo di variabilità di x imposto dai limiti geometrici del problema.
4. Si calcoli l'area sottesa da quest'ultima curva nel suddetto intervallo.

PROBLEMA 2

Si consideri la funzione f definita da:

$$f(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}.$$

1. Si studi f e se ne tracci il grafico γ su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy).
2. Si considerino la retta r tangente a γ nel punto di flesso e la retta s , perpendicolare a r , condotta dal punto di γ di ascissa $1/2$. Si calcoli l'area del triangolo formato da r , da s e dall'asse y .
3. Si calcoli l'area della superficie piana, delimitata da γ , dall'asse x e dalla retta di equazione $x = 1/2$.
4. Dopo aver verificato che sono soddisfatte le condizioni di invertibilità, si ricavi l'espressione analitica $x = g(y)$ della funzione g inversa di f .



Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

Y557 – ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO SPERIMENTALE

Indirizzo: PIANO NAZIONALE INFORMATICA

QUESTIONARIO

1. Lanciando due dadi, qual è il numero che ha maggiore probabilità di uscita?
Qual è la probabilità che esca un numero primo?
2. Si dimostri che l'equazione $\cos x - x = 0$ ha un'unica radice reale e se ne calcoli un valore approssimato con due cifre decimali esatte.
3. Si calcoli il valore medio della funzione $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x-1}{x+1}$ sull'intervallo $0 \leq x \leq 1$.
4. Sia dato un triangolo avente i lati lunghi rispettivamente 13 cm, 14 cm e 15 cm e il cerchio in esso inscritto. Si scelga a caso un punto all'interno del triangolo: si determini la probabilità che tale punto risulti esterno al cerchio.
5. Si calcoli il limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x e^{t^2-t} dt}{x^3}.$$

6. Un serbatoio della capacità di 400 m^3 deve avere la forma di un cilindro circolare retto senza coperchio. Il materiale da costruzione per il fondo costa per m^2 il doppio di quello che serve per le pareti laterali. Si calcoli il rapporto fra il raggio r e l'altezza h in modo che la costruzione risulti la più economica.
7. Una statua alta 70 metri viene sistemata su una collina di altezza h . Da un certo punto A, situato a livello del suolo, gli angoli di elevazione per la base B e la cima C della statua misurano rispettivamente $20,75^\circ$ e $28,30^\circ$. Si determini l'altezza h .
8. In un piano cartesiano (Oxy) una retta verticale divide il triangolo con i vertici nei punti (0,0), (1,1) e (9,1) in due regioni di ugual area. Si trovi l'equazione di tale retta.
9. Un tronco di cono è circoscritto ad una sfera di raggio r . Si stabilisca la relazione che esiste fra i raggi delle basi del tronco e il raggio della sfera.
10. Due punti A e B, il primo sull'asse x e l'altro sull'asse y, distano dall'origine rispettivamente 35 cm e 15 cm. Ambedue si muovono con moto rettilineo uniforme verso l'origine: A con velocità $v_1 = 3 \text{ cm/s}$, B con velocità $v_2 = 1 \text{ cm/s}$. In quale istante è minima la distanza tra i due punti e quanto vale questo minimo?

Durata massima della prova: 6 ore.

È consentito l'uso della calcolatrice non programmabile.

Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.