ESAME DI STATO PROVA DI MATEMATICA 26 GIUGNO 2009

COMPITO SPERIMENTALE

QUESTIONARIO

QUESITO 1

Essendo 0<a<b sarà –b<a<b e dunque la funzione integranda sarà y=-x+a per –b≤x≤a e y=x-a per a≤x≤b.

L'integrale proposto va quindi separato in due parti $\int_{-b}^{a}(-x+a)dx+\int_{a}^{b}(x-a)dx$ e risulta uguale al risultato del testo.

QUESITO 2

Assumiamo che il dominio della funzione sia l'intero insieme A e il codominio l'intero insieme B, anche se il testo non lo esplicita chiaramente

In questa ipotesi non possono esistere funzione iniettive e quindi biiettive perchè gli elementi dell'insieme A sono in numero maggiore di quelli di B.

Possono invece esistere funzione suriettive perchè un elemento di B può essere immagine di più elementi di A

QUESITO 3

Perché la moneta non tocchi il lato della mattonella il suo centro deve cadere in un punto la cui distanza dal lato sia minore del raggio; cioè all'interno di un quadrato che ha lo stesso centro e i lati paralleli alla mattonella ed uguali al lato meno il doppio del raggio della moneta.

La probabilità è quindi data dal rapporto tra le aree dei due quadrati $\frac{(10-2.575)^2}{10^2}=55\%$

QUESITO 4

L'affermazione è falsa.

Un poliedro regolare ha le facce che sono poligoni regolari congruenti e angoloidi e diedri congruenti. In un angoloide la somma degli angoli delle facce concorrenti in un vertice deve essere minore di 360°: poiché gli angoli interni di un esagono regolare misurano 120° non è possibile che in un vertice concorrano tre facce esagonali, perchè in tal caso la somma delle facce sarebbe uguale a 360° e si otterrebbe una tassellazione del piano.

QUESITO 5
Premettendo che il quesito chiede di valutare delle espressioni finite e noi dei limiti, l'unica espressione che ha un valore numerico è 0/1 che è uguale a 0 in quanto la divisione 0:n ha come risultato 0 essendo $0 \cdot n = 0$ $\forall n \neq 0$.
Nessuna delle altre tre espressioni ha un valore numerico in quanto 1/0 è impossibile perché non esiste alcun numero che moltiplicato per 0 dia 0. L'espressione 0/0 è una forma indeterminata poiché, come sopra, qualunque numero moltiplicato per 0 dà 0.
Infine l'espressione 0^0 è priva di significato poiché l'elevamento a potenza con esponente 0 è definita solo con base diversa da 0.

QUESITO 6
Premesso che:
l'algoritmo di Newton per il calcolo approssimato degli zeri di un'equazione è applicabile solo ad un intervallo in cui la f(x) cambia segno, è continua con le sue derivate prima e seconda e tali derivate devono essere diverse da zero nell'intervallo;
la funzione data, il cui zero che cerchiamo di approssimare è π, ha la derivata seconda che si annulla in tale punto quindi non può esistere un intorno di tale punto in cui si valgano tutte le ipotesi del teorema.
L'applicazione semplice della formula di Newton : $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ diventa nel nostro caso $x_1 = x_0 - \tan(x_0)$ quindi considerando come punto di partenza x_0=3 si ottiene x_1=3.142546 e x_2=3.141592.

QUESITO 7
Applicando la formula per il coefficiente binomiale $\binom{a}{b} = \frac{a!}{b!(a-b)!}$ e ricordando che le espressioni $\binom{n}{k} e \binom{n}{k+1}$ sono entrambe definite per n≥k+1 quindi n>k, si ha che:

$$\frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{n-k}{k+1}$$

ma (n-k)!=(n-k)(n-k-1)! e (k+1)k!=(k+1)! Pertanto

$$\frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} = \frac{n!(n-k)}{(n-k)(n-k-1)!(k+1)!}$$

Elidendo a secondo membro n-k si dimostra l'identità.

QUESITO 8
Chiamiamo:
x la media delle età degli uomini, m_i l'età dell'i-esimo uomo, y la media delle età delle donne, f_i l'età dell'i-esima donna

media dell’età degli uomini : $\dfrac{\sum_{i=1}^{x} m_i}{x} = 26$

media dell’età delle donne : $\dfrac{\sum_{i=1}^{y} f_i}{y} = 19$

età media dei partecipanti : $\dfrac{\sum_{i=1}^{x} m_i + \sum_{i=1}^{y} f_i}{x+y} = 22$

da cui si può ricavare che $\sum_{i=1}^{x} m_i = 26x$ e $\sum_{i=1}^{y} f_i = 19y$ quindi $\dfrac{26x + 19y}{x+y} = 22$

dividendo per y: $\dfrac{26\frac{x}{y} + 19}{\frac{x}{y} + 1} = 22$ da cui $\dfrac{x}{y} = \dfrac{3}{4}$.

QUESITO 9

La dimostrazione che il volume della scodella è pari al cono di figura utilizzando il principio di Cavalieri è riportata su qualunque teso di geometria solida.

QUESITO 10

La proposizione citata nel quesito è la formulazione originale del V postulato di Euclide, la cui versione più frequentemente riportata nei testi moderni è: “data una retta ed un punto esterno ad essa per il punto passa una ed una sola retta parallela alla retta data”

Esso gioca un ruolo importante nella nascita delle geometrie non euclidee.

L'evidenza del quinto postulato non è immediata in quanto non rimanda ad una costruzione geometrica come invece fanno i precedenti quattro postulati. Euclide nelle prime 26 proposizioni degli elementi non introduce questo postulato quasi voglia rinviare il più possibile il ricorso ad esso. Per secoli si è tentato di eliminarlo o di dimostrarlo.

Per primo Gerolamo Saccheri tentò di dimostrare per assurdo il postulato e i suoi fallimenti spianarono la strada alle geometrie non euclidee, che nacquero nel XIX secolo partendo proprio dalla negazione del V postulato di Euclide.

Negando l’unicità si ottiene il modello della geometria iperbolica nella quale esiste più di una parallela, mentre negando l’esistenza si ha la geometria ellittica dove non esistono rette parallele.