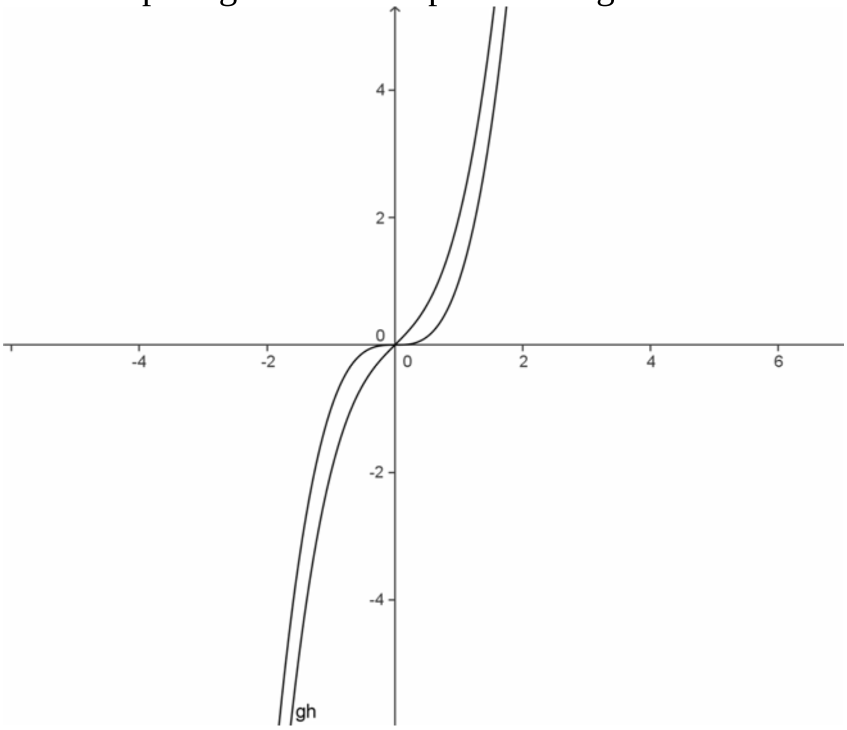
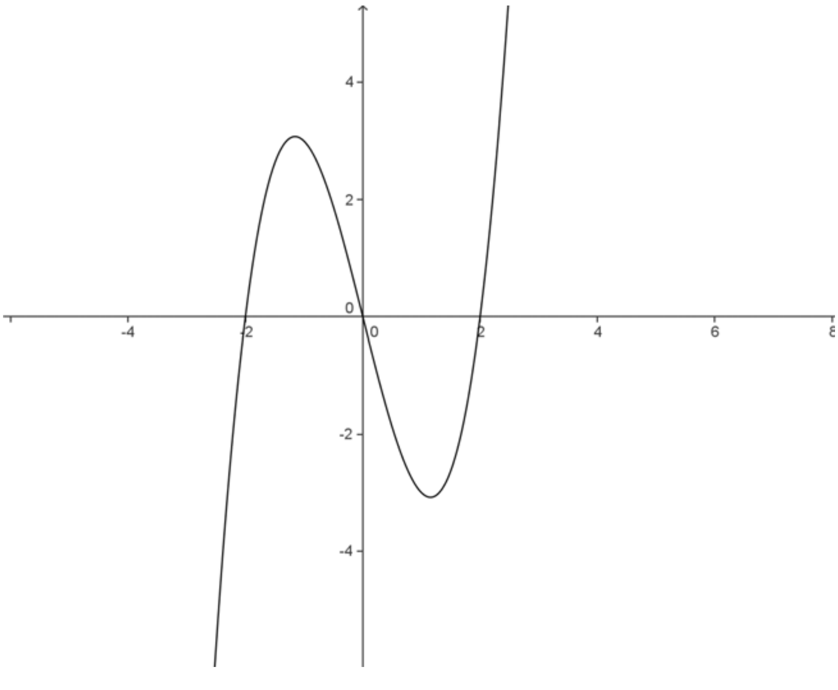
PROBLEMA 2 INDIRIZZO PNI

RISOLUZIONE

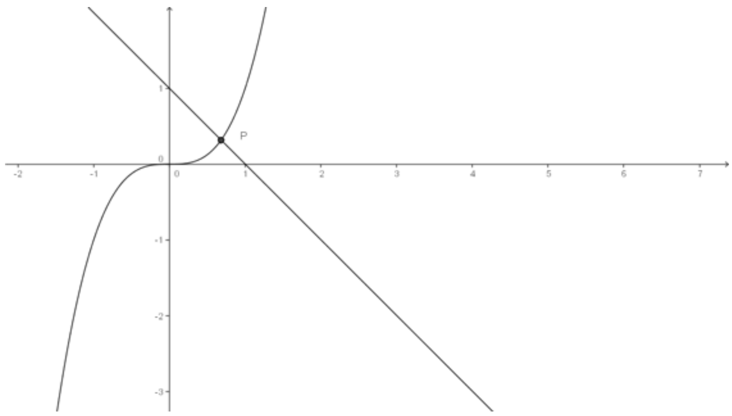
Punto 1
Per $k \geq 0$ le curve $f(x) = x^3 + kx$ sono parabole cubiche con flesso nell'origine e al variare di k varia l'inclinazione della tangente inflessionale
Due esempi di grafici sono riportati in figura:



Se k<0 la funzione corrispondente interseca tre volte l'asse delle x e la sua derivata prima si annulla due volte. La funzione presenta quindi un massimo e un minimo relativi come da grafico in figura:

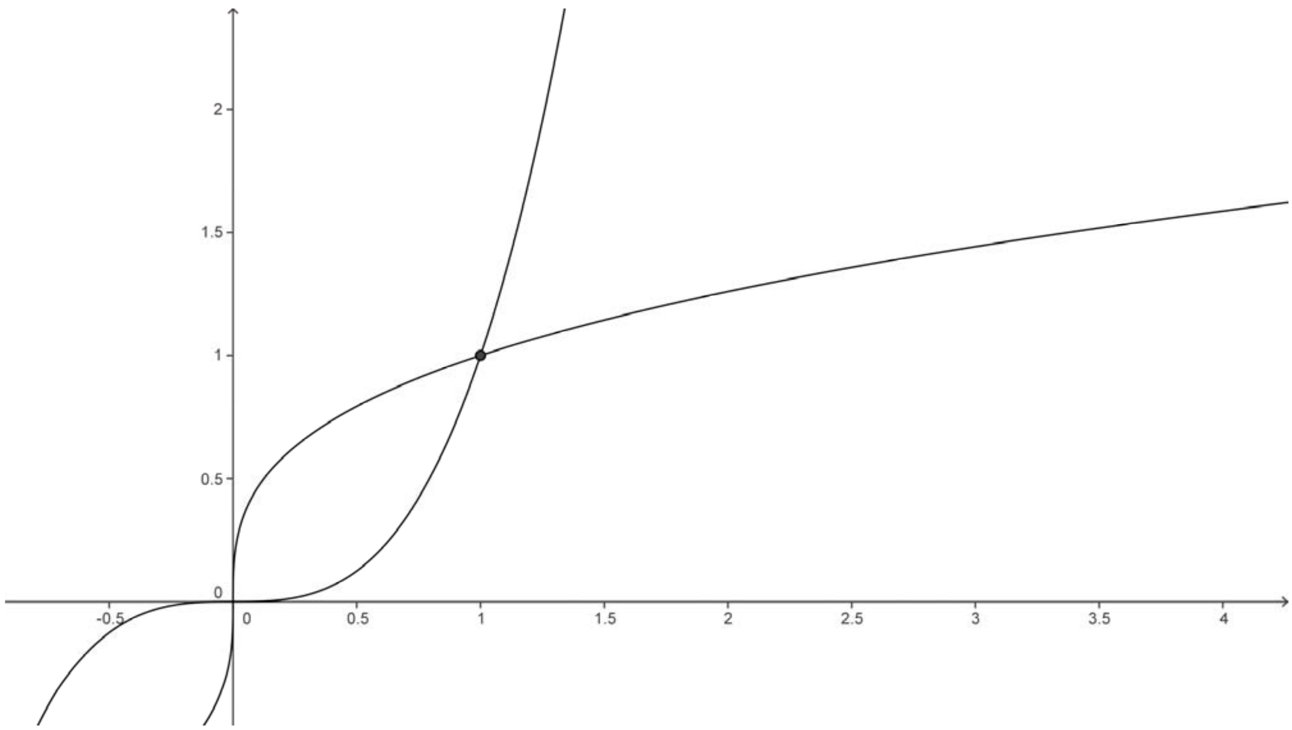


Punto 2
Per dimostrare che il grafico γ della funzione g(x) = x^3 e la retta di equazione y=1–x hanno un solo punto P in comune si può procedere per via grafica, rappresentando le due funzioni sullo stesso piano cartesiano, come nella figura riportata sotto:



come risulta evidente da tale confronto grafico, l'ascissa del punto P è compresa tra 0 e 1, per determinarla con l'approssimazione richiesta utilizziamo, per esempio, il metodo di bisezione nell'intervallo $[0,1]$ applicato alla funzione $F(x) = x^3 + x - 1$. Dopo tre iterazioni si ottiene che il valore cercato è compreso tra 0,625 e 0,75, quindi si può prendere come valore approssimato il punto medio 0,6875.

Punto 3
Se g(x) = x^3 allora la sua funzione inversa è g^{-1} (x) = $\sqrt[3]{x}$. Le due funzioni si intersecano nei punti (0;0) e (1;1) e sono simmetriche rispetto alla retta bisettrice del primo e terzo quadrante y=x.
L'area D è quindi quella racchiusa tra le due curve.

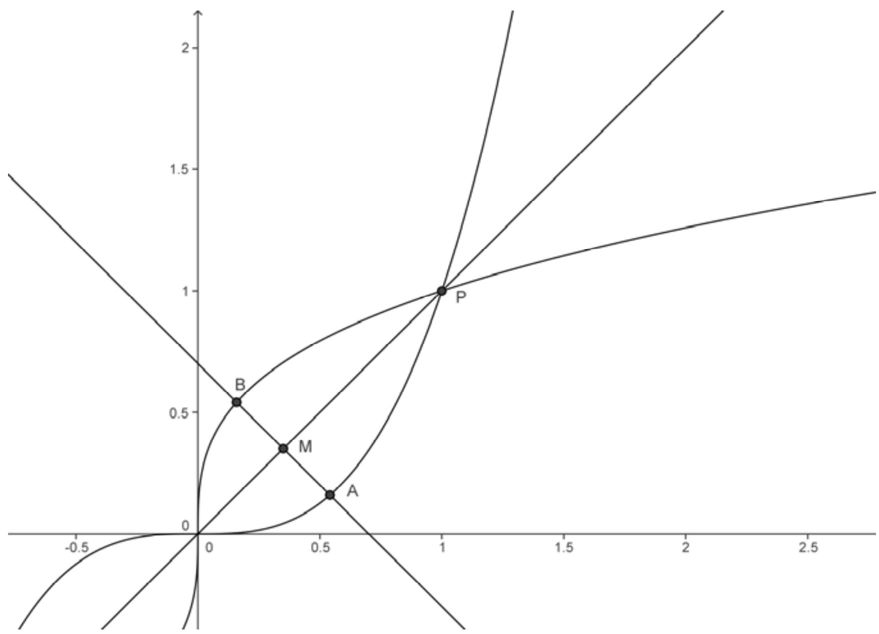


Per il calcolo dell'area della parte di piano D delimitata tra le due curve è necessario quindi calcolare l'integrale :

$$\int_0^1 (\sqrt[3]{x} - x^3)dx = \left[\frac{3}{4}x^{4/3} - \frac{x^2}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

Punto 4

Il solido W che si forma è un solido retto con base corrispondente alla figura D e altezza 12. Il volume di W si calcola facilmente facendo il prodotto (area di base) * (altezza) ed è quindi pari a ½ * 12 = 6



Per determinare la sezione di area massima bisogna trovare, tra le rette perpendicolari alla bisettrice del primo quadrante, quella che intercetta il segmento di massima lunghezza.
Visto che le curve sono simmetriche rispetto alla retta y=x è sufficiente massimizzare la distanza tra un punto A della curva $y=x^3$ e la retta y=x, come in figura:

Le coordinate di A sono (a; a^3) e si può calcolare in funzione di a la distanza d(a) dalla retta x–y=0 con 0<a<1; per cui si ottiene: $d(a)=\frac{|a-a^3|}{\sqrt{2}}$, che nei limiti dati è uguale a $d(a)=\frac{a-a^3}{\sqrt{2}}$.

Per massimizzare la distanza si studia la derivata prima $d'(a)=\frac{1-3a^2}{\sqrt{2}}$ che si annulla per a = $\sqrt{\frac{1}{3}}$ ed è positiva per $0<a<\sqrt{\frac{1}{3}}$, negativa altrove.

Per tale valore la distanza è quindi massima e vale d=AM=$=\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}-(\frac{1}{\sqrt{3}})^3}{\sqrt{2}}$. Il segmento AB a cui corrisponde la sezione di area massima ha dunque lunghezza pari a 2AM = $\frac{2\sqrt{6}}{9}$ e la corrispondente sezione massima ha area $\frac{8\sqrt{6}}{3}$.