ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2009

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1

Sia f la funzione definita da:

$$f(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}\right)e^{-x}$$

dove n è un intero positivo e $x \in \mathbb{R}$.

1. Si verifichi che la derivata di $f(x)$ è: $f'(x) = -\dfrac{x^n}{n!}e^{-x}$.

2. Si dica se la funzione f ammette massimi e minimi (assoluti e relativi) e si provi che, quando n è dispari, $f(x) \leq 1$ per ogni x reale.

3. Si studi la funzione g ottenuta da f quando $n = 2$ e se ne disegni il grafico.

4. Si calcoli $\int_0^2 g(x)dx$ e se ne dia l'interpretazione geometrica.

PROBLEMA 2

In un sistema di riferimento cartesiano ortogonale Oxy, si consideri la funzione f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita $f(x) = x^3 + kx$, con k parametro reale.

1. Si dica come varia il grafico di f al variare di k (k positivo, negativo, o nullo).

2. Sia $g(x) = x^3$ e γ il suo grafico. Si dimostri che γ e la retta di equazione $y = 1 - x$ hanno un solo punto P in comune. Si determini l'ascissa di P approssimandola a meno di 0,1 con un metodo iterativo di calcolo.

3. Sia D la regione finita del primo quadrante delimitata da γ e dal grafico della funzione inversa di g. Si calcoli l'area di D.

4. La regione D è la base di un solido W le cui sezioni con piani perpendicolari alla bisettrice del primo quadrante sono tutte rettangoli di altezza 12. Si determini la sezione di area massima. Si calcoli il volume di W.

QUESTIONARIO

1 Siano: $0 < a < b$ e $x \in [-b; b]$. Si provi che $\int_{-b}^{b} |x - a| dx = a^2 + b^2$.

2 Sono dati gli insiemi $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{a, b, c\}$. Tra le possibili applicazioni (o funzioni) di A in B, ce ne sono di suriettive? Di iniettive? Di biiettive?

3 Una moneta da 2 euro (il suo diametro è 25,75 mm) viene lanciata su un pavimento ricoperto con mattonelle quadrate di lato 10 cm. Qual è la probabilità che la moneta vada a finire internamente ad una mattonella? (cioè non tagli i lati dei quadrati)

4 «Esiste solo un poliedro regolare le cui facce sono esagoni». Si dica se questa affermazione è vera o falsa e si fornisca una esauriente spiegazione della risposta.

5 Si considerino le seguenti espressioni:

$$\frac{0}{1},\ \frac{0}{0},\ \frac{1}{0},\ 0^0.$$

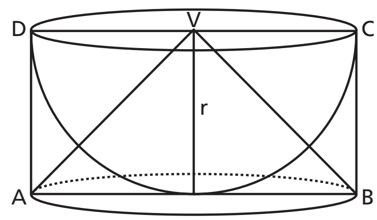
A quali di esse è possibile attribuire un valore numerico? Si motivi la risposta.

6 Con l'aiuto di una calcolatrice, si applichi il procedimento iterativo di Newton all'equazione $\operatorname{sen} x = 0$, con punto iniziale $x_0 = 3$. Cosa si ottiene dopo due iterazioni?

7 Si dimostri l'identità $\binom{n}{k+1} = \binom{n}{k}\frac{n-k}{k+1}$ con n e k naturali e $n > k$.

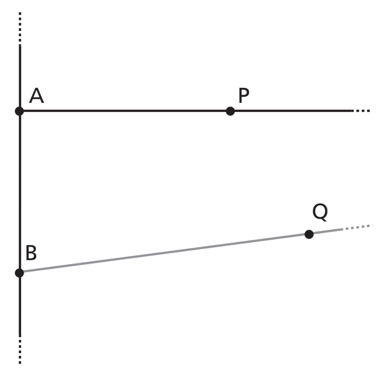
8 Alla festa di compleanno di Anna l'età media dei partecipanti è di 22 anni. Se l'età media degli uomini è 26 anni e quella delle donne è 19, qual è il rapporto tra il numero degli uomini e quello delle donne?

9 Nei «*Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*», Galileo Galilei descrive la costruzione di un solido che si chiama *scodella* considerando una semisfera di raggio r e il cilindro a essa circoscritto. La scodella si ottiene togliendo la semisfera dal cilindro. Si dimostri, utilizzando il principio di Cavalieri, che la scodella ha volume pari al cono di vertice V in figura.



▶ **Figura 1.**

10 «Se due punti P e Q del piano giacciono dalla stessa parte rispetto a una retta AB e gli angoli $P\hat{A}B$ e $Q\hat{B}A$ hanno somma minore di 180°, allora le semirette AP e BQ, prolungate adeguatamente al di là dei punti P e Q, si devono intersecare.» Questa proposizione è stata per secoli oggetto di studio da parte di schiere di matematici. Si dica perché e con quali risultati.



▶ **Figura 2.**

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

SOLUZIONE DELLA PROVA D'ESAME
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2009

PROBLEMA 1

1. La funzione $f(x)$ ha dominio $\mathbb{R}$ ed è continua e derivabile in tale campo, poiché è prodotto di una funzione polinomiale per una funzione esponenziale.
Calcoliamo la derivata di $f(x)$ utilizzando la regola del prodotto:

$$f'(x) = \left(1 + \frac{2x}{2!} + \ldots + \frac{nx^{n-1}}{n!}\right)e^{-x} + \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}\right)(-e^{-x}) =$$

$$= \left(1 + x + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right)e^{-x} - \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}\right)e^{-x} =$$

$$= \left(1 + x + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} - 1 - x - \frac{x^2}{2!} - \ldots - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} - \frac{x^n}{n!}\right)e^{-x} =$$

osservando che nella parentesi dell'ultima espressione sono presenti n coppie formate da monomi opposti, risulta:

$$= -\frac{x^n}{n!}e^{-x}.$$

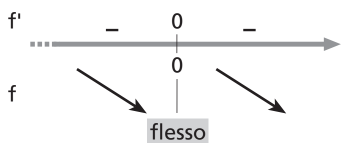
2. Studiamo il segno della derivata prima $f'(x)$:

$$f'(x) = -\frac{x^n}{n!}e^{-x} \geq 0 \;\rightarrow\; x^n \leq 0,$$

poiché $-e^{-x} < 0 \;\forall x \in \mathbb{R}$.
Distinguiamo lo studio del segno per n pari ed n dispari.

- Se n è pari:

$$f'(x) \geq 0 \;\rightarrow\; x^n \leq 0 \;\rightarrow\; x = 0.$$



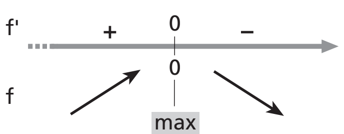
▲ **Figura 3.**

Il quadro del segno è riportato in figura 3.
In $x = 0$ la funzione presenta un flesso a tangente orizzontale. Perciò, se n è pari, la funzione non ammette né minimi né massimi.

- Se n è dispari:

$$f'(x) \geq 0 \;\rightarrow\; x^n \leq 0 \;\rightarrow\; x \leq 0.$$

Il quadro del segno della derivata prima è rappresentato in figura 4.
In $x = 0$ la funzione ammette un unico massimo assoluto. Poiché $f(0) = 1$, il punto di massimo assoluto ha coordinate (0;1).
In particolare, se n è dispari, $f(x) \leq 1, \;\forall x \in \mathbb{R}$.



▲ **Figura 4.**

3. Studiamo la funzione $g(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)e^{-x}$. Essa ha come dominio $\mathbb{R}$, non interseca l'asse x poiché il polinomio $1 + x + x^2$ ha discriminante negativo, interseca l'asse y nel punto di coordinate (0;1), è sempre positiva nel suo dominio e non è né pari né dispari.
Calcoliamo ora i limiti per agli estremi del campo di esistenza:

$$\lim_{x\rightarrow+\infty}\left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)e^{-x} = \lim_{x\rightarrow+\infty}\frac{\left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)}{e^x}.$$

Tale limite presenta una forma indeterminata del tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Applicando due volte il Teorema di De L'Hospital si ottiene:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0.$$

Quindi la funzione ha asintoto orizzontale $y=0$.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right)e^{-x}=+\infty,$$

non vi è però asintoto obliquo poiché risulta infinito il limite $\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}$.

Scriviamo la funzione derivata prima $g'(x)$ utilizzando l'espressione di $f'(x)$ calcolata nel punto 1 del problema, assumendo $n=2$; si ottiene:

$$g'(x)=-\frac{x^2}{2}e^{-x}.$$

Come già evidenziato, poiché $n=2$ è pari, la funzione g è sempre decrescente ed è priva di minimi e massimi.

Studiamo la derivata seconda e il relativo quadro del segni (figura 5):

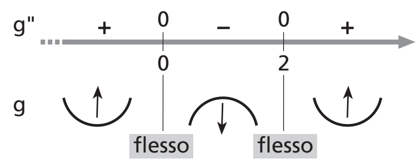
$$g''(x)=-xe^{-x}+\frac{x^2}{2}e^{-x}=\frac{x^2-2x}{2}e^{-x};$$

$$g''(x)>0 \to x<0 \vee x>2.$$

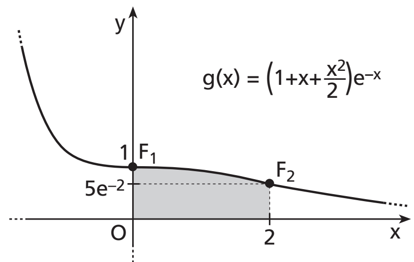
La funzione presenta due flessi nei punti di coordinate $F_1(0;\ 1)$ e $F_2(2;\ 5e^{-2})$.

Osserviamo che in F_1 il flesso è a tangente orizzontale poiché in $x=0$ si annulla anche la derivata prima.

In figura 6 è riportato il grafico della funzione $g(x)$.



▲ **Figura 5.**



▲ **Figura 6.**

4. Considerato l'integrale $\int_0^2\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right)e^{-x}dx$, integriamo due volte per parti:

$$\int_0^2\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right)e^{-x}dx=\left[-e^{-x}\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right)\right]_0^2+\int_0^2(1+x)e^{-x}dx=-5e^{-2}+1+[-e^{-x}(1+x)]_0^2+\int_0^2 e^{-x}dx=$$

$$=-5e^{-2}+1-3e^{-2}+1-[-e^{-x}]_0^2=-8e^{-2}+2-(e^{-2}-1)=3-9e^{-2}.$$

Tale integrale rappresenta l'area della regione di piano compresa tra il grafico di $g(x)$ e l'asse x nell'intervallo [0; 2] (figura 6).

PROBLEMA 2

1. Studiamo la funzione $f(x)=x^3+kx$ al variare di k parametro reale.

- Dominio: $\mathbb{R}$, per ogni k reale.
- Simmetrie: $f(x)=-f(x)$, ossia la funzione è dispari, per ogni k reale e il grafico è simmetrico rispetto all'origine di riferimento.
- Intersezione con gli assi cartesiani:

$$\begin{cases}x=0\\y=x^3+kx\end{cases}\to\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}y=0\\y=x^3+kx\end{cases}\to\begin{cases}y=0\\0=x^3+kx\end{cases}\to\begin{cases}y=0\\x(x^2+k)=0\end{cases}\to\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}\vee\begin{cases}y=0\\x^2+k=0\end{cases}$$

Osservando i sistemi risolutivi si deduce che se $k \geq 0$ non ci sono altre intersezioni con l'asse x oltre all'origine.
Se $k < 0$ vi sono altre due intersezioni con l'asse delle ascisse oltre all'origine: $(-\sqrt{-k}; 0)$ e $(\sqrt{-k}; 0)$.

- Segno della funzione:

$$f(x) > 0 \rightarrow x(x^2 + k) > 0.$$

Se $k \geq 0$, il segno di f è rappresentato nella figura 7.
Pertanto $f(x) > 0$ per $x > 0$.
Se $k < 0$, ci sono due ulteriori radici della funzione e il segno di f varia come illustrato dal diagramma di figura 8.

		0	
x	−	0	+
$x^2 + k$	+		+
f(x)	−	0	+

▲ **Figura 7.**

		$-\sqrt{-k}$		0		$\sqrt{-k}$	
x	−		−	0	+		+
$x^2 + k$	+	0	−		−	0	+
f(x)	−	0	+	0	−	0	+

▲ **Figura 8.**

- Calcolo e segno delle derivate prima e seconda:

$$f'(x) = 3x^2 + k;$$
$$f''(x) = 6x.$$

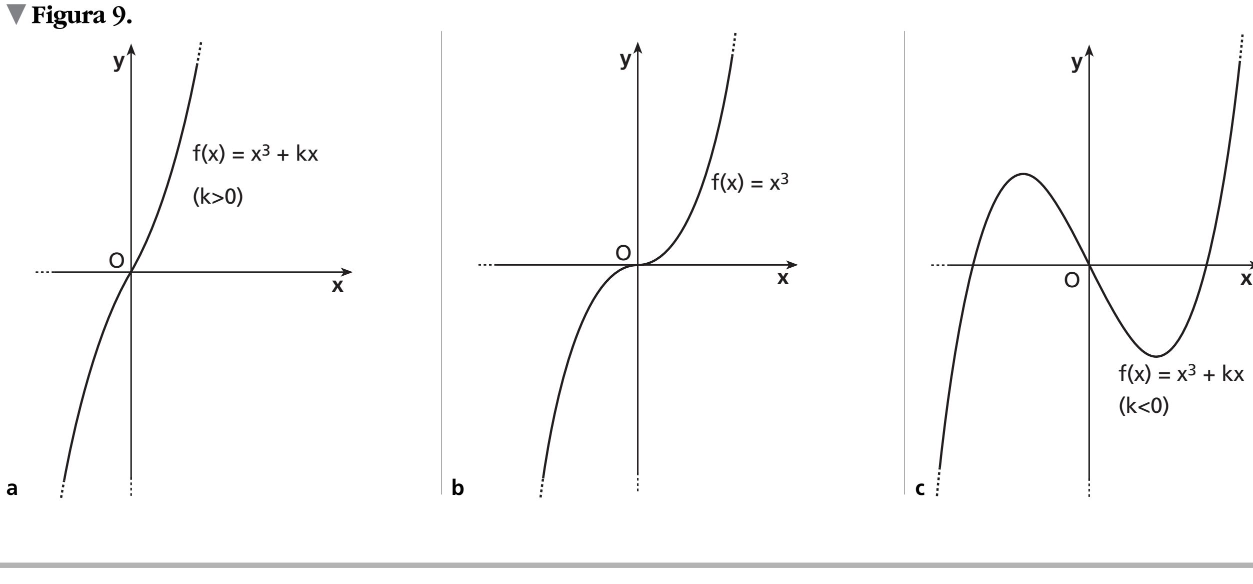
Osserviamo che $f''(x)$ è indipendente da k.
Al variare del segno del parametro k, si possono individuare 3 casi:

a) Se $k > 0$:
$f'(x) > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ e la funzione è strettamente crescente;
$f''(x) > 0$ per $x > 0$, $f''(x) = 0$ per $x = 0$ (il punto (0;0) è un flesso a tangente non orizzontale).
Nella figura 9a è rappresentato un grafico di $f(x)$ quando $k > 0$.

b) Se $k = 0$:
$f'(x) > 0 \ \forall x \neq 0$ e la funzione è strettamente crescente;
$f'(x) = 0$ per $x = 0$;
$f''(x) > 0$ per $x > 0$, $f''(x) = 0$ per $x = 0$ (il punto (0; 0) è un flesso a tangente orizzontale). Nella figura 9b è illustrato il grafico di $f(x)$ quando $k = 0$ ovvero $y = x^3$.

c) Se $k < 0$:
$f'(x) > 0 \rightarrow 3x^2 + k > 0 \rightarrow x < -\sqrt{-\frac{k}{3}} \ \vee \ x > \sqrt{-\frac{k}{3}}$.
Il punto $\left(-\sqrt{-\frac{k}{3}}; -\frac{2k}{3}\sqrt{-\frac{k}{3}}\right)$ è un punto di massimo relativo, mentre $\left(\sqrt{-\frac{k}{3}}; \frac{2k}{3}\sqrt{-\frac{k}{3}}\right)$ e un punto di minimo relativo; $f''(x) > 0$ per $x > 0$; $f''(x) = 0$ per $x = 0$ (il punto (0;0) è un flesso a tangente non orizzontale). Nella figura 9 è rappresentato il grafico di $f(x)$ quando $k < 0$.

▼ **Figura 9.**



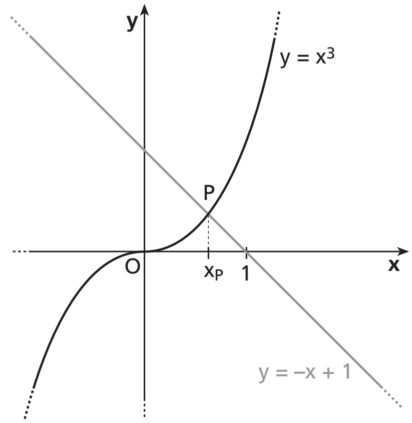
2. Rappresentiamo in figura 10 il grafico γ della funzione $g(x) = x^3$ e la retta di equazione $y = 1 - x$.

I punti di intersezione tra γ e la retta corrispondono alle soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} y = x^3 \\ y = 1 - x \end{cases}$$

ovvero all'equazione risolvente $x^3 + x - 1 = 0$.

Sia $h(x) = x^3 + x - 1$. La funzione h è polinomiale di grado dispari, ed è strettamente crescente, poiché la sua derivata prima $h'(x) = 3x^2 + 1$ è positiva per ogni $x \in \mathbb{R}$. Pertanto la funzione si annulla in un unico punto x_P.



▶ **Figura 10.**

Osservando che $h(0) = -1$ e $h(1) = 1$, ne segue che $x_P \in]0, 1[$. Per determinare il valore di x_P a meno di 0,1 utilizziamo il metodo di bisezione, partendo dai valori $a_0 = 0$ e $b_0 = 1$.

a	$h(a)$	b	$h(b)$	$\frac{a+b}{2}$	$h\left(\frac{a+b}{2}\right)$
0	− 1	1	1	0,5	− 0,375
0,5	− 0,375	1	1	0,75	0,1719
0,5	− 0,375	0,75	0,1719	0,63	− 0,1309
0,63	− 0,1309	0,75	0,1719	0,69	0,0125

Si trova quindi che $x_P = 0{,}69$ con un errore minore di 0,1.

3. La funzione inversa di g ha equazione $g^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$. Nella figura 11 sono riportati i grafici delle due funzioni.

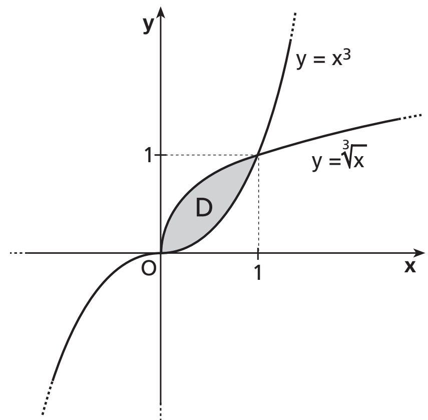
Le intersezioni dei grafici di g e g^{-1} nel primo quadrante sono date dalle soluzioni del sistema per $x > 0$:

$$\begin{cases} y = x^3 \\ y = \sqrt[3]{x} \end{cases} \rightarrow x^3 = \sqrt[3]{x} \rightarrow x^6 = 1 \rightarrow x = 1$$

Osserviamo inoltre che vale la disuguaglianza $x^3 < \sqrt[3]{x}$, per $x \in]0; 1[$.

L'area A della regione D è data da:

$$A(D) = \int_0^1 (\sqrt[3]{x} - x^3)dx = \left[\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$



▲ **Figura 11.**

4. Il solido W è un «cilindro» di base D (figura 12).

Tra le sezioni rettangolari considerate, quella di area massima è quella di base massima. Tale base è il segmento AB che ha come estremi i punti delle curve che hanno ascissa compresa tra 0 e 1 e distanza massima dalla bisettrice del primo e terzo quadrante (figura 13).

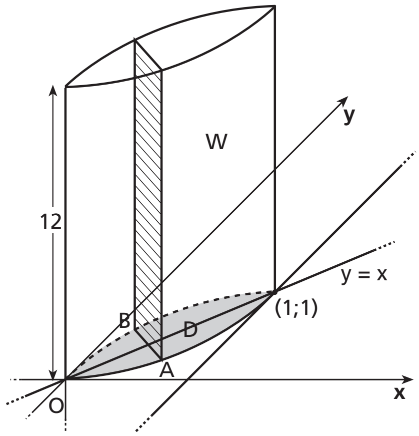


Figura 12.

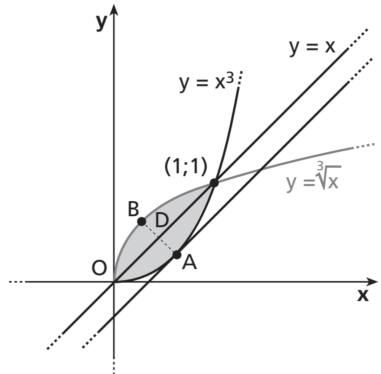


Figura 13.

Il punto A è il punto del grafico di $g(x)$ tale che la tangente in A è parallela alla bisettrice del primo e terzo quadrante, con $0 < x_A < 1$.
Poiché $g'(x) = 3x^2$, risulta:

$$3x_A^2 = 1 \rightarrow x_A = \frac{\sqrt{3}}{3},\ y_A = \frac{\sqrt{3}}{9}.$$

Per simmetria risulta $B\left(\frac{\sqrt{3}}{9}; \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

Perciò il segmento AB ha misura $\overline{AB} = \frac{2\sqrt{6}}{9}$ e l'area della sezione massima risulta:

$$\overline{AB} \cdot \textit{altezza} = \frac{2\sqrt{6}}{9} \cdot 12 = \frac{8\sqrt{6}}{3}.$$

Il volume V del solido W si ottiene moltiplicando l'area della regione D per l'altezza di 12:

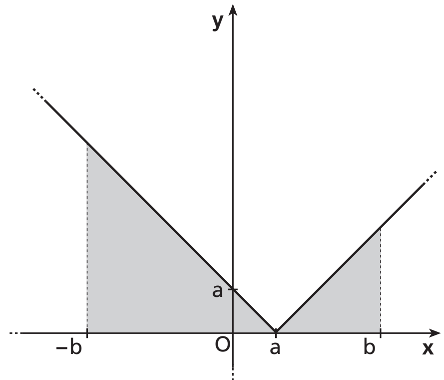
$$V(W) = A(D) \cdot \textit{altezza} = \frac{1}{2} \cdot 12 = 6.$$

QUESTIONARIO

1 La funzione integranda è definita per casi:

$$y=\begin{cases} x-a & \text{se } x\geq a \\ -x+a & \text{se } x<a \end{cases}$$

e ha il grafico riportato in figura 14.



▶ **Figura 14.**

Applicando la proprietà additiva degli integrali, risulta:

$$\int_{-b}^{b}|x-a|dx=\int_{-b}^{a}(-x+a)dx+\int_{a}^{b}(x-a)dx=$$

$$=\left[-\frac{x^2}{2}+ax\right]_{-b}^{a}+\left[\frac{x^2}{2}-ax\right]_{a}^{b}=$$

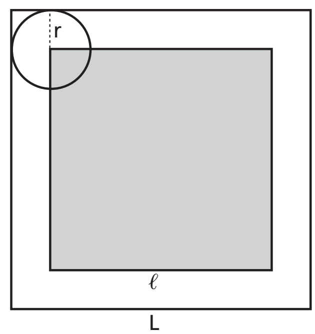
$$=-\frac{a^2}{2}+a^2+\frac{b^2}{2}+ab+\frac{b^2}{2}-ab-\frac{a^2}{2}+a^2=a^2+b^2.$$

Una dimostrazione alternativa si ottiene osservando che l'integrale richiesto è equivalente alla somma delle aree dei due triangoli evidenziati in figura. Entrambi i triangoli sono rettangoli e isosceli, con cateti di lunghezza $(b-a)$ e $(b+a)$, rispettivamente, pertanto vale:

$$\int_{-b}^{b}|x-a|dx=\frac{(b-a)^2}{2}+\frac{(b+a)^2}{2}=a^2+b^2.$$

2 Vedi lo svolgimento del quesito 2 della prova del corso di ordinamento 2009.

3 Affinché la moneta cada all'interno della mattonella di lato L è necessario che il suo centro disti dal bordo almeno una lunghezza pari al raggio r della moneta (figura 15).



▶ **Figura 15.**

Il centro deve cadere all'interno del quadrato di lato ℓ:

$$\ell=L-2r=(10-2{,}575)\text{ cm}=7{,}425\text{ cm}.$$

La superficie s del quadrato interno vale:

$$s=\ell^2=(7{,}425\text{ cm})^2\simeq 55{,}13\text{ cm}^2,$$

mentre la superficie S della mattonella risulta:

$$S=L^2=(10\text{ cm})^2=100\text{ cm}^2.$$

La probabilità P che la moneta lanciata cada internamente alla mattonella risulta:

$$P=\frac{s}{S}=\frac{55{,}13\text{ cm}^2}{100\text{ cm}^2}\simeq 0{,}55=55\%.$$

4 Vedi lo svolgimento del quesito 4 della prova del corso di ordinamento 2009.

5 Vedi lo svolgimento del quesito 5 della prova del corso di ordinamento 2009.

6 Per applicare il procedimento di Newton utilizziamo la formula:

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

Utilizziamo tale schema iterativo alla funzione $f(x)=\operatorname{sen}x$ e punto iniziale $x_0=3$:

$$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}\ \rightarrow\ x_1=3-\frac{\operatorname{sen}3}{\cos 3}\simeq 3{,}1425465431,$$

approssimato alla decima cifra decimale.

Analogamente si calcolano:

$$x_2 = x_1 - \frac{\operatorname{sen} x_1}{\cos x_1} \;\rightarrow\; x_2 \simeq 3{,}1415926533,$$

$$x_3 = x_2 - \frac{\operatorname{sen} x_2}{\cos x_2} \;\rightarrow\; x_2 \simeq 3{,}1415926535.$$

In questo modo si ottiene un'approssimazione di π (soluzione analitica dell'equazione $\operatorname{sen} x = 0$ più prossima al valore iniziale $x_0 = 3$) con 9 cifre decimali esatte.

7 Vedi lo svolgimento del quesito 7 della prova del corso di ordinamento 2009.

8 Indichiamo con:

N_u il numero degli uomini;
N_d il numero delle donne;
S_u la somma delle età degli uomini;
S_d la somma delle età delle donne;
M_u l'età media degli uomini (26 anni);
M_d l'età media delle donne (19 anni);
M l'età media dei partecipanti (22 anni).

Per definizione di media aritmetica, valgono le seguenti uguaglianze:

$$M_u = \frac{S_u}{N_u} \quad \rightarrow \; M_u \cdot N_u = S_u;$$

$$M_d = \frac{S_d}{N_d} \quad \rightarrow \; M_d \cdot N_d = S_d;$$

$$M = \frac{S_u + S_d}{N_u + N_d} \;\rightarrow\; M \cdot (N_u + N_d) = S_u + S_d.$$

Sommiamo membro a membro le prime due uguaglianze e confrontiamo con la terza:

$$M_u \cdot N_u + M_d \cdot N_d = M \cdot (N_u + N_d).$$

Sostituiamo i valori numerici:

$$26 \cdot N_u + 19 \cdot N_d = 22 \cdot (N_u + N_d) \quad \rightarrow \quad 4 \cdot N_u = 3 \cdot N_d \quad \rightarrow \quad \frac{N_u}{N_d} = \frac{3}{4}.$$

9 Vedi lo svolgimento del quesito 9 della prova del corso di ordinamento 2009.

10 La proposizione riportata dal testo è il V Postulato di Euclide. Euclide, matematico greco vissuto attorno al 300 a.C., scrisse gli *Elementi*, un'opera che costituisce una sintesi organica delle conoscenze di matematica elementare possedute dagli antichi Greci. Tutta la teoria geometrica presentata nei tredici libri degli *Elementi* si sviluppa a partire da cinque postulati, leggi considerate vere sulla base dell'evidenza e dell'intuizione comune. Tuttavia rispetto ai precedenti, il V Postulato si distingue per la complessità del suo enunciato e per la costruzione geometrica. Di tale difficoltà erano consapevoli già i primi commentatori all'opera euclidea: il dibattito sulla validità del V Postulato si è protratto per oltre duemila anni e ha avuto come estrema conseguenza la costruzione delle geometrie non euclidee, cioè di geometrie basate su un sistema assiomatico diverso da quello di Euclide.
In prima istanza si tentò di risolvere le difficoltà legate al V Postulato cercando di dimostrarlo a partire dai primi quattro: in questo modo, il V Postulato sarebbe stato dedotto come un teorema. In tale direzione ricordiamo l'opera di Girolamo Saccheri (1667-1733), il quale dette inconsapevolmente un contributo fondamentale allo sviluppo delle geometrie non euclidee.

Tuttavia i numerosi tentativi compiuti in questa direzione si dimostrarono sempre fallimentari: ciò nonostante i matematici fino al XIX secolo, non dubitarono mai della validità del V Postulato.
Nella prima metà del XIX secolo i matematici Bolyai e Lobačevskij furono i primi a costruire una geometria non euclidea, ottenuta sostituendo il V Postulato con la sua negazione (geometria iperbolica). Nella geometria iperbolica, dati una retta e un punto esterno a essa, esistono infinite rette passanti per il punto dato che non intersecano la retta.
Oltre alla geometria iperbolica furono costruite altre geometrie non euclidee, dette geometria sferica e geometria ellittica.
Per dimostrare che le geometrie non-euclidee sono coerenti tanto quanto quella euclidea, si ricorre all'uso di modelli che consentono di interpretare i risultati non euclidei per mezzo delle proprietà di particolari enti euclidei. In particolare i modelli di Poincaré e di Riemann possono essere utilizzati per visualizzare, rispettivamente, le proprietà delle geometrie iperbolica e sferica.

Per esercitarti ancora sugli argomenti affrontati nel	Svolgi sui *Corsi blu**
Problema 1	• Esercizio 116 pag. V 52 (2° caso) • Esercizio 219 pag. V 194 • Problema 8 pag. V 215 (punto b) • Esercizio 99 pag. V 249 • Esercizio 104 pag. V 250 • Problema 19 pag. W 138 (punti a e b)
Problema 2	• Problema 1 pag. α1 48 (punti a, b) • Esercizio 15 pag. ι 23 • Esercizio 56 pag. ι 28 • Problema 13 pag. W 138
Quesito 1	• Esercizio 156 pag. W 113 • Esercizio 157 pag. W 113
Quesito 2	• Esercizio 119 pag. S 149
Quesito 3	• Test 9 pag. α 93
Quesito 4	• Quesito 1 pag. π 96 • Quesito 2 pag. π 142 • Quesito 3 pag. π 142
Quesito 6	• Esercizio 38 pag. ι 25 • Quesito 8 pag. ι 62
Quesito 7	• Esercizio 117 pag. α 34 • Esercizio 121 pag. α 34
Quesito 8	• Esercizio 41 pag. β 48 • Esercizio 42 pag. β 48
Quesito 9	• Esercizio 97 pag. π 82 • Esercizio 99 pag. π 82
Quesito 10	• Esercizio 25 pag. ω 34 • Esercizio 99 pag. ω 34

Sul sito **www.zanichelli.it/materiali/provamatematica** trovi i testi e gli svolgimenti della prova assegnata nella sessione suppletiva.

* I *Corsi blu* di matematica di Bergamini, Trifone e Barozzi sono presentati in terza di copertina.