ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO SPERIMENTALE
Tema di: MATEMATICA
a. s. 2007-2008

PROBLEMA 1

Siano dati un cerchio di raggio r ed una sua corda AB uguale al lato del quadrato in esso inscritto.

1. Detto P un generico punto della circonferenza, giacente sull'arco maggiore di estremi A e B, si consideri il rapporto: $\dfrac{\overline{PA}^2+\overline{PB}^2}{\overline{AB}^2}$ e lo si esprima in funzione di $x = \tan P\hat{A}B$

2. Si studi la funzione f(x) così ottenuta e si tracci il suo grafico γ, indipendentemente dai limiti posti dal problema geometrico.

3. Detto C il punto d'intersezione della curva γ con il suo asintoto orizzontale, si scriva l'equazione della tangente a γ in C.

4. Si calcoli l'area della parte finita di piano compresa tra la curva γ, la suddetta tangente e la retta di equazione x = k, essendo k l'ascissa del punto di massimo relativo.

PROBLEMA 2

Si consideri la funzione:

$$y = a\sin^2(x) + b\sin(x) + c$$

1. Si determinino a, b, c, in modo che il suo grafico γ passi per A(0,2), per B(π/6,0) ed abbia in B tangente parallela alla retta $3\sqrt{3}x + 2y - 5 = 0$.

2. Si rappresenti graficamente la curva γ nell'intervallo 0 ≤ x ≤ 2π.

3. Si calcoli il valore dell'area di ciascuna delle due parti di piano compresa fra la retta y=2 e la curva stessa.

4. Tra tutte le primitive della funzione data, si determini quella il cui grafico passa per P(0,6) e si scriva l'equazione della retta ad esso tangente in detto punto.

QUESTIONARIO

1) Si determinino le costanti a e b in modo tale che la funzione:

$$f(x)=\begin{cases} ax+b & x\le 0 \\ \dfrac{e^x-1}{x} & x>0 \end{cases}$$

risulti continua e derivabile nel punto x=0.

2) Un meteorite cade sulla Terra; qual è la probabilità che il punto d'incontro si trovi fra l'equatore e il tropico del Cancro (latitudine λ = 23° 27' nord)?

3) Si determini il numero reale positivo λ in modo che la curva rappresentativa della funzione $g(x)=e^{-\lambda x}$ divida in parti equiestese la regione delimitata dalla curva rappresentativa della funzione $f(x)=e^{\lambda x}$, dall'asse x e dalle rette x = 0 e x = 1.

4) Si determini la probabilità che, lanciando 8 volte una moneta non truccata, si ottenga 4 volte testa.

5) Si dimostri che l'equazione $(3-x)e^x-3=0$ per x>0 ha un'unica radice reale e se ne calcoli un valore approssimato con due cifre decimali esatte.

6) Si dimostri che il volume del cilindro equilatero inscritto in una sfera di raggio r è medio proporzionale fra il volume del cono equilatero inscritto e il volume della sfera.

7) Si calcoli il valore medio della funzione $y=\arccos\left(\sqrt{1-x^2}\right)$ nell'intervallo $0\le x\le 1$

8) In un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani sono assegnati i punti A(0,1), B(0,4). Si determini sul semiasse positivo delle ascisse un punto C dal quale il segmento AB è visto con un angolo di massima ampiezza.

9) Si scriva l'equazione della tangente al diagramma della funzione: $\int_1^{\sqrt{\ln x}}\frac{e^t}{t^2}dt$ nel punto P di ascissa x = e.

10) Tenuto conto che:

$$\frac{\pi}{6}=\int_0^{1/2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

si calcoli un'approssimazione di π, utilizzando uno dei metodi d'integrazione numerica studiati.

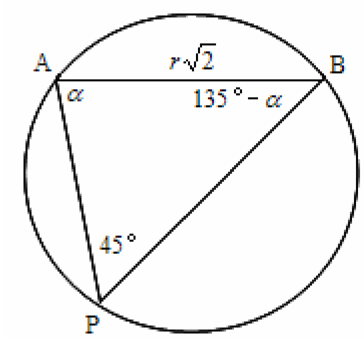
PROBLEMA 1

Siano dati un cerchio di raggio r ed una sua corda AB uguale al lato del quadrato in esso inscritto.

Punto 1

Detto P un generico punto della circonferenza, giacente sull'arco maggiore di estremi A e B, si consideri il rapporto: $\dfrac{\overline{PA}^2+\overline{PB}^2}{\overline{AB}^2}$ **e lo si esprima in funzione di** $x=\tan P\hat{A}B$

Il quadrato inscritto nella circonferenza ha la diagonale pari al diametro $2r$, cui corrisponde il lato di lunghezza $\frac{2r}{\sqrt{2}}=r\sqrt{2}$. Quindi $AB=r\sqrt{2}$. Inoltre per il teorema della corda $AB=2r\cdot\sin\left(A\hat{P}B\right)$ per cui $\sin\left(A\hat{P}B\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ cui corrisponde $A\hat{P}B=45°$ (supponendo che $A\hat{P}B$ sia acuto, assunzione che non lede la generalità della discussione che porteremo avanti); per differenza, posto $P\hat{A}B=\alpha$, $A\hat{B}P=135°-\alpha$ come rappresentato nella figura sottostante:



Sempre per il teorema della corda si ha:

$PB=2r\sin(\alpha), PA=2r\sin(135°-\alpha)=2r[\sin(135°)\cos(\alpha)-\cos(135°)\sin(\alpha)]=r\sqrt{2}[\cos(\alpha)+\sin(\alpha)]$. In tal modo

$$AB^2=2r^2$$
$$PB^2=4r^2\sin^2(\alpha)$$
$$PA^2=2r^2[1+\sin(2\alpha)]$$

per cui

$$f(\alpha)=\frac{\overline{PA}^2+\overline{PB}^2}{\overline{AB}^2}=1+\sin(2\alpha)+2\sin^2(\alpha)=1+\sin(2\alpha)+(1-\cos(2\alpha))=2+\sin(2\alpha)-\cos(2\alpha)$$

Sfruttando le identità goniometriche per cui $\sin(2\alpha)=\frac{2\tan(\alpha)}{1+\tan^2(\alpha)},\cos(2\alpha)=\frac{1-\tan^2(\alpha)}{1+\tan^2(\alpha)}$, la funzione diventa $f(x)=2+\frac{2x}{1+x^2}-\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)=\frac{3x^2+2x+1}{1+x^2}$.

<u>*Punto 2*</u>

Si studi la funzione f(x) così ottenuta e si tracci il suo grafico γ, indipendentemente dai limiti posti dal problema geometrico.

Studiamo la funzione $f(x)=\frac{3x^2+2x+1}{1+x^2}$

Dominio: R

Intersezioni asse ascisse: $f(x)=\frac{3x^2+2x+1}{1+x^2}=0 \Rightarrow 3x^2+2x+1=0 \Rightarrow x=\frac{-1\pm i\sqrt{2}}{3}$ per cui non ci sono intersezioni con l'asse delle ascisse

Intersezioni asse ordinate: $x=0 \Rightarrow f(0)=1$

Eventuali simmetrie: la funzione non è né pari né dispari

Positività: $f(x)=\frac{3x^2+2x+1}{1+x^2}>0 \ \ \forall x \in R$

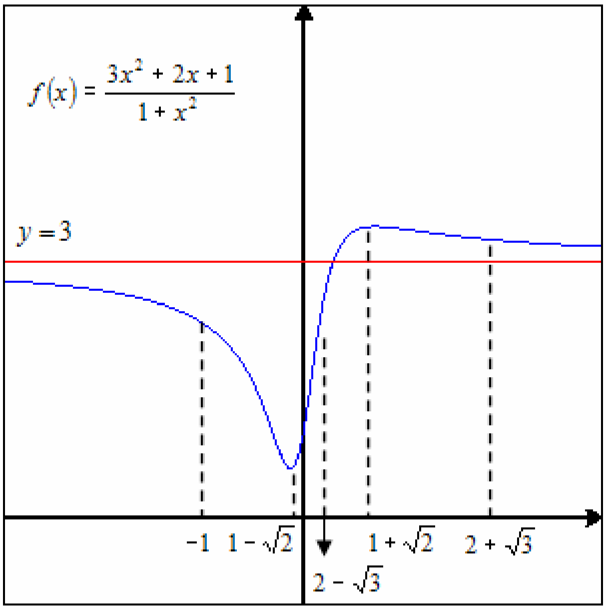
Asintoti verticali: non ce ne sono

Asintoti orizzontali: $\lim_{t\to\pm\infty}\left(\frac{3x^2+2x+1}{1+x^2}\right)=3$ per cui la retta $y=3$ è asintoto orizzontale

Crescenza e decrescenza: $f'(x)=\frac{(6x+2)(1+x^2)-(2x)(3x^2+2x+1)}{(1+x^2)^2}=\frac{-2(x^2-2x-1)}{(1+x^2)^2}$ per cui la funzione è strettamente crescente in $(1-\sqrt{2},1+\sqrt{2})$, strettamente decrescente in $(-\infty,1-\sqrt{2})\vee(1+\sqrt{2},+\infty)$ e si annulla in $x=1-\sqrt{2}$ in cui presenta un minimo relativo $m(1-\sqrt{2},2-\sqrt{2})$ed in $x=1+\sqrt{2}$ in cui presenta un massimo relativo $M(1+\sqrt{2},2+\sqrt{2})$.

Concavità e convessità: $f''(t)=\frac{4(x+1)(x^2-4x+1)}{(1+x^2)^3}$ per cui la funzione presenta tre flessi alle ascisse $x_1=-1, x_2=2-\sqrt{3}, x_3=2+\sqrt{3}$.

Il grafico è di seguito presentato:



Punto 3

Detto C il punto d'intersezione della curva γ con il suo asintoto orizzontale, si scriva l'equazione della tangente a γ in C.

Il punto C è dato dal la risoluzione dell'equazione $\frac{3x^2+2x+1}{1+x^2}=3$ da cui si ricava $C(1,3)$.

L'equazione della tangente in C è $y=m(x-1)+3$ con $m=f'(1)=\left[\frac{-2(x^2-2x-1)}{(1+x^2)^2}\right]_{x=1}=1$

pertanto la tangente è $y=x+2$.

Punto 4

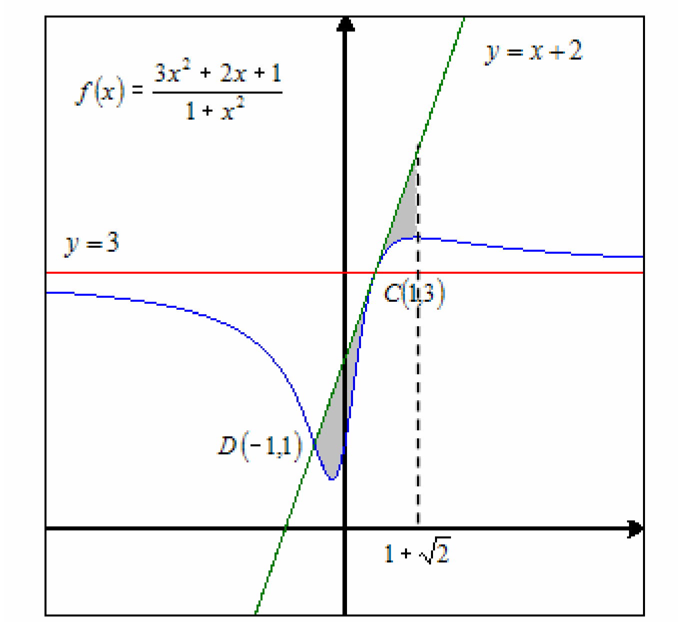
Si calcoli l'area della parte finita di piano compresa tra la curva γ, la suddetta tangente e la retta di equazione x = k, essendo k l'ascissa del punto di massimo relativo.

Calcoliamo l'intersezione della curva con la tangente: bisogna risolvere l'equazione

$\frac{3x^2+2x+1}{1+x^2}=x+2$ e cioè $x^3-x^2-x+1=(x-1)^2(x+1)=0 \Rightarrow x=1, x=-1$.

Quindi l'ulteriore intersezione è $D(-1,1)$.

L'area da calcolare è raffigurata in grigio sotto:



L'area vale

$$Area = \int_{-1}^{1+\sqrt{2}} \left[x + 2 - \left(\frac{3x^2 + 2x + 1}{1 + x^2} \right) \right] dx =$$

$$= \int_{-1}^{1+\sqrt{2}} \left[x + 2 - \left(3 + \frac{2x}{1 + x^2} - \frac{2}{1 + x^2} \right) \right] dx =$$

$$= \int_{-1}^{1+\sqrt{2}} \left[x - 1 - \frac{2x}{1 + x^2} + \frac{2}{1 + x^2} \right] dx =$$

$$= \left[\frac{(x-1)^2}{2} - \ln(x^2 + 1) + 2\arctan(x) \right]_{-1}^{1+\sqrt{2}} =$$

$$= \left[1 - \ln(4 + 2\sqrt{2}) + 2\arctan(1 + \sqrt{2}) \right] - \left[2 - \ln(2) + 2\arctan(-1) \right] =$$

$$= 2\arctan(1 + \sqrt{2}) + 2\arctan(1) - \ln(4 + 2\sqrt{2}) + \ln(2) - 1 =$$

$$= 2 \cdot \left(\frac{3\pi}{8} \right) + 2 \cdot \left(\frac{\pi}{4} \right) - \ln(2 + \sqrt{2}) - 1 =$$

$$= \frac{5\pi}{4} - \ln(2 + \sqrt{2}) - 1$$

PROBLEMA 2

Si consideri la funzione: $y = a\sin^2(x) + b\sin(x) + c$

<u>*Punto 1*</u>

Si determinino a, b, c, in modo che il suo grafico γ passi per A(0,2), per B(π/6,0) ed abbia in B tangente parallela alla retta $3\sqrt{3}x + 2y - 5 = 0$**.**

Il passaggio per A(0,2) comporta subito $c = 2$; il passaggio per B(π/6,0) comporta $\frac{a}{4} + \frac{b}{2} + 2 = 0 \Rightarrow a = -2b - 8$. La derivata della funzione $y = a\sin^2(x) + b\sin(x) + c$ è $y' = a\sin(2x) + b\cos(x)$ e $y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}(a+b)$ per cui la terza condizione di tangente in B(π/6,0) parallela alla retta $3\sqrt{3}x + 2y - 5 = 0$ si traduce in $y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}(a+b) = -\frac{3\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a + b = -3$.

Queste condizioni comportano i seguenti parametri incogniti:

$$\begin{cases} a = 2 \\ b = -5 \Rightarrow y = 2\sin^2(x) - 5\sin(x) + 2 = (1 - 2\sin(x))(2 - \sin(x)) \\ c = 2 \end{cases}$$

<u>*Punto 2*</u>

Si rappresenti graficamente la curva γ nell'intervallo 0 ≤ x ≤ 2π.

Studiamo la funzione $f(x) = (1 - 2\sin(x))(2 - \sin(x))$ in $[0, 2\pi]$

Dominio: $[0, 2\pi]$

Intersezioni asse ascisse:

$$f(x) = (1 - 2\sin(x))(2 - \sin(x)) = 0 \Rightarrow \sin(x) = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}, x = \frac{5\pi}{6}$$

Intersezioni asse ordinate: $x = 0 \Rightarrow f(0) = 2$

Eventuali simmetrie: la funzione non è pari né dispari

Positività: $f(x) = (1 - 2\sin(x))(2 - \sin(x)) \geq 0 \Rightarrow \sin(x) \leq \frac{1}{2} \Rightarrow 0 \leq x \leq \frac{\pi}{6} \vee \frac{5\pi}{6} \leq x \leq 2\pi$

Asintoti verticali: non ce ne sono

Asintoti orizzontali ed obliqui: non ce ne sono

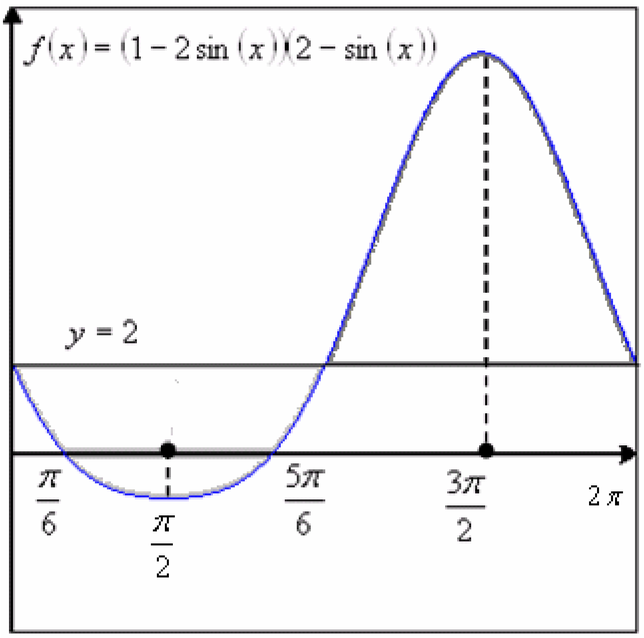
Crescenza e decrescenza: $f'(x) = 4\sin(x)\cos(x) - 5\cos(x) = -\cos(x)(5 - 4\sin(x))$.

Ora $f'(x) > 0 \Rightarrow \cos(x) < 0 \Rightarrow \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$ mentre $(5 - 4\sin(x)) > 0 \;\; \forall x \in [0, 2\pi]$ per cui la funzione è strettamente crescente in $\left]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right[$, strettamente decrescente in $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[\vee \left]\frac{3\pi}{2},2\pi\right]$ e si annulla in $x=\frac{\pi}{2}$ in cui ha un minimo relativo $m\left(\frac{\pi}{2},-1\right)$, in $x=\frac{3\pi}{2}$ in cui ha un massimo relativo $M\left(\frac{3\pi}{2},9\right)$

Concavità e convessità: $f''(x)=-8\sin^2(x)+5\sin(x)+4=0 \Rightarrow \sin(x)=\frac{5\pm 3\sqrt{17}}{16}$ per cui la funzione presenta flessi alle ascisse per cui $\sin(x)=\frac{5-3\sqrt{17}}{16}$ in quanto $\sin(x)=\frac{5+3\sqrt{17}}{16}>1$. Le ascisse dei flessi saranno:

$x=\pi+\arcsin\left(\frac{-5+3\sqrt{17}}{16}\right), x=2\pi-\arcsin\left(\frac{-5+3\sqrt{17}}{16}\right)$.

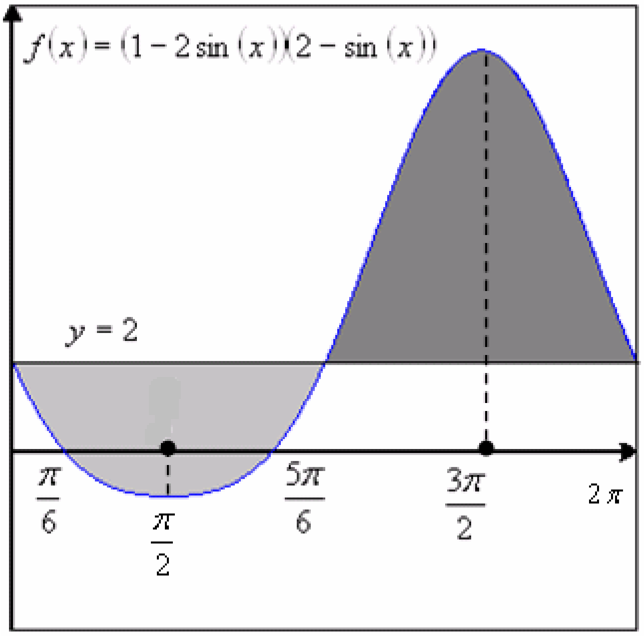
Il grafico è di seguito presentato:



<u>*Punto 3*</u>

Si calcoli il valore dell'area di ciascuna delle due parti di piano compresa fra la retta y=2 e la curva stessa.

Si consideri la figura seguente in cui le due aree sono state raffigurate in grigio chiaro e grigio scuro:



$$A_1 = \int_0^{\pi} \left[2 - \left(2\sin^2(x) - 5\sin(x) + 2\right)\right]dx =$$

$$= \int_0^{\pi} \left[-2\sin^2(x) + 5\sin(x)\right]dx = \int_0^{\pi} \left[\cos(2x) - 1 + 5\sin(x)\right]dx =$$

$$= \left[\frac{\sin(2x)}{2} - x - 5\cos(x)\right]_0^{\pi} = [-\pi + 5] - [-5] = 10 - \pi$$

$$A_2 = \int_{\pi}^{2\pi} \left[\left(2\sin^2(x) - 5\sin(x) + 2\right) - 2\right]dx =$$

$$= \int_{\pi}^{2\pi} \left[2\sin^2(x) - 5\sin(x)\right]dx = \int_{\pi}^{2\pi} \left[-\cos(2x) + 1 - 5\sin(x)\right]dx =$$

$$= \left[-\frac{\sin(2x)}{2} + x + 5\cos(x)\right]_{\pi}^{2\pi} = [2\pi + 5] - [\pi - 5] = 10 + \pi$$

Punto 4

Tra tutte le primitive della funzione data, si determini quella il cui grafico passa per P(0,6) e si scriva l'equazione della retta ad esso tangente in detto punto.

$F(x) = \int \left[\left(2\sin^2(x) - 5\sin(x) + 2\right)\right]dx = \int \left[-\cos(2x) + 3 - 5\sin(x)\right]dx = -\frac{\sin(2x)}{2} + 3x + 5\cos(x) + k$ e quella che passa per P(0,6) è $F(0) = 5 + k = 6 \Rightarrow k = 1$ da cui $F(x) = -\frac{\sin(2x)}{2} + 3x + 5\cos(x) + 1$.

L'equazione della retta tangente ad $F(x) = -\frac{\sin(2x)}{2} + 3x + 5\cos(x) + 1$ in P(0,6) è $y = mx + 6$ con

$m = F'(0) = \left[2\sin^2(x) - 5\sin(x) + 2\right]_{x=0} = 2$ per cui la retta tangente ha equazione $y = 2x + 6$.

QUESTIONARIO

Quesito 1

Si determinino le costanti a e b in modo tale che la funzione:

$$f(x)=\begin{cases} ax+b & x\le 0 \\ \dfrac{e^x-1}{x} & x>0 \end{cases}$$

risulti continua e derivabile nel punto x=0.

Affinché la funzione sia continua in $x=0$ deve aversi che $\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)$. Poiché

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(ax+b)=b$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)=1$$

la continuità in $x=0$ impone $b=1$.

La derivata della funzione è $f'(x)=\begin{cases} a & x\le 0 \\ \dfrac{xe^x-(e^x-1)}{x^2} & x>0 \end{cases}$ ed affinchè la funzione sia derivabile in $x=0$ deve aversi che $\lim_{x\to 0^-} f'(x)=\lim_{x\to 0^+} f'(x)$. Poiché

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x)=\lim_{x\to 0^-}(a)=a$$

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{xe^x-(e^x-1)}{x^2}\right)\overset{\substack{De\\ L'Hopital}}{=}\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{xe^x+e^x-e^x}{2x}\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{e^x}{2}\right)=\frac{1}{2}$$

la derivabilità in $x=0$ impone $a=\frac{1}{2}$.

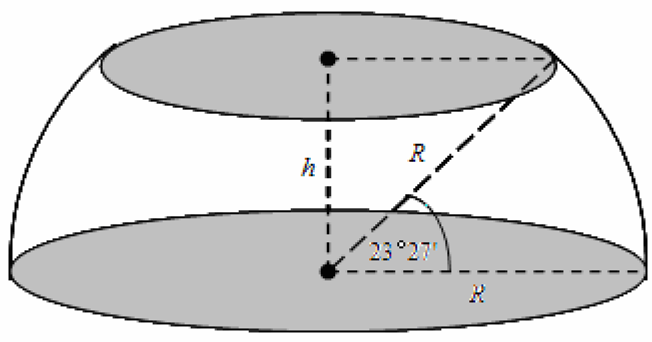
La funzione diventa allora

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{2}+1 & x\le 0 \\ \dfrac{e^x-1}{x} & x>0 \end{cases}$$

Quesito 2

Un meteorite cade sulla Terra; qual è la probabilità che il punto d'incontro si trovi fra l'equatore e il tropico del Cancro (latitudine λ = 23° 27' nord)?

Consideriamo la Terra come una sfera. Il tropico del cancro è un parallelo che si trova alla latitudine λ = 23° 27' nord rispetto all'equatore. Per questo motivo, la superficie impattata dall'asteroide è una zona sferica.



Pertanto, supponendo che la caduta degli asteroidi abbia una distribuzione uniforme, la probabilità richiesta può essere calcolata come il rapporto tra l'area della zona sferica e l'area della sfera.

L'area della sfera è $S_{Sfera} = 4\pi R^2$, mentre l'area della zona sferica di altezza *h* è $S_{\substack{Zona\\sferica}} = 2 \cdot \pi \cdot h \cdot R$ dove l'altezza è $h = R\sin(23°27')$. In tal modo la probabilità richiesta è pari a

$$p = \frac{S_{\substack{Zona\\sferica}}}{S_{Sfera}} = \frac{2 \cdot \pi \cdot h \cdot R}{4\pi R^2} = \frac{2 \cdot \pi \cdot R^2 \sin(23°27')}{4\pi R^2} = \frac{\sin(23°27')}{2} \cong 0.199 = 19{,}9\%$$

Quesito 3

Si determini il numero reale positivo λ in modo che la curva rappresentativa della funzione $g(x) = e^{-\lambda x}$ divida in parti equiestese la regione delimitata dalla curva rappresentativa della funzione $f(x) = e^{\lambda x}$, dall'asse x e dalle rette x = 0 e x = 1.

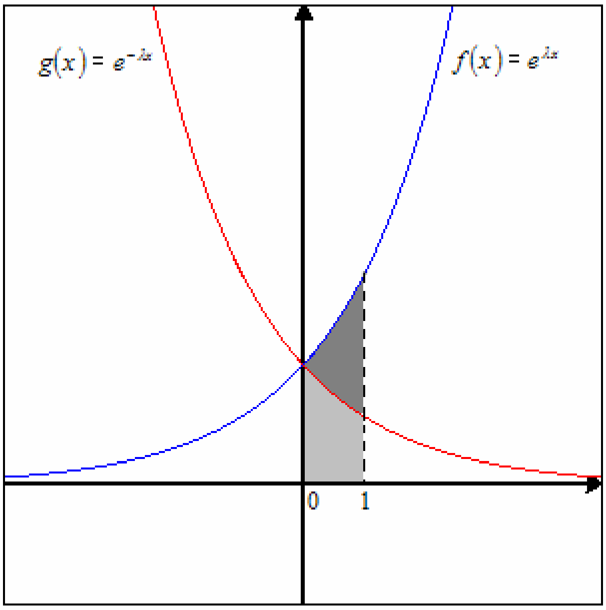
L'area sottesa dalla curva $f(x) = e^{\lambda x}$, dall'asse x e dalle rette x = 0 e x = 1 è

$$Area = \int_0^1 e^{\lambda x} dx = \left[\frac{e^{\lambda x}}{\lambda}\right]_0^1 = \frac{e^{\lambda} - 1}{\lambda}.$$

Una delle regioni (in grigio chiaro nella figura sottostante) in cui la curva $g(x) = e^{-\lambda x}$ suddivide la regione delimitata dalla curva $f(x) = e^{\lambda x}$, dall'asse x e dalle rette x = 0 e x = 1 ha area

$$Area = \int_0^1 e^{-\lambda x} dx = \left[-\frac{e^{\lambda x}}{\lambda}\right]_0^1 = \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda}.$$

Imponendo $\frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda} = \frac{1}{2}\left(\frac{e^{\lambda} - 1}{\lambda}\right)$, poiché per ipotesi $\lambda > 0$, si ha l'equazione $e^{\lambda} + 2e^{-\lambda} - 3 = 0$ da cui $e^{2\lambda} - 3e^{\lambda} + 2 = (e^{\lambda} - 1)(e^{\lambda} - 2) = 0$ e cioè $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \ln 2$. Dovendo essere $\lambda > 0$, la soluzione accettabile è $\lambda_2 = \ln 2$.



Quesito 4

Si determini la probabilità che, lanciando 8 volte una moneta non truccata, si ottenga 4 volte testa.

Poiché la moneta non è truccata, la probabilità che esca testa è uguale alla probabilità che esca croce, per cui $P(C) = P(T) = \frac{1}{2}$. Applicando la legge binomiale, la probabilità richiesta sarà

$$p = \binom{8}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \binom{8}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{8!}{4!\cdot 4!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{70}{256} = \frac{35}{128}.$$

Quesito 5

Si dimostri che l'equazione $(3-x)e^x - 3 = 0$ per x>0 ha un'unica radice reale e se ne calcoli un valore approssimato con due cifre decimali esatte.

Indichiamo con $h(x) = (3-x)e^x - 3$. Tale funzione è definita, continua e derivabile in tutto R. La sua derivata è $h'(x) = (3-x)e^x - e^x = (2-x)e^x$ per cui sarà strettamente crescente in $(-\infty,2)$, strettamente decrescente in $(2,+\infty)$ e si annulla in $x = 2$ in cui presenta un massimo $M(2, e^2 - 3)$.

Visto che $h(0) = 0$ e che in (0,2) la funzione è strettamente crescente, in tale intervallo la funzione non si annullerà. Invece, poiché $h(2) = e^2 - 3 > 0$ e $h(+\infty) = -\infty$ e dal momento che in $(2,+\infty)$ la funzione è strettamente decrescente, per il primo teorema degli zeri $h(x) = (3-x)e^x - 3$ in $(2,+\infty)$ si annullerà una ed una sola volta. In conclusione in $(0,+\infty)$ la funzione $h(x) = (3-x)e^x - 3$ presenta un unico zero reale. Per il calcolo dello zero possiamo applicare uno dei metodi numerici noti, come il metodo di bisezione o quello delle tangenti o quello delle secanti.

Visto che $h(2) = e^2 - 3 > 0, h(3) = -3 < 0$, tale zero si troverà in (2,3). Calcoliamolo applicando il metodo delle tangenti di punto iniziale $x_0 = 3$, in quanto in [2,3] la derivata seconda di $h(x) = (3 - x)e^x - 3$ è sempre negativa essendo $h''(x) = (1 - x)e^x$, per cui $h(3) \cdot h''(3) > 0$.

Sviluppando tale metodo si ha:

$$x_1 = x_0 - \frac{h(x_0)}{h'(x_0)} = 3 - \frac{3}{e^3} \cong 2.8506$$

$$x_2 = x_1 - \frac{h(x_1)}{h'(x_1)} \cong 2.8223$$

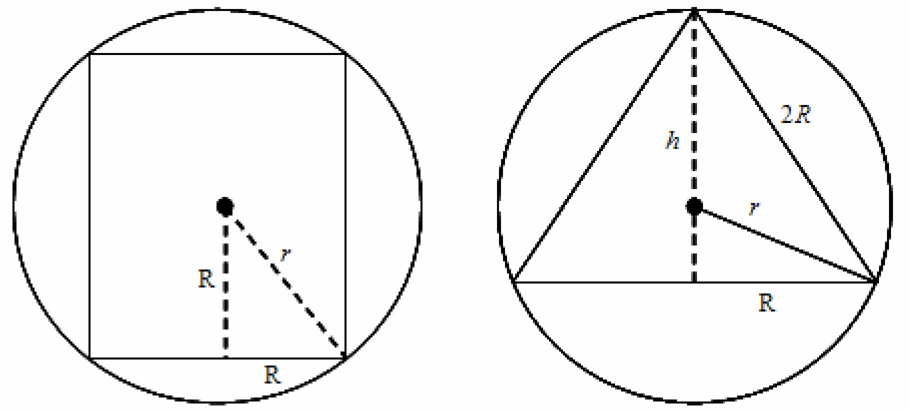
$$x_3 = x_2 - \frac{h(x_2)}{h'(x_2)} \cong 2.8214$$

Poiché $|x_3 - x_2| < \frac{1}{100}$, un'approssimazione con due cifre decimali esatte è $\bar{x} = 2.82$.

Quesito 6

Si dimostri che il volume del cilindro equilatero inscritto in una sfera di raggio r è medio proporzionale fra il volume del cono equilatero inscritto e il volume della sfera.

Consideriamo la figura sottostante:



Un cilindro equilatero ha altezza pari al diametro di base. Indicato con R il raggio di base del cilindro si ha $r = R\sqrt{2}$; il volume del cilindro sarà allora $V_{Cilindro} = \pi \cdot R^2 \cdot h = \pi \cdot R^2 \cdot (2R) = 2\pi \cdot R^3 = 2\pi \cdot \left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right)^3 = \frac{\pi r^3}{\sqrt{2}}$.

Il cono equilatero ha l'apotema pari al diametro di base $2R$, per cui avrà altezza $h = \sqrt{(2R)^2 - R^2} = R\sqrt{3}$. Inoltre in un triangolo equilatero il punto di incontro delle altezze coincide con quello delle mediane e delle bisettrici e le due parti in cui l'altezza è divisa sono l'una doppia dell'altra, per cui $r = \frac{2h}{3} = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$ da cui $R = \frac{r\sqrt{3}}{2}$; il volume del cono sarà allora

$$V_{Cono} = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot h}{3} = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot \left(R\sqrt{3}\right)}{3} = \frac{\pi \cdot R^3\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi\sqrt{3}}{3} \cdot \left(\frac{r\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{3\pi r^3}{8}.$$

Il volume della sfera è $V_{Sfera} = \frac{4\pi r^3}{3}$, per cui $V_{Sfera} \cdot V_{Cono} = \frac{4\pi r^3}{3} \cdot \frac{3\pi r^3}{8} = \left(\frac{\pi r^3}{\sqrt{2}}\right)^2 = \left(V_{Cilindro}\right)^2$ c.v.d

Quesito 7

Si calcoli il valore medio della funzione $y = \arccos\left(\sqrt{1-x^2}\right)$ nell'intervallo $0 \le x \le 1$

Il valore medio di una funzione $f(x)$ in un intervallo chiuso e limitato [a,b] è $V_M = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.

In tal caso si ha $V_M = \int_0^1 \arccos\left(\sqrt{1-x^2}\right)dx$ ed applicando l'integrazione per parti troviamo:

$$V_M = \left[x\arccos\left(\sqrt{1-x^2}\right)\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{x \cdot \left(-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)}{\sqrt{1-\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2}}dx =$$

$$= \left[x\arccos\left(\sqrt{1-x^2}\right)\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{x \cdot \left(-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)}{x}dx =$$

$$= \left[x\arccos\left(\sqrt{1-x^2}\right)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx =$$

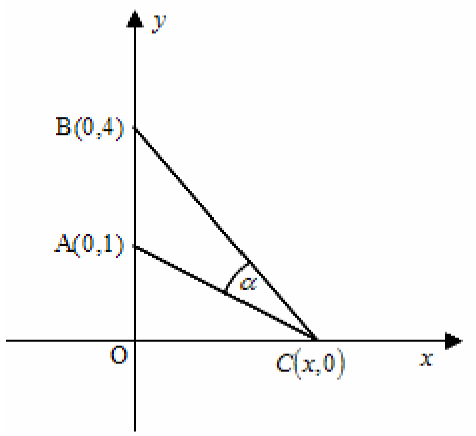
$$= \left[x\arccos\left(\sqrt{1-x^2}\right)\right]_0^1 + \left[\sqrt{1-x^2}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2} - 1$$

avendo sfruttato che in [0,1] $\sqrt{x^2} = x$.

Quesito 8

In un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani sono assegnati i punti A(0,1), B(0,4). Si determini sul semiasse positivo delle ascisse un punto C dal quale il segmento AB è visto con un angolo di massima ampiezza.

Si consideri la figura sottostante:



Il punto C ha coordinate generiche $C(x,0)$ con $x>0$ dovendo appartenere all'asse delle ascisse positive e l'angolo $\alpha \in (0°,90°)$. I lati del triangolo ABC misurano $AC=\sqrt{x^2+1}, BC=\sqrt{x^2+16}$ per cui la sua area sarà pari a $S(ABC)=\frac{1}{2}\cdot AC\cdot BC\cdot \sin(\alpha)=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{x^2+1}\cdot\sqrt{x^2+16}\cdot\sin(\alpha)=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{x^4+17x^2+16}\cdot\sin(\alpha)$. Ma tale area è anche pari a $S(ABC)=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot OC=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot x=\frac{3x}{2}$. Uguagliando le due aree si ha $\sin(\alpha)=\frac{3x}{\sqrt{x^4+17x^2+16}}$. Massimizzare l'angolo $\alpha \in (0°,90°)$ è equivalente a massimizzare la funzione $\sin(\alpha)$ visto che in $(0°,90°)$ essa è strettamente crescente. La massimizzazione della funzione $\sin(\alpha)=f(x)=\frac{3x}{\sqrt{x^4+17x^2+16}}$ la effettuiamo tramite derivate e si ha:

$$f'(x)=\frac{3\sqrt{x^4+17x^2+16}-3x\left(\frac{4x^3+34x}{2\sqrt{x^4+17x^2+16}}\right)}{x^4+17x^2+16}=\frac{3(x^4+17x^2+16)-3x(2x^3+17x)}{(x^4+17x^2+16)^{3/2}}=$$
$$=\frac{3(16-x^4)}{(x^4+17x^2+16)^{3/2}}=\frac{3(4-x^2)(4+x^2)}{(x^4+17x^2+16)^{3/2}}$$

e per $x>0$ la funzione $\sin(\alpha)=f(x)=\frac{3x}{\sqrt{x^4+17x^2+16}}$ è strettamente crescente in (0,2), strettamente decrescente in $(2,+\infty)$ e si annulla in $x=2$ in cui presenta il massimo $M\left(2,\frac{3}{5}\right)$. In conclusione il punto C che massimizza l'ampiezza dell'angolo α è $C(2,0)$ cui corrisponde $\alpha=\arcsin\left(\frac{3}{5}\right)\cong 36°52'$.

Quesito 9

Si scriva l'equazione della tangente al diagramma della funzione: $\int_1^{\sqrt{\ln x}} \frac{e^t}{t^2}dt$ nel punto P di ascissa x = e.

All'ascissa $x = e$ la funzione vale $\int_1^{\sqrt{\ln e}} \frac{e^t}{t^2}dt = \int_1^1 \frac{e^t}{t^2}dt = 0$ e il punto P è $(e,0)$ e la tangente in esso ha generica equazione $y = m(x-e)$. La funzione $f(x) = \int_1^{\sqrt{\ln x}} \frac{e^t}{t^2}dt$ per il teorema fondamentale del calcolo integrale, ha derivata $f'(x) = \frac{e^{\sqrt{\ln x}}}{\left(\sqrt{\ln x}\right)^2} \cdot \frac{d\left(\sqrt{\ln x}\right)}{dx} = \frac{e^{\sqrt{\ln x}}}{2x(\ln x)^{\frac{3}{2}}}$ pertanto $m = f'(e) = \frac{e^{\sqrt{\ln e}}}{2e(\ln e)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2}$ da cui la tangente $y = \frac{1}{2}(x-e)$.

Quesito 10

Tenuto conto che:

$$\frac{\pi}{6} = \int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

si calcoli un'approssimazione di π, utilizzando uno dei metodi d'integrazione numerica studiati.

Una procedura per calcolare il valore π si basa sull'integrazione numerica attraverso il metodo dei rettangoli, dei trapezi o di Cavalieri Simpson. Scegliendo di suddividere l'ampiezza dell'intervallo $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ in 4 intervallini di uguale ampiezza $\frac{1}{8}$, ponendo $g(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, si ha:

- **Metodo dei rettangoli:**

$$\pi = 6\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \cong 6 \cdot \left\{ \frac{b-a}{n}\left[g(x_0)+g(x_1)+g(x_2)+g(x_3)\right]\right\} =$$

$$= 6\left\{ \frac{b-a}{n}\left[g(0)+g\left(\frac{1}{8}\right)+g\left(\frac{1}{4}\right)+g\left(\frac{3}{8}\right)\right]\right\} =$$

$$= \frac{6}{8}\left[1+\frac{8}{3\sqrt{7}}+\frac{4}{\sqrt{15}}+\frac{8}{\sqrt{55}}\right] \cong 3.0896$$

- **Metodo dei trapezi:**

$$\pi = 6\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \cong 6\cdot\left\{\frac{b-a}{n}\left[\frac{g(x_0)+g(x_4)}{2}+g(x_1)+g(x_2)+g(x_3)\right]\right\} =$$

$$= 6\left\{\frac{b-a}{n}\left[\frac{g(0)+g\left(\frac{1}{2}\right)}{2}+g\left(\frac{1}{8}\right)+g\left(\frac{1}{4}\right)+g\left(\frac{3}{8}\right)\right]\right\} =$$

$$= \frac{6}{8}\left[\frac{1+\frac{2}{\sqrt{3}}}{2}+\frac{8}{3\sqrt{7}}+\frac{4}{\sqrt{15}}+\frac{8}{\sqrt{55}}\right] \cong 3.1476$$

- **Metodo di Cavalieri Simpson:**

$$\pi = 6\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \cong 6\cdot\left\{\frac{b-a}{n}\left[\frac{g(x_0)+g(x_4)}{3}\right]+\frac{4}{3}\left[g(x_1)+g(x_3)\right]+\frac{2}{3}g(x_2)\right\} =$$

$$= 6\left\{\frac{b-a}{n}\left[\frac{g(0)+g\left(1/2\right)}{3}\right]+\frac{4}{3}\left[g\left(\frac{1}{8}\right)+g\left(\frac{3}{8}\right)\right]+\frac{2}{3}g\left(\frac{1}{4}\right)\right\} =$$

$$= \frac{6}{8}\left[\frac{1+\frac{2}{\sqrt{3}}}{3}+\frac{4}{3}\left(\frac{8}{3\sqrt{7}}+\frac{8}{\sqrt{55}}\right)+\frac{2}{3}\left(\frac{4}{\sqrt{15}}\right)\right] \cong 3.1417$$

Si nota che il metodo che consente di calcolare un valore di più vicino a quello reale è il metodo di Cavalieri Simpson.