2008 – Corso sperimentale – Sessione straordinaria

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 dei 10 quesiti del questionario.

Problema 1

Con riferimento ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), si trattino le seguenti questioni:

1. Si costruisca il grafico γ della funzione $f(x)=2(2-x)\sqrt{x^2-1}$
2. Si determini il volume del solido generato, in una rotazione completa intorno all'asse x, dalla superficie piana, finita, delimitata da γ e dall'asse x.
3. La retta $x=2$ seca l'iperbole equilatera di equazione $x^2-y^2=1$ nei punti A e B. Si inscriva nel segmento iperbolico di base AB il rettangolo di area massima. A tal fine, si indichi con x l'ascissa dei vertici del generico rettangolo, inscritto nel segmento iperbolico, appartenenti all'iperbole e si utilizzi la curva γ.
4. Si calcoli il volume del solido che ha per base il segmento iperbolico prima considerato e tale che, tagliato con piani paralleli ad AB, dia tutte sezioni esagonali regolari.

Problema 2

Si consideri la funzione $f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x^2-1}} & \text{per } |x|<1 \\ 0 & \text{per } |x|\geq 1 \end{cases}$

1. Si dica se questa funzione è continua nei punti in cui $|x|=1$.
2. Si studi tale funzione e si tracci il suo grafico γ, su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy).
3. Si scriva l'equazione della normale a γ nel punto di ascissa $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$.
4. Utilizzando uno dei metodi di integrazione numerica studiati, si calcoli un valore approssimato dell'area della superficie piana, delimitata dalla curva γ e dall'asse delle x.

Questionario

1. Fra le piramidi quadrangolari regolari di data area laterale s, si determini quella di volume massimo.
2. Si calcoli il limite della funzione $\frac{\log \operatorname{sen} x}{\log \operatorname{tg} x}$, quando x tende a 0.
3. Si provi se per la funzione $f(x)=|x+1|-2x$, nell'intervallo $[-2,3]$, sono verificate le condizioni previste per la validità del teorema di Lagrange e, in caso affermativo, si trovi il punto in cui si verifica la tesi del teorema stesso.
4. Si determini il campo di esistenza della funzione $y=\left(x^2+3x\right)^{\sqrt{-2-x}}$
5. Siano dati un triangolo equilatero, il cerchio in esso inscritto e il triangolo equilatero inscritto nel cerchio. Si scelga a caso un punto all'interno del triangolo maggiore: si determini la probabilità che tale punto risulti interno al triangolo minore.
6. Alla prova orale di un concorso sono stati ammessi 9 maschi e 7 femmine. Sappiamo che saranno assunte 5 persone. Qual è la probabilità che siano assunti 2 maschi e 3 femmine?
7. Si dimostri che l'equazione $\log x+x=0$ ha un'unica radice reale e se ne calcoli un valore approssimato con due cifre decimali esatte.
8. Si determinino le equazioni degli asintoti della curva: $f(x)=\int_1^x te^t\,dt$
9. Il toro è il solido di rotazione, ottenuto facendo ruotare un cerchio di raggio r di un giro completo attorno ad un asse, che abbia dal centro del cerchio generatore una distanza $a>r$. Si calcolino l'area e il volume del toro.
10. Un segmento AB di lunghezza costante a scorre coi suoi estremi sopra due rette ortogonali fisse x, y. Si dimostri che un punto P qualsiasi del segmento descrive una ellisse avente gli assi sopra x, y. Che cosa succede se P è il punto medio di AB?

PROBLEMA1

Punto 1

Studiamo la funzione $f(x) = 2(2-x)\sqrt{x^2-1}$

- *Dominio*: $x^2 - 1 \geq 0 \Rightarrow x \in \left]-\infty,-1\right] \cup \left[1,+\infty\right[$
- *Intersezioni asse ascisse*: $f(x) = 2(2-x)\sqrt{x^2-1} = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2-x=0 \\ x^2-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=\pm 1 \end{cases}$ da cui deduciamo che le intersezioni con l'asse delle ascisse sono tre;
- *Intersezioni asse ordinate*: non ve ne sono in quanto $x = 0$ non appartiene al dominio;
- *Eventuali simmetrie*: la funzione non è né pari né dispari;
- *Positività*: $f(x) > 0 \Rightarrow \begin{Vmatrix} (2-x) > 0 \\ (x^2-1) > 0 \end{Vmatrix} \Rightarrow \begin{Vmatrix} x < 2 \\ x < -1 \vee x > 1 \end{Vmatrix} \Rightarrow x \in \left]-\infty,-1\right[\cup \left]1,2\right[$;
- *Asintoti verticali*: non ve ne sono in quanto $\lim_{x\to -1^-} f(x) = 0, \lim_{x \to 1^+} f(x) = 0$;
- *Asintoti orizzontali*: non ve ne sono in quanto $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \mp\infty$;
- *Asintoti obliqui*: nemmeno esistono in quanto $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$;
- *Crescenza e decrescenza*: la derivata prima è $f'(x) = 2\left[-\sqrt{x^2-1} + (2-x)\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right] = \frac{2(-2x^2+2x+1)}{\sqrt{x^2-1}}$ per cui, tenendo conto del dominio $x \in \left]-\infty,-1\right] \cup \left[1,+\infty\right[$ si ha

  $f'(x) > 0 \Rightarrow 1 < x < \frac{1+\sqrt{3}}{2}$

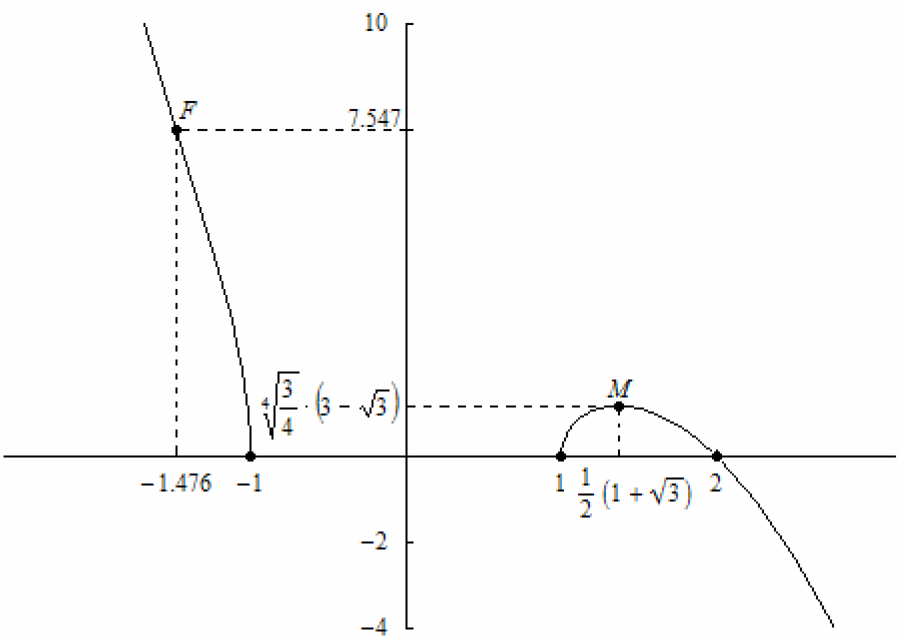
  $f'(x) < 0 \Rightarrow x < -1 \vee x > \frac{1+\sqrt{3}}{2}$

  $f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$

  Dal segno della derivata prima deduciamo che la funzione presenta un massimo relativo all'ascissa $x = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$, $M = \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}, \sqrt[4]{\frac{3}{4}}\cdot\left(3-\sqrt{3}\right)\right)$. Inoltre si deduce che la funzione non è derivabile in $x = \pm 1$.
- *Concavità e convessità*: la derivata seconda della funzione è $f''(x) = \frac{2(-2x^3+3x-2)}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}$, per cui ci saranno flessi se $g(x) = 2x^3 - 3x + 2 = 0$. Per risolvere l'equazione cubica possiamo

avvalerci del metodo di Cardano per le equazioni cubiche del tipo $x^3 + px + q = 0$. Il discriminante dell'equazione è $\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$ e nel caso in esame, con $p = -\frac{3}{2}, q = 1$ vale $\Delta = \frac{1}{8}$ e secondo i risultati del metodo di Cardano l'equazione ammette un'unica radice reale e due soluzioni complesse e coniugate. La soluzione reale è $x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} = \sqrt[3]{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}} \cong -1.476$, per cui la funzione presenterà un flesso a tangente obliqua nel punto $F = (-1.476, 7.547)$.

Il grafico è di seguito presentato:



Punto 2

Il volume richiesto è

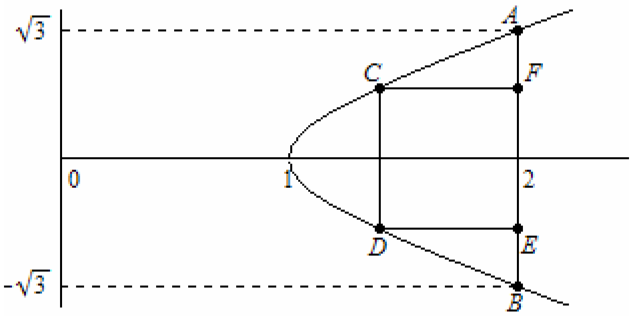
$$V = \pi \int_1^2 f^2(x)dx = \pi \int_1^2 4(2-x)^2(x^2-1)dx = 4\pi \int_1^2 (x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 4x - 4)dx =$$

$$= 4\pi \left[\frac{x^5}{5} - x^4 + x^3 + 2x^2 - 4x \right]_1^2 = 4\pi \left[\left(\frac{32}{5} - 16 + 8 + 8 - 8 \right) - \left(\frac{1}{5} - 1 + 1 + 2 - 4 \right) \right] =$$

$$= 4\pi \left(-\frac{8}{5} + \frac{9}{5} \right) = \frac{4\pi}{5}$$

Punto 3

I punti A e B hanno coordinate $A = (2, \sqrt{3}), B = (2, -\sqrt{3})$. Il rettangolo inscritto nel segmento iperbolico è di seguito presentato:



I vertici del rettangolo, posto $x \in (1,2)$, sono

$C\left(x, \sqrt{x^2-1}\right)$
$D\left(x, -\sqrt{x^2-1}\right)$
$E\left(2, -\sqrt{x^2-1}\right)$
$F\left(2, \sqrt{x^2-1}\right)$

cui corrispondono i lati $\overline{CD} = \overline{FE} = 2\sqrt{x^2-1}, \overline{CF} = \overline{DE} = (2-x)$. Di conseguenza l'area del rettangolo è $S(x) = \overline{CD} \cdot \overline{CF} = 2\sqrt{x^2-1} \cdot (2-x) = 2(2-x)\sqrt{x^2-1}$ cioè è pari alla funzione discussa al Punto 1 ed assume, secondo quanto già trovato, un massimo relativo all'ascissa $x = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$. Quindi l'area massima vale $S\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt[4]{\frac{3}{4}} \cdot \left(3-\sqrt{3}\right)$. I vertici del rettangolo di area massima sono:

$C\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}, \sqrt[4]{\frac{3}{4}}\right)$

$D\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}, -\sqrt[4]{\frac{3}{4}}\right)$

$E\left(2, -\sqrt[4]{\frac{3}{4}}\right)$

$F\left(2, \sqrt[4]{\frac{3}{4}}\right)$

Punto 4

L'equazione dell'iperbole in forma implicita è $y = \pm\sqrt{x^2-1}$; il lato della sezione esagonale regolare scaturita dall'intersezione della sezione iperbolica di base con un piano parallelo ad AB è $2y = 2\sqrt{x^2-1}$ con $x \in (1,2)$; di conseguenza l'area dell'esagono regolare, essendo formato da 6 triangoli equilateri di lato $2y = 2\sqrt{x^2 - 1}$, è $S(x) = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} l^2(x) = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot 4(x^2 - 1) = 6\sqrt{3}(x^2 - 1)$.

Integrando tale area in $(1,2)$ otteniamo un volume pari a

$$V = 6\sqrt{3}\int_1^2 (x^2 - 1)dx = 6\sqrt{3} \cdot \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_1^2 = 6\sqrt{3} \cdot \left[\left(\frac{8}{3} - 2\right) - \left(\frac{1}{3} - 1\right)\right] = 6\sqrt{3} \cdot \frac{4}{3} = 8\sqrt{3}.$$

PROBLEMA2

Punto 1

Per studiare la continuità della funzione nei punti $x = \pm 1$ calcoliamo i limiti seguenti:

$$\lim_{x \to 1^-} e^{\frac{1}{x^2-1}} = e^{\frac{1}{0^-}} = e^{-\infty} = 0$$

$$\lim_{x \to -1^+} e^{\frac{1}{x^2-1}} = e^{\frac{1}{0^-}} = e^{-\infty} = 0$$

per cui la funzione è continua nei punti di ascissa $x = \pm 1$.

Punto 2

Studiamo la funzione $g(x) = e^{\frac{1}{x^2-1}}$ con $x \in (-1,1)$.

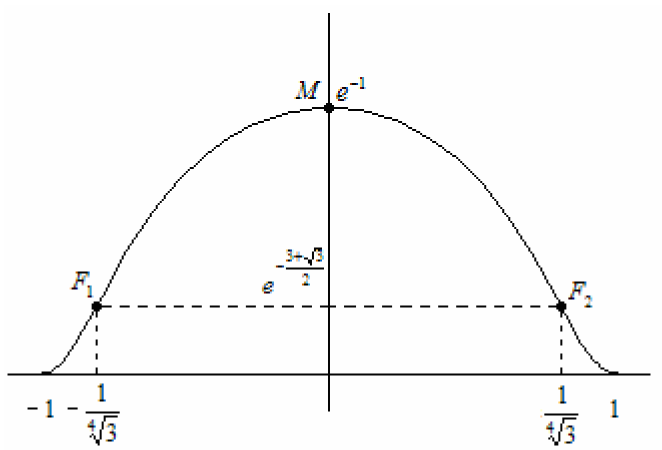
- *Dominio*: $\begin{cases} x^2 - 1 \neq 0 \\ -1 < x < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq \pm 1 \\ -1 < x < 1 \end{cases} \Rightarrow x \in (-1,1)$
- *Intersezioni asse ascisse*: non ve ne sono, in quanto la funzione è prolungabile per continuità nei punti di ascissa $x = \pm 1$ in cui si annulla, che tuttavia non appartengono al dominio $x \in (-1,1)$;
- *Intersezioni asse ordinate*: $x = 0 \Rightarrow y = e^{-1}$;
- *Eventuali simmetrie*: la funzione è pari poiché $g(-x) = g(x)$;
- *Positività*: trattandosi di una funzione esponenziale, essa è sempre positiva nel dominio di definizione;
- *Asintoti verticali*: non ve ne sono in quanto

$$\begin{array}{l} \lim_{x \to 1^-} e^{\frac{1}{x^2-1}} = e^{\frac{1}{0^-}} = e^{-\infty} = 0 \\ \lim_{x \to -1^+} e^{\frac{1}{x^2-1}} = e^{\frac{1}{0^-}} = e^{-\infty} = 0 \end{array};$$

- *Asintoti orizzontali*: non ve ne sono in quanto il dominio della funzione è $x \in (-1,1)$;
- *Asintoti obliqui*: non ve ne sono in quanto il dominio della funzione è $x \in (-1,1)$;

- *Crescenza e decrescenza*: la derivata prima è $g'(x)=e^{\frac{1}{x^2-1}}\cdot\left[\frac{-2x}{(x^2-1)^2}\right]$ per cui, tenendo conto del dominio si ha
  $g'(x)>0 \Rightarrow -1<x<0$
  $g'(x)<0 \Rightarrow 0<x<1$
  $g'(x)=0 \Rightarrow x=0$
  Dal segno della derivata prima deduciamo che la funzione presenta un massimo relativo in $M=(0,e^{-1})$.
- *Concavità e convessità*: la derivata seconda della funzione è $g''(x)=e^{\frac{1}{x^2-1}}\cdot\frac{2(3x^4-1)}{(x^2-1)^4}$, per cui ci saranno due flessi a tangente obliqua alle ascisse $x=\pm\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$, $F_1=\left(-\frac{1}{\sqrt[4]{3}},e^{-\frac{3+\sqrt{3}}{2}}\right), F_2=\left(+\frac{1}{\sqrt[4]{3}},e^{-\frac{3+\sqrt{3}}{2}}\right)$.

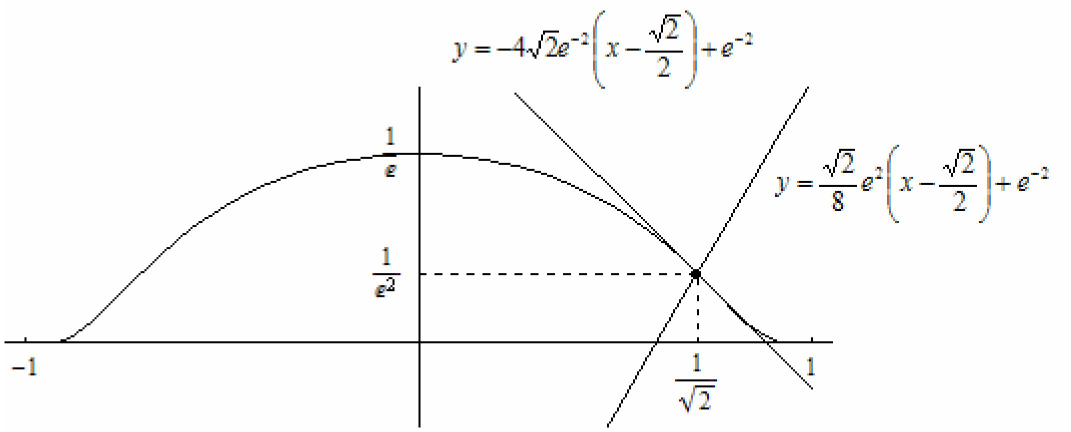
Il grafico è di seguito presentato:



Punto 3

Il punto di ascissa $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ è $P\left(\frac{1}{\sqrt{2}},e^{-2}\right)$. La retta normale è la retta perpendicolare alla retta tangente alla curva di equazione $g(x)=e^{\frac{1}{x^2-1}}$ in $P\left(\frac{1}{\sqrt{2}},e^{-2}\right)$ e quindi avrà come coefficiente angolare il reciproco cambiato di segno del coefficiente angolare della retta tangente alla curva in $P\left(\frac{1}{\sqrt{2}},e^{-2}\right)$; in particolare la tangente ha equazione

$y = g'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + e^{-2} = \left[e^{\frac{1}{x^2-1}} \cdot \frac{-2x}{\left(x^2-1\right)^2}\right]_{x=\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + e^{-2} = -4\sqrt{2}e^{-2}\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + e^{-2}$ e la normale $y = -\frac{1}{-4\sqrt{2}e^{-2}}\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + e^{-2} = \frac{\sqrt{2}}{8}e^{2}\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + e^{-2}$. Di seguito la rappresentazione nello stesso riferimento cartesiano della curva, della tangente e della normale.



Punto 4

Data la simmetria pari della funzione $g(x) = e^{\frac{1}{x^2-1}}$, l'area richiesta sarà pari a $S = 2\int_0^1 e^{\frac{1}{x^2-1}}dx$.

Scegliamo di suddividere l'intervallo $(0,1)$ in 4 intervallini di ampiezza $\frac{1}{4}$. Applicando il metodo di Cavalieri Simpson, si ha:

$$S = 2\int_0^1 e^{\frac{1}{x^2-1}}dx \cong 2\left(\frac{1-0}{4}\right) \cdot \left\{\left[\frac{g(x_0) + g(x_4)}{3}\right] + \frac{4}{3} \cdot [g(x_1) + g(x_3)] + \frac{2}{3} \cdot g(x_2)\right\} =$$

$$= 2\left(\frac{1}{4}\right) \cdot \left\{\left[\frac{g(0) + g(1)}{3}\right] + \frac{4}{3} \cdot \left[g\left(\frac{1}{4}\right) + g\left(\frac{3}{4}\right)\right] + \frac{2}{3} \cdot g\left(\frac{1}{2}\right)\right\} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{e^{-1} + 0}{3} + \frac{4}{3} \cdot \left(e^{-\frac{16}{15}} + e^{-\frac{16}{7}}\right) + \frac{2}{3} \cdot \left(e^{-\frac{4}{3}}\right)\right] \cong 0.446.$$

L'errore commesso nell'applicazione del metodo di Cavalieri Simpson è $e \le \frac{(b-a)^5}{180n^4} \cdot M$ con $M = \max\left|g^{IV}(x)\right|$ in $[a,b]$. Nel caso in esame $a = 0, b = 1, n = 4$ e $M = \max\left|g^{IV}(x)\right| \cong 8316$ per cui l'errore commesso è maggiorato da $e \le \frac{8316}{180 \cdot 256} \cong 0.18$. Infatti il valore dell'area fornito da

Mathematica è 0.443994 che differisce di circa $2 \cdot 10^{-3}$ da quello calcolato mediante il metodo di Cavalieri Simpson.

QUESTIONARIO

Quesito 1

Ognuno dei 4 triangoli isosceli che compongono la superficie laterale ha area $\frac{s}{4}$, per cui detto $l > 0$ il lato del quadrato di base, l'altezza di ogni triangolo è $h_T = \frac{s}{2l}$.

L'altezza della piramide, supposto $h_T = \frac{s}{2l} > \frac{l}{2} \Rightarrow s > l^2 \xrightarrow{l>0} 0 < l < \sqrt{s}$, di conseguenza è pari a $h = \sqrt{h_T^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{s^2}{4l^2} - \frac{l^2}{4}} = \frac{\sqrt{s^2 - l^4}}{2l}$. Il volume della piramide è allora $V(l) = \frac{A_B \cdot h}{3} = \frac{l^2 \cdot \left(\frac{\sqrt{s^2 - l^4}}{2l}\right)}{3} = \frac{l\sqrt{s^2 - l^4}}{6}$. La massimizzazione della funzione volume la effettuiamo mediante derivazione. La derivata prima è $V'(l) = \frac{1}{6}\left[\sqrt{s^2 - l^4} + l \cdot \left(\frac{-2l^3}{\sqrt{s^2 - l^4}}\right)\right] = \frac{s^2 - 3l^4}{6\sqrt{s^2 - l^4}}$ per cui, tenendo conto della limitazione $0 < l < \sqrt{s}$, si ha:

$$V'(l) > 0 \Rightarrow 0 < l < \sqrt[4]{\frac{s^2}{3}}$$

$$V'(l) < 0 \Rightarrow \sqrt[4]{\frac{s^2}{3}} < l < \sqrt{s}$$

$$V'(l) = 0 \Rightarrow l = \sqrt[4]{\frac{s^2}{3}}$$

In virtù del segno della derivata prima il volume massimo lo si ha per $l = \sqrt[4]{\frac{s^2}{3}}$ e vale $V_{\max} = \frac{s^{\frac{3}{2}}}{6}\sqrt[4]{\frac{4}{27}}$.

Quesito 2

Il limite richiesto si presenta nella forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$ per cui possiamo applicare il teorema di De L'Hospital per calcolarlo. Si ha:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\sin x}{\ln\tan x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{1}{\cos^2 x}\cdot\frac{\cos x}{\sin x}}=\lim_{x\to 0}\cos^2 x=1.$$

Alternativamente possiamo calcolarlo nel modo seguente:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\sin x}{\ln\tan x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\sin x}{\ln\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\sin x}{\ln\sin x-\ln\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1-\frac{\ln\cos x}{\ln\sin x}}=\frac{1}{1-\frac{0}{-\infty}}=\frac{1}{1+0}=1$$

Quesito 3

La funzione $f(x)=|x+1|-2x$ nell'intervallo $[-2,3]$ può essere scritta come $f(x)=|x+1|-2x=\begin{cases}-1-3x & -2\le x<-1\\ 1-x & -1\le x\le 3\end{cases}$.

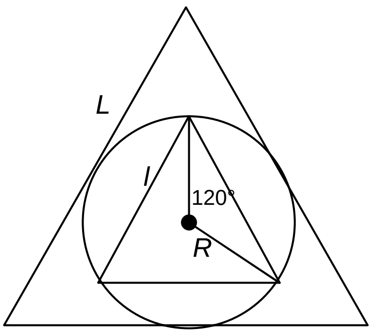
Tale funzione è continua in $x=-1$ in quanto $\lim_{x\to -1^-}(-1-3x)=2,\ \lim_{x\to -1^+}(1-x)=2$, per cui essa è continua in tutto l'intervallo $[-2,3]$; la derivata prima è $f'(x)=\begin{cases}-3 & -2\le x<-1\\ -1 & -1\le x\le 3\end{cases}$ da cui deduciamo che in $x=-1$ la funzione presenta un punto angoloso e pertanto non è derivabile.

Poiché una delle ipotesi del teorema di Lagrange, oltre alla continuità della funzione nell'intervallo $[-2,3]$, è la derivabilità della funzione in $(-2,3)$, deduciamo che nel caso in esame esso non è applicabile.

Quesito 4

Il dominio è $D:\begin{cases}x^2+3x>0\\ -2-x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<-3\vee x>0\\ x\le -2\end{cases}\Leftrightarrow x\in\left]-\infty,-3\right[$. Notiamo che la funzione è prolungabile per continuità anche nel punto $x=-3$ e vale $y(0)=0$.

Quesito 5



Indichiamo con L,R,l rispettivamente il lato del triangolo equilatero circoscritto, il raggio del cerchio inscritto ed il lato del triangolo equilatero inscritto nel cerchio.

Il raggio del cerchio inscritto nel triangolo equilatero di lato L è $R=\frac{S}{p}$ dove S e p sono rispettivamente l'area e il semiperimetro del triangolo circoscritto, per cui $R=\frac{\frac{L^2\sqrt{3}}{4}}{\frac{3L}{2}}=\frac{L\sqrt{3}}{6}$. Il lato del triangolo inscritto nel cerchio di raggio

$R=\frac{L\sqrt{3}}{6}$, applicando il teorema di Carnot è $l=\sqrt{R^2+R^2-2R^2\cos(120°)}=R\sqrt{3}=\frac{L}{2}$. Quindi il rapporto tra il lati del triangolo inscritto e circoscritto al cerchio è $\frac{l}{L}=\frac{1}{2}$ da cui si deduce che il rapporto tra le rispettive aree è $\frac{1}{4}$. In conclusione, poiché la probabilità che il punto sia interno al triangolo minore è data dal rapporto tra le aree del triangolo minore e maggiore, ricaviamo che essa è pari a $\frac{1}{4}$.

<u>Quesito 6</u>

Per calcolare la probabilità richiesta è necessario innanzitutto individuare il numero di tutti i possibili ordini in cui possono essere assunti 2 M e 3 F; tale numero equivale al numero di disposizioni di 5 oggetti in due posti (disposizione di 2 maschi su 5) o al numero di disposizioni di 5 oggetti in tre posti (disposizione di 3 femmine su 5), e cioè al numero di combinazioni semplici $C_{5,2}=C_{5,3}=\frac{5!}{2!\cdot 3!}=\frac{120}{2\cdot 6}=10$. Tale numero va moltiplicato per la probabilità che escano 2 M e 3 F in uno dei 10 ordini possibili. La probabilità che l'ordine di assunzione sia MMFFF è data da $\left(\frac{9}{16}\right)\cdot\left(\frac{8}{15}\right)\cdot\left(\frac{7}{14}\right)\cdot\left(\frac{6}{13}\right)\cdot\left(\frac{5}{12}\right)=\frac{3}{104}$ e tale probabilità non cambia al variare della sequenza di assunzione; infatti la probabilità, ad esempio, che la sequenza di assunzione sia FFMFM è sempre $\left(\frac{7}{16}\right)\cdot\left(\frac{6}{15}\right)\cdot\left(\frac{9}{14}\right)\cdot\left(\frac{5}{13}\right)\cdot\left(\frac{8}{12}\right)=\frac{3}{104}$ e così via per le restanti 8 sequenze. In conclusione la probabilità richiesta è $p=10\cdot\frac{3}{104}=\frac{15}{52}$.

<u>Quesito 7</u>

La funzione $f(x)=\ln x+x$ è definita in $(0,+\infty)$ e presenta come derivata prima $f'(x)=\frac{1}{x}+1$ per cui essa è strettamente crescente in tutto il suo dominio; inoltre poiché

$$\lim_{x\to e^{-1}}(\ln x+x)=\frac{1-e}{e}<0$$
$$\lim_{x\to+\infty}(\ln x+x)=+\infty$$

a norma del teorema degli zeri la funzione presenterà uno zero in $\left(e^{-1},+\infty\right)$, e data la stretta crescenza tale zero sarà unico.

Per calcolarlo basta utilizzare uno dei metodi numerici a disposizione, come ad esempio il metodo delle tangenti che si basa sulla formula ricorsiva $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ di punto iniziale $x_0 = e^{-1}$ in cui la funzione e la sua derivata seconda risultano concordi. Sviluppando tale metodo e fornendo di volta in volta le approssimazioni con tre cifre decimali visto che se ne richiedono due esatte, si ha:

1. $x_0 = e^{-1}$
2. $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = e^{-1} - \frac{\ln e^{-1} + e^{-1}}{\frac{1}{e^{-1}} + 1} \cong 0.538$
3. $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 0.538 - \frac{\ln 0.538 + 0.538}{\frac{1}{0.538} + 1} \cong 0.567$
4. $x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 0.567 - \frac{\ln 0.567 + 0.567}{\frac{1}{0.567} + 1} \cong 0.567$

Dallo sviluppo del metodo deduciamo che la soluzione dell'equazione con due cifre decimali esatte è $\alpha \cong 0.567$.

Quesito 8

Risolviamo l'integrale definito $f(x) = \int_1^x te^t dt$.

Integrando per parti si ha $f(x) = \int_1^x te^t dt = [(t-1)e^t]_1^x = (x-1)e^x$.

Tale funzione è definita in tutto R per cui non presenterà asintoti verticali.

Vediamo se presenta asintoti orizzontali, si ha:

$$\lim_{x\to+\infty} (x-1)e^x = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} (x-1)e^x = \lim_{x\to-\infty} \frac{(x-1)}{e^{-x}} \text{ f.i. } \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{\text{De L'Hospital}} \lim_{x\to-\infty} \frac{(x-1)}{e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = \frac{1}{-\infty} = 0$$

per cui la funzione presenterà un asintoto orizzontale sinistro di equazione $y = 0$.

Vediamo se presenta asintoti obliqui, si ha:

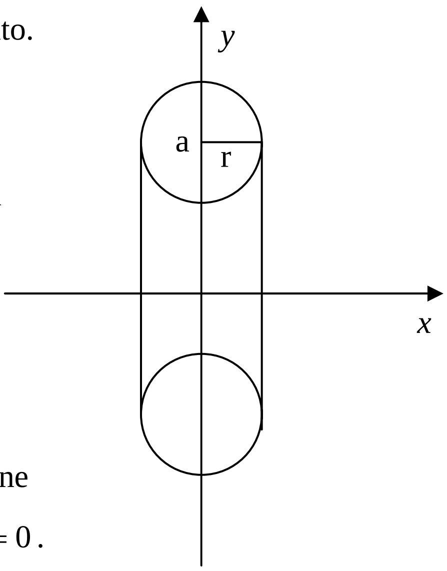
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(x-1)e^x}{x} = 1 \cdot e^{+\infty} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{(x-1)e^x}{x} = 1 \cdot e^{-\infty} = 0$$

per cui la funzione non presenterà asintoti obliqui.

In conclusione la funzione presenta solo un asintoto orizzontale sinistro di equazione $y = 0$.

Quesito 9



Consideriamo la geometria del problema rappresentata nella figura a lato. La superficie di un toro è equivalente a quella di un cilindro avente per base la sezione circolare, di raggio r, del toro e per altezza la circonferenza di raggio a formata dai centri delle varie sezioni circolari del toro stesso, quindi la superficie è $S = 2\pi r \cdot 2\pi a = 4\pi^2 ar$.

Possiamo ricavare la formula del volume del toro utilizzando l'integrazione definita. Consideriamo un riferimento xy tale che l'asse x coincida con l'asse di rotazione suddetto, e il centro O della circonferenza di raggio r sia nel punto $(0,a)$, con $a > r$. L'equazione di tale circonferenza è facilmente deducibile: $x^2 + y^2 - 2ay + a^2 - r^2 = 0$.

Per applicare le tecniche del calcolo integrale è utile pensare la circonferenza suddivisa in due semicirconferenze che possono essere viste come grafici delle seguenti funzioni:

$$\text{semicirconferenza } y > a: \; y = a + \sqrt{r^2 - x^2}$$

$$\text{semicirconferenza } y < a: \; y = a - \sqrt{r^2 - x^2}$$

E' chiaro che il volume V del toro può essere pensato come differenza tra il volume della figura che si ottiene ruotando di 360° intorno all'asse x la semicirconferenza superiore e il volume della figura che si ottiene ruotando di 360° intorno all'asse x la semicirconferenza inferiore:

$$V = \pi \int_{-r}^{r} \left(a + \sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx - \pi \int_{-r}^{r} \left(a - \sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx$$

Svolgendo i quadrati e utilizzando la linearità dell'operatore integrale e la simmetria delle funzioni, si può scrivere:

$$V = 4\pi a \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = 8\pi a \int_{0}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx$$

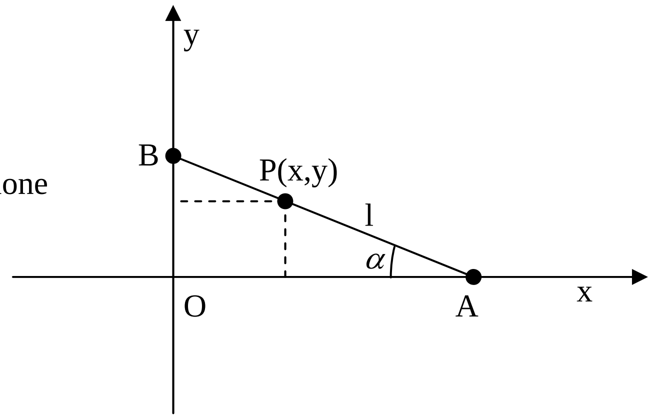
Per il calcolo di $\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\, dx$ effettuiamo la sostituzione $x = r\sin\vartheta$, ricordando che $x = 0 \to \vartheta = 0, x = r \to \vartheta = \frac{\pi}{2}$. Si ha:

$$\int_0^r \sqrt{r^2-x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2\left(1-\sin^2\vartheta\right)}\left(r\cos\vartheta\right)d\vartheta =$$

$$= r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\vartheta d\vartheta = r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1+\cos 2\vartheta}{2}\right)d\vartheta = r^2\left[\left(\frac{\vartheta}{2}+\frac{\sin 2\vartheta}{4}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi r^2}{4}$$

da cui $V = 8\pi a\cdot\frac{\pi r^2}{4} = 2a\pi^2 r^2$.

<u>Quesito 10</u>



Consideriamo la figura a lato in cui per semplicità il punto P(x,y) è stato considerato nel primo quadrante. Questa assunzione non lede la generalità della dimostrazione che effettueremo. Scegliamo il punto P(x,y) di modo che $\overline{PA} = l$ ed indichiamo l'angolo $O\hat{A}B = \alpha$. Per i teoremi sui triangoli rettangoli deduciamo:

$$y = l\sin\alpha \rightarrow \sin\alpha = \frac{y}{l}$$

$$x = (a-l)\cos\alpha \rightarrow \cos\alpha = \frac{x}{(a-l)}$$

Elevando al quadrato entrambe le condizioni si ha: $\sin^2\alpha = \frac{y^2}{l^2}, \cos^2\alpha = \frac{x^2}{(a-l)^2}$, e ricordando l'identità trigonometrica fondamentale, $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, si ricava $\frac{x^2}{(a-l)^2}+\frac{y^2}{l^2} = 1$ che è l'equazione canonica dell'ellisse di semiassi $(a-l)$ ed l. In particolare se P è il punto medio di AB si ha $l = \frac{a}{2}$ e l'ellisse degenera nella circonferenza di raggio $l = \frac{a}{2}$ e di equazione $x^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}$.