ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2004
Sessione suppletiva

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1

In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (*Oxy*), è assegnata la curva *K* di equazione:

(1) $$y=\frac{2x(6-x)}{2+x}.$$

a) Disegnarne l'andamento, indicando con *A* il suo punto di massimo relativo.

b) Calcolare quanti punti, aventi le coordinate del tipo $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$, dove a, b sono numeri interi, appartengono alla regione piana (contorno compreso) delimitata dall'asse x e dalla curva *K*.

c) Fra i triangoli isosceli aventi il vertice propriamente detto in *A* e la base sull'asse x, determinare quello il cui perimetro è 16.

d) Calcolare le aree delle due regioni in cui la curva *K* divide il triangolo trovato sopra.

e) Spiegare perché la funzione (1) non è invertibile nel suo dominio. Se si restringe convenientemente questo dominio si ottiene una funzione invertibile? Qual è in tal caso la funzione inversa?

PROBLEMA 2

Nel Liceo Scientifico «Torricelli» vi sono 4 classi quinte, i cui alunni sono distribuiti per sezione e per sesso in base alla seguente tabella:

sesso \ sezione	A	B	C	D
M	12	10	13	8
F	16	18	15	20

a) Rappresentare graficamente la situazione per mezzo di un istogramma.

b) Calcolare le distribuzioni marginali degli studenti per sezione e per sesso.

c) Calcolare la probabilità che, scelta a caso una coppia di studenti della 5ª A, questa sia formata da alunni di sesso:

1) maschile 2) femminile 3) differente.

Quanto vale la somma delle tre probabilità trovate?.

d) Calcolare la probabilità che, scelti a caso una classe e, in essa, una coppia di studenti, questa sia formata da alunni di sesso differente.

e) Scelto a caso un alunno di quinta del Liceo in questione e constatato che si tratta di uno studente di sesso maschile, calcolare la probabilità che esso provenga dalla 5ª D.

QUESTIONARIO

1 La funzione $f(x) = \dfrac{3x - 2\,\text{sen}\,x}{2x - 3\,\text{sen}\,x}$ è, per $x \to +\infty$, una forma indeterminata di tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$. Il limite della funzione, per $x \to +\infty$:

A) non esiste; B) è $\dfrac{3}{2}$; C) è $\dfrac{2}{3}$; D) è un valore diverso da $\dfrac{3}{2}$ e $\dfrac{2}{3}$.

Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta effettuata.

2 Determinare il più grande valore di n per cui l'espressione numerica $\sum_{k=5}^{n} k$ non supera 10 000.

3 Sia $F(x)$ una funzione reale di variabile reale derivabile in un punto a. Si sa che se $F'(a) > 0$ allora $F(x)$ è crescente in a, mentre se $F'(a) < 0$ allora $F(x)$ è decrescente in a. Dimostrare che condizione sufficiente ma non necessaria affinché $F(x)$ ammetta in a un massimo relativo è che risulti $F'(a) = 0$ ed $F''(a) < 0$.

4 Risolvere la seguente disequazione in x:

$$(\ln x)^2 \geq \ln(x^2).$$

5 Considerato un triangolo equilatero di altezza h e detto P un suo qualsiasi punto interno, indicare con x, y, z le distanze di P dai lati del triangolo. La somma $x + y + z$ risulta:

A) sempre maggiore di h;
B) sempre minore di h;
C) sempre uguale ad h;
D) a volte maggiore di h, a volte minore, a volte uguale.

Una sola risposta è corretta. Individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta effettuata.

6 Riferito il piano a un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), si consideri l'equazione:

$$xy + px + qy + r = 0.$$

Determinare sotto quali condizioni per i coefficienti p, q, r (non tutti nulli) essa rappresenta l'insieme di due rette.

7 Descrivere tutte le isometrie dirette che mutano un tetraedro regolare in sé.

8 In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le affinità di equazioni:

$$\begin{cases} X = ax + by \\ Y = \dfrac{1}{2}bx - 2 \end{cases}.$$

Tra di esse determinare quella che trasforma il punto $(1, 0)$ nel punto $(1, -1)$ e stabilire se ammette rette unite.

9 Due giocatori, A e B, giocano a «Testa o Croce» con una moneta le cui facce hanno la stessa probabilità di uscire. Ciascuno di loro punta la somma S. Chi vince porta via l'intera posta. Il gioco si svolge con la seguente regola: «Il giocatore A lancia la moneta: se esce "Testa" vince, altrimenti il gioco passa a B. Questi, a sua volta, lancia la moneta e vince se viene "Croce", in caso contrario il gioco ritorna ad A, che ripete il lancio e vince se viene "Testa". In caso contrario il gioco ripassa a B, che vince se viene "Croce". Se B non vince il gioco ha termine e ciascuno dei due giocatori riprende la somma che aveva puntato». Il gioco è equo?

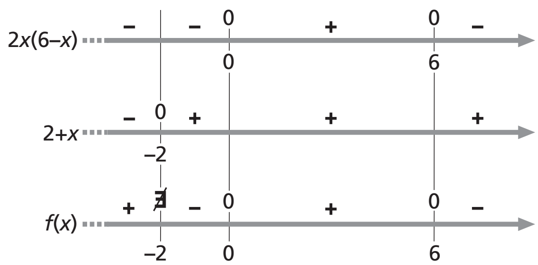
10 Dopo avere spiegato perché la funzione $f(x) = \frac{1}{x - \cos x}$ è positiva nell'intervallo [1, 2], esplicitare un algoritmo idoneo a calcolare un valore approssimato dell'area situata sotto il grafico della funzione relativamente all'intervallo considerato.

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

SOLUZIONE DELLA PROVA D'ESAME
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2004
Sessione suppletiva

PROBLEMA 1

a) Il campo di esistenza della funzione $f(x)=\dfrac{2x(6-x)}{2+x}$ è l'intervallo $]-\infty,\ -2[\cup]-2,+\infty[$ e si ottiene imponendo che il denominatore di f non sia nullo. Lo schema di figura 1 mostra il segno di f: la funzione si annulla in $x=0$ e in $x=6$, è positiva per $x<-2$ e per $0<x<6$, negativa per $-2<x<0$ e per $x>6$.



▲ **Figura 1.**

Calcoliamo i limiti. Si ha:

$$\lim_{x\to-\infty} f=+\infty,\qquad \lim_{x\to+\infty} f=-\infty,$$

$$\lim_{x\to-2^+} f=-\infty,\qquad \lim_{x\to-2^-} f=+\infty.$$

Quindi la retta $x=-2$ è asintoto verticale. Cerchiamo eventuali asintoti obliqui di equazione $y=my+q$, con $m=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ e $q=\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)-mx]$. Si ha:

$$m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2(6-x)}{2+x}=-2$$

$$q=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{2x(6-x)}{2+x}+2x\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{16x}{2+x}=16.$$

La retta $y=-2x+16$ è asintoto obliquo di f.

La derivata prima

$$f'(x)=\frac{(12-4x)(2+x)-12x+2x^2}{(2+x)^2}=\frac{-2(x^2+4x-12)}{(2+x)^2}$$

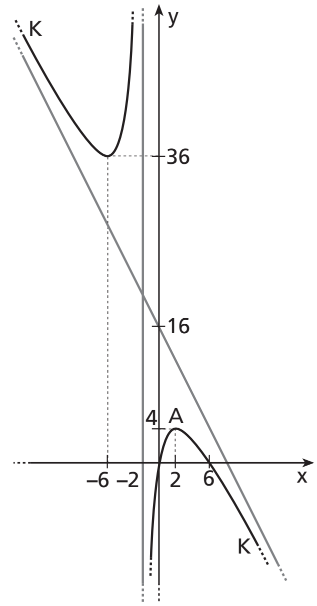
ha campo di esistenza uguale a quello di f e si annulla per $x=-6$ e $x=2$.

Essendo il denominatore sempre positivo, il segno di f' è concorde con il segno del numeratore. Si ha:

per $-6<x<2$, $f'(x)>0$ e la funzione f è crescente;
per $x<-6$ e $x>2$, $f'(x)<0$ la funzione f è decrescente.

Quindi $x = -6$ è punto di minimo relativo e $x = 2$ è punto di massimo relativo. I corrispondenti valori di f sono $f(-6) = 36$ e $f(2) = 4$. Le coordinate del punto A sono dunque $A(2, 4)$.

La derivata seconda $f''(x) = \dfrac{-64}{(x+2)^3}$ non si annulla in nessun punto del suo campo di esistenza, è positiva per $x < -2$, negativa per $x > -2$. Si conclude che la funzione f non ha flessi, ha concavità rivolta verso l'alto per $x < -2$ e concavità rivolta verso il basso per $x > -2$.
Il grafico riportato in figura 2 mostra che la curva K è un'iperbole non equilatera di asintoti $x = -2$ e $y = -2x + 16$.



▲ **Figura 2.**

b) La domanda richiede un conteggio diretto dei punti. Dalle ipotesi $0 \le \dfrac{a}{2} \le 6$ e $0 \le \dfrac{b}{2} \le f(x)$ (a e b numeri interi) si ricava: $0 \le a \le 12$ e $0 \le b \le 2f(x)$. Quindi i possibili valori che le ascisse dei punti possono assumere sono 13 e sono: $0, \dfrac{1}{2}, 1, \dfrac{3}{2}, 2, \ldots\ldots, \dfrac{11}{2}, 6$. Fissato $x = \dfrac{a}{2}$, i punti da conteggiare lungo la verticale per x sono tutti i punti $\left(\dfrac{a}{2}, b\right)$ che soddisfano la condizione $0 \le b \le 2f\left(\dfrac{a}{2}\right)$; essi sono $1 + \mathrm{int}\left(2f\left(\dfrac{a}{2}\right)\right)$, dove il simbolo int indica la funzione parte intera. Ricordiamo che dato z numero reale, $\mathrm{int}(z)$ è il più grande numero intero minore o uguale a z. Memorizziamo i punti di ciascuna linea verticale nella seguente tabella.

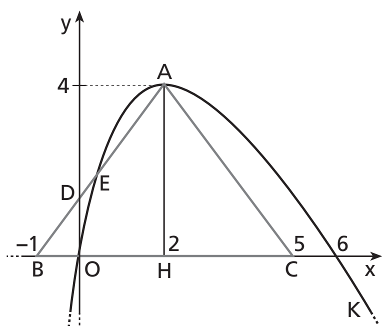
x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6
$2f(x)$	0	4,4	6,6	7,7	8	7,7	7,2	6,3	5,3	4,1	2,8	1,4	0
$1 + \mathrm{int}\left(2f\left(\dfrac{a}{2}\right)\right)$	1	5	7	8	9	8	8	7	6	5	3	2	1

Il numero di punti totale è quindi $\displaystyle\sum_{a=0}^{12} 1 + \mathrm{int}\left(2f\left(\frac{a}{2}\right)\right) = 70$.

c) Indichiamo con $B(b; 0)$ il vertice a sinistra di $A(2; 4)$, con $C(c; 0)$ il vertice a destra di A e con $H(2; 0)$ il piede dell'altezza relativa alla base BC (vedi figura 3). Per le ipotesi sul triangolo ABC:

$$\overline{BH} = \overline{HC} \rightarrow c = 4 - b$$

e quindi il punto C ha coordinate $C(4 - b; 0)$. Sostituendo le coordinate dei punti A e B nella relazione $\overline{AB} + \overline{BH} = 8$ si ottiene: $\sqrt{(b-2)^2 + 16} + \sqrt{(b-2)^2} = 8$. Essendo $b < 2$ per ipotesi, si ha $|b - 2| = 2 - b$; quindi $\sqrt{(b-2)^2 + 16} = 6 + b$ che ha senso per $b > -6$. D'altronde se fosse $b < -6$, la base BC del triangolo avrebbe lunghezza superiore a 16 e quindi il perimetro non potrebbe essere 16. Possiamo elevare al quadrato ambo i membri della relazione $\sqrt{(b-2)^2 + 16} = 6 + b$ e risolvendo si ottiene $b = -1$. Quindi $c = 5$ e il triangolo richiesto ha vertici $A(2; 4)$, $B(-1; 0)$, $C(5; 0)$.



▲ **Figura 3.**

d) Si osserva dalla figura 3 che la regione del triangolo ABC a sinistra della curva K è formata dall'unione del triangolo BOD, la cui area è $\frac{1}{2}\overline{OB}\cdot\overline{OD}$, con la figura di vertici ODE, la cui area richiede il calcolo di un integrale. In sintesi: $A_{BOE}=A_{OBD}+A_{ODE}$.

Calcoliamo le coordinate di D ed E. La retta per A e B ha equazione $y=\frac{4}{3}x+\frac{4}{3}$, quindi si ha $D\left(0;\frac{4}{3}\right)$ e $A_{OBD}=\frac{1}{2}\overline{OB}\cdot\overline{OD}=\frac{2}{3}$. Le coordinate di E si ottengono risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} y=\dfrac{-2x^2+12x}{2+x} \\ y=\dfrac{4}{3}x+\dfrac{4}{3} \end{cases}$$

da cui si ottiene l'equazione risolvente $5x^2-12x+4=0$ che ha due soluzioni, $x=2$ e $x=\frac{2}{5}$. Quindi $x=\frac{2}{5}$ è l'ascissa di E, essendo $x=2$ l'ascissa del punto A già noto.

L'area della figura di vertici ODE è:

$$\int_0^{\frac{2}{5}}\left(\frac{4}{3}x+\frac{4}{3}-f(x)\right)dx=\int_0^{\frac{2}{5}}\left(\frac{4}{3}x+\frac{4}{3}-\frac{-2x^2+12x}{2+x}\right)dx.$$

Poiché $\frac{-2x^2+12x}{2+x}=-2x+16-\frac{32}{2+x}$, si ha:

$$\int_0^{\frac{2}{5}}\left(\frac{4}{3}x+\frac{4}{3}-\frac{-2x^2+12x}{2+x}\right)dx=\int_0^{\frac{2}{5}}\left(\frac{4}{3}x+\frac{4}{3}+2x-16+\frac{32}{2+x}\right)dx=$$

$$\int_0^{\frac{2}{5}}\left(\frac{10}{3}x-\frac{44}{3}+\frac{32}{2+x}\right)dx=\left[\frac{5}{3}x^2-\frac{44}{3}x+32\ln|x+2|\right]_0^{\frac{2}{5}}=32\ln\frac{6}{5}-\frac{28}{5}.$$

Quindi $A_{BOE}=A_{OBD}+A_{ODE}=\frac{2}{3}+32\ln\frac{6}{5}-\frac{28}{5}=32\ln\frac{6}{5}-\frac{74}{15}$.

Infine l'area della parte di triangolo a destra della curva K si calcola come differenza:

$$A_{OEAC}=A_{ABC}-A_{BOE}=12-32\ln\frac{6}{5}+\frac{74}{15}=\frac{254}{15}-32\ln\frac{6}{5}.$$

e) Una funzione $f: A\rightarrow B$ è invertibile se e solo se è iniettiva e suriettiva. Se f è iniettiva ma non suriettiva, è sufficiente sostituire B con il codominio di f per ottenere una funzione invertibile, se f è suriettiva ma non iniettiva, per ottenere una funzione invertibile, si deve restringere il dominio di f ad un sottoinsieme di A in cui f sia iniettiva.

La funzione (1) $f(x)=\frac{2x(6-x)}{2+x}$ non è invertibile perché non è iniettiva: come dimostrato nel punto a), $f(0)=f(6)=0$. Osservando la figura 2 si può infatti notare che esistono infinite rette parallele all'asse x che intersecano il grafico di f in 2 punti. Restringiamo il dominio di f $]-\infty,-2[\cup]-2,+\infty[$ ad un sottoinsieme in cui f sia iniettiva. Sempre osservando la figura 2 si individuano almeno quattro sottoinsiemi in cui f è iniettiva: $D_1=]-\infty,-6]\cup]-2,+2]$, $D_2]-\infty,-6]\cup[+2,+\infty[$, $D_3=[-6,-2[\cup]-2,+2]$, $D_4=[-6,-2[\cup[+2,+\infty[$. Altri sottoinsiemi si ottengono restringendo ulteriormente ciascuno dei sottoinsiemi individuati.

L'espressione dell'inversa di f si ottiene ricavando x dalla relazione $y=\frac{2x(6-x)}{2+x}$. Si ha:

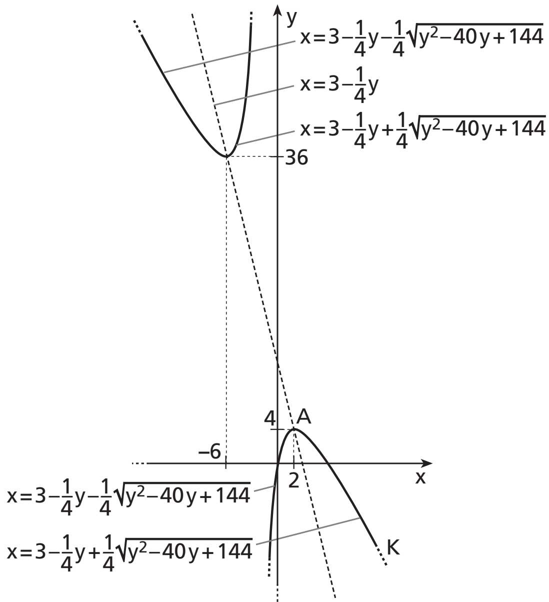
$$x=\frac{12-y\pm\sqrt{y^2-40y+144}}{4}\Leftrightarrow x=3-\frac{1}{4}y\pm\frac{1}{4}\sqrt{y^2-40y+144}.$$

Il segno $\pm$ conferma la non invertibilità della funzione f sul suo campo di esistenza. Affinché la radice sia definita deve essere $y^2 - 40y + 144 \geq 0$ che è soddisfatta per $y \in]-\infty, +4] \cup [36, +\infty[$; abbiamo così ritrovato il codominio di f.

La parte dell'espressione di x che non dipende dal segno del radicale è $x = 3 - \frac{1}{4}y$ che, come si osserva in figura 4, è l'equazione della retta che passa dai punti di massimo e minimo relativi di f.

Quindi $x = 3 - \frac{1}{4}y - \frac{1}{4}\sqrt{y^2 - 40y + 144}$ rappresenta la parte di grafico della curva K situata a sinistra della retta $x = 3 - \frac{1}{4}y$, mentre

$x = 3 - \frac{1}{4}y + \frac{1}{4}\sqrt{y^2 - 40y + 144}$ rappresenta la parte di grafico della curva K situata a destra della retta $x = 3 - \frac{1}{4}y$.



▲ **Figura 4.**

Allora, ad esempio, la funzione

$$g:]-\infty, +4] \cup [36, +\infty[\mapsto]-\infty, -6] \cup]-2, +2]$$

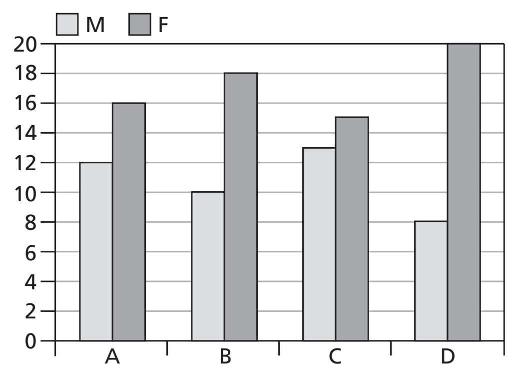
tale che $g(y) = 3 - \frac{1}{4}y - \frac{1}{4}\sqrt{y^2 - 40y + 144}$ è l'inversa della funzione (1) ristretta al dominio D_1. Procedendo in modo analogo si possono costruire altre funzioni inverse della funzione data (1).

PROBLEMA 2

a) In figura 5 è riportato l'istogramma che rappresenta la suddivisione degli alunni per sesso in ciascuna delle quattro classi quinte considerate.

b) Nell'insieme S degli studenti delle classi quinte del L. S. «Torricelli» consideriamo le due variabili casuali del problema:

– *sesso* (X), i cui valori sono M ed F;
– *sezione* (Y), i cui valori sono A, B, C, D.



▲ **Figura 5.**

Rappresentiamo le corrispondenti distribuzioni di probabilità:

X	M	F
$P(X)$	$\frac{43}{112}$	$\frac{69}{112}$

Y	A	B	C	D
$P(Y)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Compiliamo la tabella a doppia entrata delle probabilità congiunte, ossia le probabilità delle coppie ordinate (*sesso*, *sezione*) dei possibili valori delle due variabili. Per calcolare la probabilità che uno studente abbia un dato sesso e frequenti una data sezione possiamo utilizzare una delle seguenti formule:

$$(\textit{prob. di app. a una sez. data}) \times \frac{\textit{num. stud. della sez. aventi un dato sesso}}{\textit{num. stud. della sez.}};$$

$$(\textit{prob. di app. a un sesso dato}) \times \frac{\textit{num. stud. di quel sesso iscritti ad una sez. data}}{\textit{num. tot. degli stud. di quel sesso}}.$$

X \ Y	A	B	C	D	somma
M	$\frac{1}{4} \times \frac{12}{28} = \frac{3}{28}$	$\frac{5}{56}$	$\frac{13}{112}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{43}{112}$
F	$\frac{69}{112} \times \frac{16}{69} = \frac{1}{7}$	$\frac{9}{56}$	$\frac{15}{112}$	$\frac{5}{28}$	$\frac{69}{112}$
somma	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	

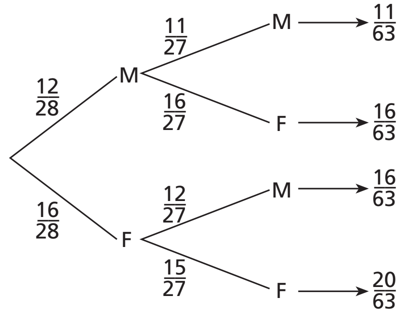
Le distribuzioni marginali degli studenti per sezione e per sesso sono date rispettivamente dalle somme per colonne e dalle somme per righe. Dalla tabella possiamo constatare che:

– le probabilità *marginali* delle due variabili coincidono con le probabilità delle *singole* variabili ma
– le probabilità congiunte non sono uguali al prodotto delle probabilità marginali.

Per quest'ultima ragione le due variabili sono dipendenti.

c) Per calcolare la probabilità di ciascun tipo di coppia di eventi, si utilizza il teorema della probabilità composta tenendo conto che i due eventi che formano l'evento composto sono stocasticamente dipendenti. Il procedimento adottato è schematizzato dal diagramma ad albero riportato in figura 6, in cui M ed F sono gli eventi «L'alunno è maschio», «L'alunno è femmina» rispettivamente.

▼ **Figura 6.**



La probabilità che, in 5ª A, il primo studente scelto sia un maschio è $\frac{12}{28}$, mentre la probabilità che anche il secondo lo sia è $\frac{11}{27}$. Quindi $P(M \cap M) = \frac{12}{28} \cdot \frac{11}{27} = \frac{11}{63}$. Analogamente la probabilità di scegliere una coppia di studenti di sesso femminile è $P(F \cap F) = \frac{16}{28} \cdot \frac{15}{27} = \frac{20}{63}$. La probabilità di scegliere una coppia di studenti di sesso differente è la somma logica di due eventi incompatibili, quindi: $P((M \cap F) \cup (F \cap M)) = \frac{16}{63} + \frac{16}{63} = \frac{32}{63}$. Le probabilità richieste dal quesito sono $\frac{11}{63}$, $\frac{20}{63}$ e $\frac{32}{63}$ rispettivamente. La somma delle 3 probabilità trovate è 1.

d) La probabilità E che la coppia scelta sia formata da un maschio e una femmina è la somma logica di quattro eventi composti a due a due incompatibili, infatti:

$$P(E) = P(E \cap A) + P(E \cap B) + P(E \cap C) + P(E \cap D);$$

quindi:

$$P(E) = P(A) \cdot P(E|A) + P(B) \cdot P(E|B) + P(C) \cdot P(E|C) + P(D) \cdot P(E|D)$$

e $P(A) = P(B) = P(C) = P(D) = \frac{1}{4}$.

Sappiamo dal punto c) che $P(E|A) = \frac{32}{63}$. Con un procedimento analogo a quello utilizzato nel punto c) otteniamo:

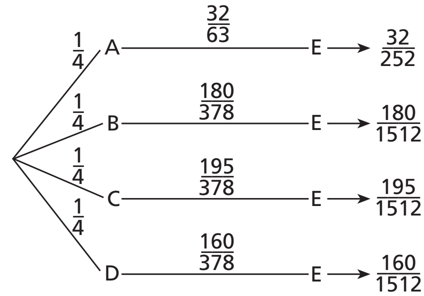
$$P(E|B) = \frac{10}{28} \cdot \frac{18}{27} + \frac{18}{28} \cdot \frac{10}{27} = \frac{180}{378},$$

$$P(E|C) = \frac{13}{28} \cdot \frac{15}{27} + \frac{15}{28} \cdot \frac{13}{27} = \frac{195}{378},$$

$$P(E|D) = \frac{8}{28} \cdot \frac{20}{27} + \frac{20}{28} \cdot \frac{8}{27} = \frac{160}{378},$$

Infine per il calcolo di $P(E)$ utilizziamo il diagramma ad albero di figura 7.

Pertanto $P(E) = \dfrac{192 + 180 + 195 + 160}{1512} = \dfrac{727}{1512} \simeq 0{,}48$



▲ **Figura 7.**

e) I maschi sono in tutto 43 e di questi 8 frequentano la 5ª D. La probabilità che uno studente maschio scelto fra le classi quinte provenga dalla 5ª D è pari a $\dfrac{8}{43}$.

QUESTIONARIO

1 La funzione $\operatorname{sen} x$ è limitata $(-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1)$ quindi i contributi di $2\operatorname{sen} x$ al numeratore e di $3\operatorname{sen} x$ al denominatore sono trascurabili per $x \to +\infty$. Per ogni x positivo possiamo scrivere: $-\dfrac{1}{x} \leq \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} \leq \dfrac{1}{x}$, e siccome $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\pm\dfrac{1}{x}\right) = 0$, per il teorema del confronto anche $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 0$.

Quindi:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x - 2\operatorname{sen} x}{2x - 3\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(3 - \dfrac{2\operatorname{sen} x}{x}\right)}{x\left(2 - \dfrac{3\operatorname{sen} x}{x}\right)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{3 - \dfrac{2\operatorname{sen} x}{x}}{2 - \dfrac{3\operatorname{sen} x}{x}} = \frac{3}{2}.$$

La risposta esatta è la B).

2 L'espressione $\sum\limits_{k=5}^{n} k$ rappresenta la somma di $(n-5)+1 = n-4$ termini consecutivi della progressione aritmetica di ragione 1: $a_n = a_{n-1} + 1$, con $a_0 = 0$. Quindi la somma $\sum\limits_{k=5}^{n} k$ si può esprimere come la media aritmetica del primo e ultimo termine moltiplicata per il numero dei termini:

$$\sum_{k=5}^{n} k = \frac{a_5 + a_n}{2}(n-4) = \frac{5+n}{2}(n-4) = \frac{1}{2}(n^2 + n - 20).$$

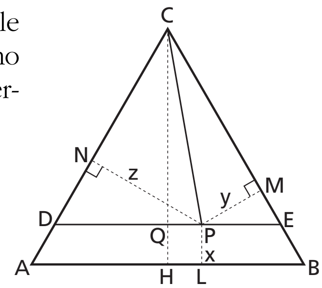
Imponendo la condizione $\dfrac{1}{2}(n^2 + n - 20) \leq 10\,000$, si ottiene la disequazione di secondo grado $n^2 + n - 20\,020 \leq 0$ che in $\mathbb{R}$ è verificata per $\dfrac{-1-\sqrt{80\,081}}{2} \leq n \leq \dfrac{-1+\sqrt{80\,081}}{2}$. Poiché n è un numero naturale e $\dfrac{-1+\sqrt{80\,081}}{2} \simeq 140{,}993$, si conclude che il più grande valore di n che soddisfa il quesito è $n = 140$.

Infatti $\sum\limits_{k=5}^{140} k = 9860$ e $\sum\limits_{k=5}^{141} k = 10\,001$.

3 Dal testo del quesito si deduce che F è derivabile almeno 2 volte nel punto a. Essendo $F''(a) < 0$ si ha che $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{F'(x) - F'(a)}{x-a} = F''(a) < 0$ e quindi, per il teorema della permanenza del segno, esiste un intorno I di a tale che, per ogni $x \in I$ il rapporto incrementale $\dfrac{F'(x) - F'(a)}{x-a}$ è negativo, cioè numeratore e denominatore hanno segno discorde, e quindi si verifica: $x < a \Rightarrow F'(x) > F'(a)$ e $x > a \Rightarrow F'(x) < F'(a)$. Essendo per ipotesi $F'(a) = 0$, si ha che per ogni $x \in I$, $x < a \Rightarrow F'(x) > 0$ e $x > a \Rightarrow F'(x) < 0$, ma, poiché F è continua e derivabile in a, questa è una condizione sufficiente affinché a sia punto di massimo relativo.

4 Deve essere $x>0$ affinché la disequazione abbia senso, quindi si può scrivere $\ln(x^2)=2\ln x$; la disequazione $(\ln x)^2 \geq \ln(x^2)$ diventa $(\ln x)^2 - 2\ln x \geq 0$. Posto $\ln x = y$, si ottiene $y^2-2y\geq 0$ che è soddisfatta per $y\leq 0 \vee y\geq 2$. Essendo:
$\ln x \leq 0 \Leftrightarrow x\leq 1 \Leftrightarrow 0<x\leq 1$ e $\ln x \geq 2 \Leftrightarrow x\geq e^2$, l'insieme delle soluzioni della disequazione è: $]0,1]\cup[e^2,+\infty[$.

5 Sia P un punto interno al triangolo ABC e indichiamo con L, M e N i piedi delle perpendicolari condotte da P ai lati AB, BC e AC rispettivamente. Tracciamo l'altezza CH relativa alla base AB e la parallela ad AB passante per P che interseca il triangolo in D ed E e l'altezza CH in Q come si osserva in figura 8.
Le ipotesi sono $\overline{PL}=x$, $\overline{PM}=y$, $\overline{PN}=z$ e $\overline{CH}=h$.
Per costruzione $\overline{QH}=\overline{PL}=x$ perché il quadrilatero $PLHQ$ è un rettangolo e $\overline{CQ}=\overline{CH}-\overline{QH}=h-x$.
Il triangolo CDE è simile al triangolo ABC e quindi è anch'esso equilatero. Indichiamo con l la misura di uno dei suoi lati. Se congiungiamo C con P notiamo che $A_{CDE}=A_{CDP}+A_{CEP}$, che PM è l'altezza del triangolo CEP relativa alla base CE, e che PN è l'altezza del triangolo CDP relativa alla base CD.



▲ **Figura 8.**

Quindi: $A_{CDE}=\frac{1}{2}l\overline{CQ}=\frac{1}{2}l(h-x)$; $A_{CDP}=\frac{1}{2}l\overline{PN}=\frac{1}{2}lz$; $A_{CEP}=\frac{1}{2}l\overline{PM}=\frac{1}{2}ly$.
Si ottiene:

$$A_{CDE}=A_{CDP}+A_{CEP}\Leftrightarrow\frac{1}{2}l(h-x)=\frac{1}{2}ly+\frac{1}{2}lz\Leftrightarrow h-x=y+z\Leftrightarrow h=x+y+z.$$

Quindi la somma $x+y+z$ è sempre uguale ad h e la riposta esatta è la C).

6 L'equazione di secondo grado $xy+px+qy+r=0$ è l'equazione di una conica. Dall'applicazione dei determinanti alla geometria analitica sappiamo che una conica è degenere se il determinante della matrice associata è nullo, altrimenti la conica è non degenere.

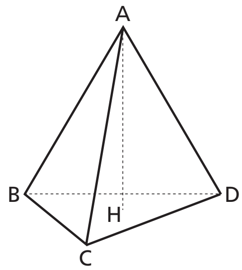
$$\det\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{2} & \frac{p}{2}\\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{q}{2}\\ \frac{p}{2} & \frac{q}{2} & r\end{bmatrix}=\frac{1}{8}pq+\frac{1}{8}pq-\frac{1}{4}r=\frac{1}{4}(pq-r).$$

Si ha che $\det\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{2} & \frac{p}{2}\\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{q}{2}\\ \frac{p}{2} & \frac{q}{2} & r\end{bmatrix}=0\Leftrightarrow\frac{1}{4}(pq-r)=0\Leftrightarrow pq=r.$

Quindi l'equazione della conica $xy+px+qy+r=0$ rappresenta l'insieme di due rette se e solo se $pq=r$.
Infatti sostituendo la relazione $pq=r$ nell'equazione della conica data questa diventa $(x+q)(y+p)=0$ che rappresenta l'equazione della coppia di rette parallele agli assi cartesiani: $x=-q$ e $y=-p$.
Nel caso non si conosca l'applicazione dei determinanti alle coniche, il quesito può essere risolto nel seguente modo.
Se esprimiamo y in funzione di x, si ottiene $y=-\frac{px+r}{x+q}$. Si tratta di una funzione omografica che per $pq\neq r$ rappresenta un'iperbole equilatera, e che per $pq=r$ diventa $y=-\frac{px+pq}{x+q}$, con $x+q\neq 0$. Se stu-

diamo l'equazione nella forma $y(x+q)=-p(x+q) \Leftrightarrow (x+q)(y+p)=0$, essa rappresenta l'equazione della coppia di rette parallele agli assi cartesiani $x=-q$ e $y=-p$. Abbiamo così ritrovato il risultato precedentemente ottenuto.

7 In un tetraedro regolare $ABCD$, come quello riportato in figura 9, i vertici sono equidistanti l'uno dall'altro, quindi ogni permutazione dei vertici del tetraedro è una isometria del tetraedro in sé.



▲ **Figura 9.**

Le permutazioni dei vertici di un tetraedro sono 4!, e quindi le isometrie sono in tutto 24. Contiamo le sole isometrie dirette. Se i vertici A, B, C, D del tetraedro sono disposti come in figura 9, un osservatore posto in A vede il triangolo BCD percorso in senso antiorario. Un'isometria che trasforma A, B, C, D rispettivamente in A', B', C' e D' è diretta se un osservatore posto in A' vede il triangolo $B'C'D'$ percorso in senso antiorario, altrimenti è indiretta. Per ogni isometria diretta ne esiste sempre una indiretta, quella che si ottiene dalla diretta scambiando due vertici trasformati. Si conclude che le isometrie dirette sono 12 di cui una è l'identità. Per individuare le rimanenti 11 isometrie consideriamo le simmetrie del tetraedro.
I 4 assi di rotazione passanti per un vertice ed il centro della faccia opposta danno origine a due rotazioni una di 120° e una di 240°. Si ottengono quindi 8 isometrie dirette. Ci sono inoltre tre assi di simmetria che sono rette congiungenti i punti medi di due spigoli opposti ma che sono anche assi di rotazione. Eseguendo attorno a ciascuno di essi una rotazione di 180° si ottengono le rimanenti 3 isometrie dirette.
Quindi le isometrie dirette sono 12 e sono: 4 rotazioni di 120°, 4 rotazioni di 240°, 3 rotazioni di 180° e l'identità.

8 Sostituendo le coordinate (x, y) con $(1,0)$ e le coordinate (X, Y) con $(1, -1)$ nelle equazioni dell'affinità:

$$\begin{cases} X=ax+by \\ Y=\dfrac{1}{2}bx-2 \end{cases}$$

otteniamo: $\begin{cases} 1=a \\ -1=\dfrac{1}{2}b-2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases}$.

L'affinità richiesta è quindi: $\begin{cases} X=x+2y \\ Y=x-2 \end{cases}$.

Per verificare se ammette rette unite scriviamo le equazioni della trasformazione inversa:

$$\begin{cases} x=Y+2 \\ 2y=X-Y-2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=Y+2 \\ y=\dfrac{1}{2}X-\dfrac{1}{2}Y-1 \end{cases}.$$

Con queste equazioni trasformiamo la retta generica $y=mx+q$. Si ha:

$$\frac{1}{2}X-\frac{1}{2}Y-1=m(Y+2)+q \Leftrightarrow Y=\frac{1}{2m+1}X-\frac{2q}{2m+1}-2.$$

L'affinità data ammette rette unite se:

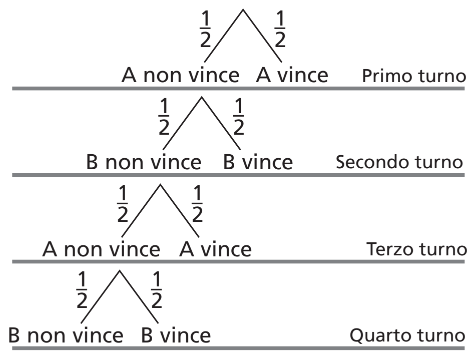
$$\begin{cases} m=\dfrac{1}{2m+1} \\ q=-\dfrac{2q}{2m+1}-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m^2+m-1=0 \\ q=-\dfrac{4m+2}{2m+3} \end{cases}.$$

Dalla prima equazione si ottiene: $m = -1 \vee m = \frac{1}{2}$. Sostituendo nella seconda equazione si ottengono le seguenti coppie di valori per m e q: $\begin{cases} m = -1 \\ q = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} m = \frac{1}{2} \\ q = -1 \end{cases}$.

Le equazioni delle due rette unite sono quindi: $y = -x + 2$ e $y = \frac{1}{2}x - 1$.

Cerchiamo eventuali rette unite, parallele all'asse y, di equazione $x = h$. La retta $x = h$ viene trasformata nella retta $Y = h - 2$ che è parallela all'asse delle ascisse, quindi diversa dalla retta originale.
La trasformazione ha quindi solo due rette unite.

9 Un gioco è equo quando le poste dei due giocatori sono direttamente proporzionali alla probabilità di vincita. Indicate con $p(A)$ la probabilità che vinca A, con $p(B)$ la probabilità che vinca B, poiché i giocatori A e B puntano la stessa somma S, affinché il gioco sia equo deve verificarsi $p(A) = p(B)$. Calcoliamo $p(A)$ e $p(B)$ utilizzando il teorema della probabilità composta, aiutati dal diagramma ad albero di figura 10 in cui sono riportati i 4 turni di gioco e le possibili successioni degli eventi stocasticamente dipendenti che formano l'evento composto.
I rami uscenti da un nodo (che in questo caso è un turno di gioco) rappresentano eventi incompatibili e sommando le rispettive probabilità otteniamo il valore 1. Il giocatore A può vincere al primo o al terzo turno, quindi $p(A) = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$; il giocatore B può vincere al secondo o al quarto turno, quindi $p(B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{5}{16}$. Infine la probabilità che nessuno dei due giocatori vinca e ciascuno riprenda la somma che aveva puntato è pari ad $\frac{1}{16}$. Poiché $p(A) = 2 \cdot p(B)$, il gioco non è equo.
Il gioco sarebbe equo se la puntata del giocatore A fosse doppia di quella del giocatore B.



▲ **Figura 10.**

10 Nell'intervallo [1, 2] la funzione $\cos x$ è decrescente ed è minore 1, quindi si ha $x > \cos x$ e la funzione $f(x) = \frac{1}{x - \cos x}$ è positiva nell'intervallo considerato. Per il calcolo approssimato dell'integrale $\int_1^2 \frac{1}{x - \cos x} dx$ utilizziamo il metodo dei trapezi. Non avendo alcun vincolo sulla precisione dell'approssimazione, scegliamo una suddivisione dell'intervallo [1, 2] in 4 sottointervalli uguali di ampiezza $h = \frac{1}{4}$ mediante i 5 punti $x_k = 1 + k\frac{1}{4}$, $k = 0, 1, \dots, 4$. L'approssimazione fornita dal metodo dei trapezi si esprime nel senguente modo:

$$\int_1^2 f(x)\, dx = \int_1^2 \frac{1}{x - \cos x} dx \simeq \frac{1}{4}\left(\frac{f(1) + f(2)}{2} + f\left(\frac{5}{4}\right) + f\left(\frac{6}{4}\right) + f\left(\frac{7}{4}\right)\right).$$

Con l'aiuto di una calcolatrice scientifica predisposta sulla modalità **RAD** calcoliamo i 5 valori di $f(x)$, otteniamo:

$$\int_1^2 \frac{1}{x - \cos x} dx \simeq 0{,}896.$$

Per esercitarti ancora sugli argomenti trattati nel	Svolgi il
Problema 1	• Problema 246 pag. W 121 • Esercizio 56 pag. V 244 • Problema 19 pag. V 285 (punto a) • Problema 12 pag. V 289 • Esercizio 521 pag. L 85
Problema 2	• Problema 7 pag. β 67 (punti a e b) • Problema 23 pag. α 96 • Problema 9 pag. α 99 • Problema 19 pag. α 100
Quesito 1	• Quesito 4 pag. U 110 • Quesito 6 pag. U 207 • Quesito 3 pag. U 247
Quesito 2	• Esercizio 144 pag. U 237 • Esercizio 146 pag. U 237
Quesito 3	• Quesito 1 pag. V 215 • Quesito 3 pag. V 215 • Quesito 7 pag. W 173
Quesito 4	• Quesito 3 pag. N 95 • Esercizio 555 pag. N 78 • Quesito 4 pag. W 167
Quesito 5	• Problema 23 pag. P^+ 209
Quesito 6	• Esercizio 317 pag. T 74 • Esercizio 12 pag. T 78 • Problema 8 pag. L 421 (punti b, d)
Quesito 7	• Quesito 24 pag. P^+ 168 • Esercizio 29 pag. π 73
Quesito 8	• Quesito 4 pag. J1 119 • Problema 24 pag. J1 123 (punto a) • Problema 26 pag. J1 123 (punto a)
Quesito 9	• Quesito 2 pag. σ 74 • Problema 11 pag. σ 75
Quesito 10	• Problema 11 pag. ι 58 (punto b) • Problema 18 pag ι 59 (punto b)