ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2004

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1

Sia γ la curva d'equazione:

$$y = ke^{-\lambda x^2}$$

ove k e λ sono parametri positivi.

1. Si studi e si disegni γ;
2. si determini il rettangolo di area massima che ha un lato sull'asse x e i vertici del lato opposto su γ;
3. sapendo che $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$ e assumendo $\lambda = \frac{1}{2}$, si trovi il valore da attribuire a k affinché l'area compresa tra γ e l'asse x sia 1;
4. per i valori di k e λ sopra attribuiti, γ è detta *curva standard degli errori* o *delle probabilità* o *normale di Gauss* [da *Karl Friedrich Gauss* (*1777-1855*)]. Una *media* $\mu \neq 0$ e uno *scarto quadratico medio* $\sigma \neq 1$ come modificano l'equazione e il grafico?

PROBLEMA 2

Sia f la funzione così definita:

$$f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{\pi}{2b}x\right) + x$$

con a e b numeri reali diversi da zero.

1. Si dimostri che, comunque scelti a e b, esiste sempre un valore di x tale che

$$f(x) = \frac{a+b}{2}$$

2. Si consideri la funzione g ottenuta dalla f ponendo $a = 2b = 2$. Si studi g e se ne tracci il grafico.
3. Si consideri per $x > 0$ il primo punto di massimo relativo e se ne fornisca una valutazione approssimata applicando un metodo iterativo a scelta.

QUESTIONARIO

1 La misura degli angoli viene fatta adottando una opportuna unità di misura. Le più comuni sono i gradi *sessagesimali*, *i radianti*, i gradi *centesimali*. Quali ne sono le definizioni?

2 Si provi che la superficie totale di un cilindro equilatero sta alla superficie della sfera ad esso circoscritta come 3 sta a 4.

3 Un solido viene trasformato mediante una similitudine di rapporto 3. Come varia il suo volume? Come varia l'area della sua superficie?

4 Dati gli insiemi $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{a, b, c\}$ quante sono le applicazioni (le funzioni) di A in B?

5 Dare un esempio di funzione g, non costante, tale che:

$$\lim_{x \to 2} g(x) = 3 \text{ e } g(2) = 4.$$

6 Dare un esempio di funzione $f(x)$ con un massimo relativo in $(1, 3)$ e un minimo relativo in $(-1, 2)$.

7 Tra i triangoli di base assegnata e di uguale area, dimostrare che quello isoscele ha perimetro minimo.

8 Si trovino due numeri reali a e b, $a \neq b$, che hanno somma e prodotto uguali.

9 Si dimostri che l'equazione $e^x + 3x = 0$ ammette una e una sola soluzione e se ne calcoli un valore approssimato utilizzando un metodo iterativo a scelta.

10 Nel piano è data la seguente trasformazione:

$$x \to x\sqrt{3} - y$$
$$y \to x + y\sqrt{3}$$

Di quale trasformazione si tratta?

Durata massima della prova: 6 ore
È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

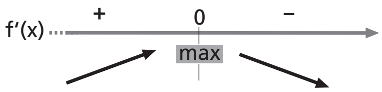
SOLUZIONE DELLA PROVA D'ESAME
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2004

PROBLEMA 1

1. La funzione $f(x) = ke^{-\lambda x^2}$, $k > 0$, $\lambda > 0$, è definita e positiva su tutto $\mathbb{R}$.
$f(-x) = f(x)$, la funzione è pari. Il grafico della funzione è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate. Il grafico interseca l'asse delle ordinate nel punto $M(0, k)$.

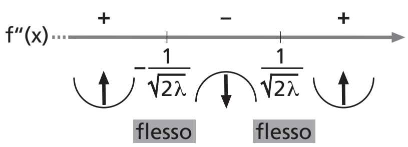
$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$$

La retta $y = 0$ è un asintoto orizzontale. Non ci sono altri asintoti.
Derivata prima: $f'(x) = -2\lambda kxe^{-\lambda x^2} > 0$, se $x < 0$. Lo schema di figura 1 mostra che la funzione ha un massimo in $x = 0$. $f(0) = k$, allora $M(0, k)$ è un punto di massimo assoluto per il grafico della funzione.



◀ **Figura 1.**

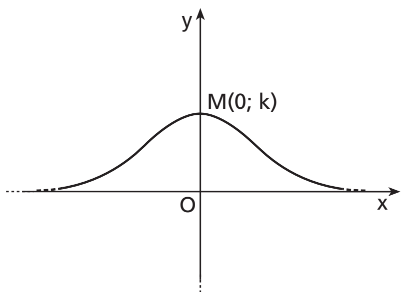
Derivata seconda: $f''(x) = -2\lambda ke^{-\lambda x^2} - 2\lambda kx(-2\lambda xe^{-\lambda x^2}) = 2\lambda ke^{-\lambda x^2}(2\lambda x^2 - 1) > 0$, se $(2\lambda x^2 - 1) > 0$, che si ottiene per $x < -\frac{1}{\sqrt{2\lambda}}$ e per $x > \frac{1}{\sqrt{2\lambda}}$. La funzione ha la concavità rivolta verso l'alto per $x < -\frac{1}{\sqrt{2\lambda}}$ e per $x > \frac{1}{\sqrt{2\lambda}}$ e rivolta verso il basso per $-\frac{1}{\sqrt{2\lambda}} < x < \frac{1}{\sqrt{2\lambda}}$ (figura 2).



◀ **Figura 2.**

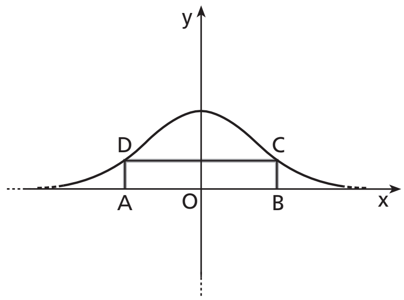
Il grafico della funzione presenta due punti di flesso $F_1\left(-\frac{1}{\sqrt{2\lambda}}; ke^{-\frac{1}{2}}\right)$ e $F_2\left(\frac{1}{\sqrt{2\lambda}}; ke^{-\frac{1}{2}}\right)$.

L'andamento del grafico della funzione (ponendo, per esempio $k = \lambda = 1$) è rappresentato in figura 3. All'aumentare del valore di k aumenta il valore massimo della funzione; all'aumentare del valore di λ la forma "a campana" della curva si restringe.



◀ **Figura 3.**

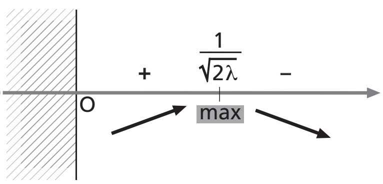
2. Con riferimento alla figura 4, detta x l'ascissa del punto B, per ragioni di simmetria i vertici del rettangolo saranno: $A(-x; 0)$, $B(x; 0)$, $C(x; f(x))$, $D(-x; f(-x))$. La funzione è pari, $f(-x) = f(x)$, quindi l'area del rettangolo $ABCD$ vale $y = 2x \cdot f(x) = 2kxe^{-\lambda x^2}$, con $x > 0$.



◀ **Figura 4.**

$$y' = 2ke^{-\lambda x^2}(1 - 2\lambda x^2) > 0, \text{ se } 0 < x < \frac{1}{\sqrt{2\lambda}}.$$

Lo schema di figura 5 mostra che l'area del rettangolo $ABCD$ è minima per $x = 0$, massima per $x = \frac{1}{\sqrt{2\lambda}}$, cioè quando i punti C e D coincidono con i flessi. L'area massima vale $2\frac{1}{\sqrt{2\lambda}}\,ke^{-\frac{1}{2}}$.



◀ **Figura 5.**

3. L'area compresa tra γ e l'asse x, posto $\lambda = \frac{1}{2}$, risulta:

$$\boldsymbol{A} = \int_{-\infty}^{+\infty} ke^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx = k\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx,$$

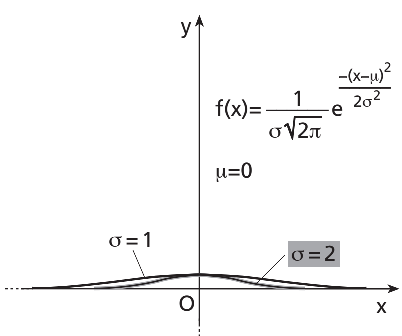
ponendo $t = \frac{x}{\sqrt{2}}$ e quindi $dx = \sqrt{2} \cdot dt$ si ottiene:

$$\boldsymbol{A} = k\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\sqrt{2} \cdot dt = \sqrt{2}\,k\sqrt{\pi},$$

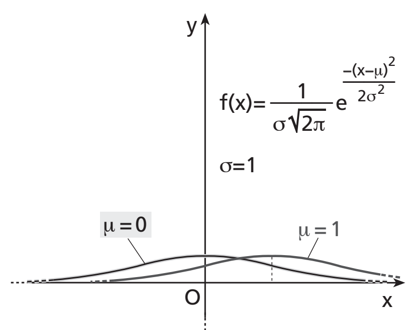
da cui $\boldsymbol{A} = 1$ se $k\sqrt{2\pi} = 1$, dunque $k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ è il valore cercato.

4. La normale di Gauss ha equazione generale $y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$.

Un aumento dello scarto quadratico medio σ determina una diminuzione del valore di k e quindi diminuisce l'ordinata del punto di massimo. Inoltre la forma della curva diventa più "piatta" ed aumenta la dispersione rispetto al valore medio (figura 6). Se la media μ è diversa da zero la curva risulta traslata rispetto all'asse delle x di una quantità pari a μ (figura 7).



◀ **Figura 6.**



◀ **Figura 7.**

■ **PROBLEMA 2**

1. Una funzione f, continua in $[a; b]$, con $f(a) \neq f(b)$, assume, almeno una volta, nell'interno di tale intervallo, un qualsiasi valore compreso fra $f(a)$ e $f(b)$. (Teorema dei valori intermedi, o di Darboux)

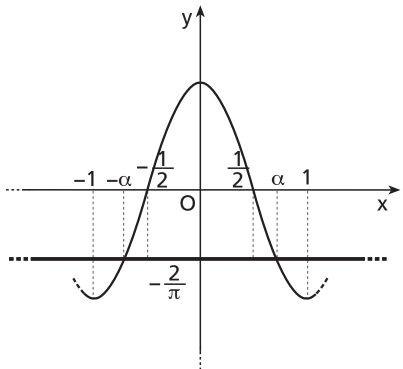
La funzione $f(x) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{\pi}{2b}x\right) + x$ è continua su tutto $\mathbb{R}$, in particolare nell'intervallo chiuso limitato $[a; b]$. In tale intervallo la funzione assume ogni valore compreso tra $f(a) = a$ e $f(b) = b$, in particolare il valore $\frac{f(a)+f(b)}{2} = \frac{a+b}{2}$.

2. Ponendo $a = 2b = 2$ si ottiene $g(x) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + x = \frac{1}{2}\text{sen}(\pi x) + x$.

$g(-x) = -g(x)$, la funzione è dispari, quindi simmetrica rispetto all'origine degli assi. $g(0) = 0$, il grafico passa per l'origine.

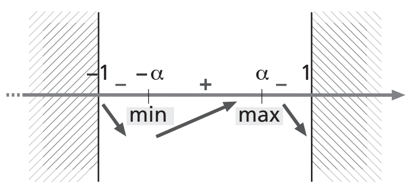
$\lim_{x \to \pm\infty} g(x) = \pm\infty$

$g'(x) = \frac{1}{2}\pi\cos(\pi x) + 1 > 0$, se $\cos(\pi x) > -\frac{2}{\pi}$. La rappresentazione grafica di $g'(x)$ (figura 8) mostra che $\cos(\pi x) > -\frac{2}{\pi} \Rightarrow -\alpha + 2k < x < \alpha + 2k$, con $\alpha = \frac{1}{\pi}\arccos\left(-\frac{2}{\pi}\right)$ e $k \in \mathbb{Z}$.



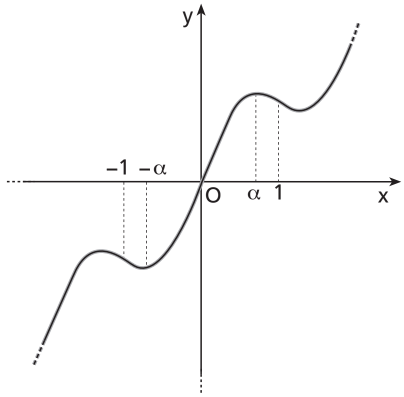
◀ **Figura 8.**

Si hanno quindi punti di minimo relativo per $x = -\frac{1}{\pi}\arccos\left(-\frac{2}{\pi}\right) + 2k$ e punti di massimo relativo per $x = \frac{1}{\pi}\arccos\left(-\frac{2}{\pi}\right) + 2k$ (vedi figura 9).



◀ **Figura 9.**

$g''(x) = -\frac{\pi^2}{2}\text{sen}(\pi x) > 0$, se $\text{sen}(\pi x) < 0$, tale condizione è verificata per $1 + 2k < x < 2 + 2k$. Si hanno punti di flesso per $x = 1 + 2k$ e $x = 2 + 2k$. Il grafico di g è rappresentato in figura 10.



◀ **Figura 10.**

3. Al punto precedente si è ottenuto: $g'(\alpha) = \frac{\pi \cdot \cos \pi}{2} + 1 = 0$.

Considerando che: $g'\left(\frac{1}{2}\right) = 1 > 0$ e

$g'(1) = -\frac{\pi}{2} + 1 < 0$, segue che $\alpha \in \left]\frac{1}{2}; 1\right[$.

Si applica il metodo di bisezione a $g'(x)$, ottenendo:

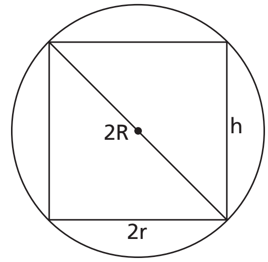
c	*f*(*c*)	α
$0{,}75 = (0{,}5 + 1)/2$	$-0{,}11 < 0$	$0{,}5 < \alpha < 0{,}75$
$0{,}625 = (0{,}5 + 0{,}75)/2$	$-0{,}40 > 0$	$0{,}625 < \alpha < 0{,}75$
$0{,}6875 = (0{,}625 + 0{,}75)/2$	$-0{,}13 > 0$	$0{,}6875 < \alpha < 0{,}75$
$0{,}71875 = (0{,}6875 + 0{,}75)/2$	…	…

Si arriva infine al valore $\alpha \cong 0{,}72$.

QUESTIONARIO

1 Il grado sessagesimale è 1/90 di angolo retto; il grado centesimale è 1/100 di angolo retto. Il radiante è l'angolo al centro di una circonferenza che sottende un arco di lunghezza uguale al raggio.

2 Detto R il raggio della sfera, r il raggio del cilindro e h la sua altezza, valgono le seguenti relazioni: $h=2r$ (il cilindro è equilatero), $2R=h\sqrt{2}$ ($2R$ è la diagonale del quadrato di lato $h=2r$, figura 11). Dunque $R=r\sqrt{2}$.
La superficie della sfera risulta $S_{sfera}=4\pi R^2=8\pi r^2$, quella del cilindro è $S_{cil}=2\pi r^2+2\pi rh=6\pi r^2$, il rapporto tra le due aree è $\frac{3}{4}$.



▲ **Figura 11.**

3 Le aree di due solidi simili stanno tra loro come i quadrati delle misure lineari, nel caso in esame il rapporto è $3^2=9$. I volumi di due solidi simili stanno tra loro come i cubi delle misure lineari, il rapporto è quindi $3^3=27$.

4 Per la definizione di funzione, ad ognuno dei 4 elementi di A può corrispondere uno ed uno solo dei 3 elementi di B. Le applicazioni di A in B sono pari alle disposizioni con ripetizione di 3 oggetti di classe 4:

$$D^*_{3,4}=3^4.$$

5 Consideriamo per semplicità la funzione algebrica definita a tratti:

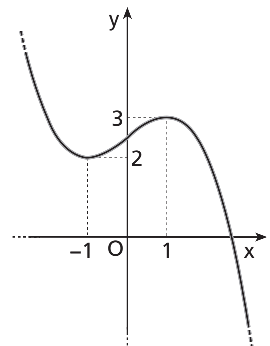
$$g(x)=\begin{cases} g(x)=x+1 & \text{se } x\neq 2 \\ g(x)=4 & \text{se } x=2 \end{cases},$$

$g(x)$ è definita ovunque e discontinua in $x=2$.

6 Si consideri una cubica $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$. La derivata è $f'(x)=3ax^2+2bx+c$. La derivata si deve annullare per $x=\pm 1$. Imponendo il passaggio per i punti $(-1;\,2)$ e $(1;\,3)$, si ottiene:

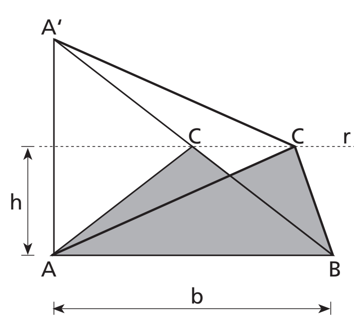
$$\begin{cases} f'(-1)=3a-2b+c=0 \\ f'(1)=3a+2b+c=0 \\ f(-1)=-a+b-c+d=2 \\ f(1)=a+b+c+d=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-\frac{1}{4} \\ b=0 \\ c=\frac{3}{4} \\ d=\frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow f(x)=-\frac{1}{4}x^3+\frac{3}{4}x+\frac{5}{2}.$$

La funzione è rappresentata in figura 12.



▶ **Figura 12.**

7 Con riferimento alla figura 13, si considerino i triangoli di uguale base $AB=b$. I triangoli hanno la stessa area, quindi anche l'altezza è sempre la stessa e vale $h=\frac{2S}{b}$, in cui S è l'area uguale per tutti i triangoli. Allora il terzo vertice C appartiene alla retta r parallela alla retta di AB, ad una distanza h. Per rendere minimo il perimetro, dato che AB è costante, occorre rendere minima la somma $AC+CB$. Considerando A' simmetrico di A rispetto alla retta r, risulta $AC=A'C$, quindi il perimetro è minimo per il valore minimo di $A'C+CB$, che si verifica se A', C e B sono allineati. In tal caso C è il punto medio di $A'B$, quindi $CB=A'C=AC$, dunque $AC=CB$: il triangolo è isoscele.



▲ **Figura 13.**

8 $a \neq b,\ a+b=a\cdot b \Rightarrow a=\dfrac{b}{b-1}$. Per esempio $b=\dfrac{1}{2}$ ed $a=-1$ rispondono alla richiesta.

9 La funzione $f(x)=e^x+3x$ è definita e continua su tutto l'asse reale, quindi anche in $[-1;\ 0]$. Risulta $f(-1)=e^{-1}-3<0$, e $f(0)=1>0$, quindi per il teorema degli zeri $f(x)$ si annulla almeno una volta nell'intervallo $]-1;\ 0[$. Inoltre la funzione è sempre derivabile, con derivata $f'(x)=e^x+3>0$, $\forall x$: la funzione è strettamente crescente e quindi si annulla una sola volta.
Applicando il metodo di bisezione si ottiene:

c	$f(c)$	α
$-0{,}5$	$-0{,}893 < 0$	$-0{,}5<\alpha<0$
$-0{,}25$	$+0{,}029 > 0$	$-0{,}5<\alpha<0{,}25$
$-0{,}375$	…	…

Procedendo per approssimazioni successive si ottiene $x \cong -0{,}2576$.

10 La trasformazione si può scrivere: $\begin{cases} x' = 2\cdot\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}x-\dfrac{1}{2}y\right) \\ y' = 2\cdot\left(\dfrac{1}{2}x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}y\right) \end{cases}$, quindi la trasformazione è una composizione di una rotazione di 30° e di una omotetia di rapporto $k=2$.

Per esercitarti ancora sugli argomenti affrontati nel	Svolgi il
Problema 1	• Problema 12 pag. V 91 (punti a, b) • Problema 16 pag. V 137 (punti a, b) • Problema 9 pag. V 283 (punti a, b) • Problema 19 pag. W 138 (punti a, b)
Problema 2	• Quesito 12 pag. U 208 • Problema 14 pag. ι 33 • Problema 20 pag. V 285 (punto a)
Quesito 2	• Quesito 9 pag. π 96
Quesito 4	• Problema 13 pag. α 41 (punto b) • Problema 21 pag. α 42 (punto b) • Problema 26 pag. α 43 (punti c, f)
Quesito 5	• Quesito 5 pag. U 247
Quesito 6	• Quesito 4 pag. V 215
Quesito 9	• Quesito 1 pag. ι 31 • Problema 14 pag. ι 33 • Problema 19 pag. ι 34