ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2002
Sessione straordinaria

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1

Considerato il seguente sistema lineare nelle incognite x, y, z:

$$\begin{cases} x + ay + a^2z = 1 \\ x + ay + abz = a \\ bx + a^2y + a^2bz = a^2b \end{cases} \qquad [1]$$

a) stabilire sotto quali condizioni per i parametri reali a, b esso è:
determinato;
indeterminato;
impossibile.

b) Posto che la terna $(x; y; z)$ sia una soluzione del sistema [1], studiare la curva di equazione:

$$y - \frac{b}{a(a-b)} = \frac{x}{a} + z$$

e disegnarne l'andamento in un riferimento cartesiano ortogonale (Oab).

PROBLEMA 2

Con riferimento a un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy):

a) studiare le funzioni:

$$y = \frac{-2x^3 + 6x^2}{3}, \qquad y = \frac{x^3 - 6x^2 + 12x}{3}$$

e disegnare i loro grafici;

b) dopo aver verificato che, oltre al punto O, tali grafici hanno in comune un altro punto A, determinare sul segmento OA un punto P tale che, condotta per esso la retta parallela all'asse y, sia massima la lunghezza del segmento RS, dove R ed S sono i punti in cui la retta interseca i due grafici suddetti;

c) determinare le coordinate dei punti di ascisse uguali in cui le due curve hanno tangenti parallele e verificare che, oltre al punto A, si ritrovano i punti R ed S;

d) calcolare il volume del solido generato dalla regione finita di piano delimitata dalle due curve quando ruota di un giro completo intorno all'asse x.

QUESTIONARIO

1 In un piano è assegnata una parabola p. Tracciata la tangente t a essa nel suo vertice, chiamati M ed N due punti di p simmetrici rispetto al suo asse e indicate con M' ed N' rispettivamente le proiezioni ortogonali di M ed N sulla retta t, determinare il rapporto fra l'area della regione piana delimitata dalla parabola e dalla retta MN e quella del rettangolo $MNN'M'$, fornendo una esauriente dimostrazione.

2 Si consideri un cono circolare retto ottenuto dalla rotazione di un triangolo isoscele intorno all'altezza propriamente detta. Sapendo che il perimetro del triangolo è costante, stabilire quale rapporto deve sussistere fra il lato del triangolo e la sua base affinché il cono abbia volume massimo.

3 In un riferimento monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy) è assegnata l'iperbole di equazione $y=\frac{1}{x}$. Considerati su di essa i punti A e B di ascisse rispettivamente a e $\frac{1}{a}$, con $a \neq 0$, si traccino le tangenti all'iperbole in A e B. Calcolare l'area della regione piana delimitata dall'iperbole e dalle tangenti considerate.

4 Dopo aver definito il limite destro e il limite sinistro di una funzione in un punto, ricorrere a tali definizioni per verificare che risulta:

$$\lim_{x\to 0^-}\left(x+\frac{x}{|x|}\right)=-1, \lim_{x\to 0^+}\left(x+\frac{x}{|x|}\right)=1.$$

5 Considerata la funzione $f(x)=2+\sqrt[3]{x-2}$, stabilire se è continua e derivabile nel punto $x=2$ e fornire un'interpretazione geometrica delle conclusioni.

6 Dimostrare la formula che esprime il numero delle combinazioni semplici di n oggetti presi a k a k in funzione del numero delle disposizioni semplici degli stessi oggetti presi a k a k e delle permutazioni semplici su k oggetti.

7 Un'urna contiene 100 palline numerate da 1 a 100. Determinare la probabilità che estraendo a caso una pallina, essa sia contrassegnata da un numero:
a) divisibile per 10 o per 8,
b) divisibile per 10 e per 8,
c) non divisibile per 10 né per 8.

8 Con riferimento a un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), determinare le coordinate del baricentro del triangolo in cui l'omotetia di centro (1; 2) e caratteristica $\frac{1}{4}$ trasforma il triangolo di vertici (4; 0), (−4; 4), (0; 8).

9 Tra le affinità di equazioni:

$$\begin{cases} X=ax+by \\ Y=cx+dy \end{cases}$$

assegnate in un piano riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), determinare quella che trasforma i punti di coordinate $(3; \sqrt{2})$ e $\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}; 0\right)$ ordinatamente nei punti di coordinate $\left(\frac{1}{3}; \frac{7\sqrt{2}}{3}\right)$ e $\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}; 2\right)$.

10 Scrivere un algoritmo che risolva il problema di determinare una radice approssimata di un'equazione con un'approssimazione voluta.

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

PROBLEMA 1

a) Considerato il sistema:

$$\begin{cases} x+ay+a^2z=1 \\ x+ay+abz=a \\ bx+a^2y+a^2bz=a^2b \end{cases} \qquad [1]$$

sostituendo alla prima equazione la differenza tra la prima e la seconda equazione, si ottiene il seguente sistema equivalente:

$$\begin{cases} (a^2-ab)z=1-a \\ x+ay+abz=a \\ bx+a^2y+a^2bz=a^2b \end{cases} \qquad [2]$$

Il determinante della matrice dei coefficienti è:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & a^2-ab \\ 1 & a & ab \\ b & a^2 & a^2b \end{vmatrix} = (a^2-ab)^2 = a^2(a-b)^2.$$

Per il teorema di Cramer, se $a \neq 0 \wedge a \neq b$ il sistema è determinato.
Se $a=0$ il sistema è impossibile, poiché la prima equazione del sistema [2] diventa $0=1$.
Se $a=b$ il sistema [2] diventa:

$$\begin{cases} 0=1-a \\ x+ay+a^2z=a \\ ax+a^2y+a^3z=a^3 \end{cases}$$

che è impossibile per $a \neq 1$.
Se $a=b=1$ il sistema risulta:

$$\begin{cases} 0=0 \\ x+y+z=1 \\ x+y+z=1 \end{cases}$$

che è indeterminato.
In conclusione il sistema [1] è determinato per $a \neq 0 \wedge a \neq b$, è indeterminato per $a=b=1$, è impossibile per $a=0 \vee a=b \neq 1$.

b) Sia $a \neq 0 \wedge a \neq b$. Determiniamo la soluzione del sistema. Dalla prima equazione del sistema [2] si ottiene:

$$z=\frac{1-a}{a(a-b)}.$$

Per il teorema di Cramer ricaviamo x:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1-a & 0 & a^2-ab \\ a & a & ab \\ a^2b & a^2 & a^2b \end{vmatrix}}{a^2(a-b)^2} = \frac{a^2(1-b)}{a-b}.$$

Sostituendo le espressioni di x e z trovate, nella seconda equazione $x + ay + abz = a$, si ottiene:

$$y = \frac{b(a^2-1)}{a(a-b)}.$$

La terna, soluzione del sistema [1], è perciò $\left(\frac{a^2(1-b)}{a-b}; \frac{b(a^2-1)}{a(a-b)}; \frac{1-a}{a(a-b)}\right)$.

Sostituendo tale terna nell'equazione della curva, $y - \frac{b}{a(a-b)} = \frac{x}{a} + z$, si ricava:

$$\frac{b(a^2-1)}{a(a-b)} - \frac{b}{a(a-b)} = \frac{a^2(1-b)}{a(a-b)} + \frac{1-a}{a(a-b)} \rightarrow 2b(a^2-1) = a^2 - a + 1.$$

L'equazione della curva da disegnare è pertanto:

$$b = \frac{a^2-a+1}{2(a^2-1)},$$

dalla quale dovremo escludere i punti con $a = 0 \wedge a = b$, cioè il punto di coordinate $\left(0; -\frac{1}{2}\right)$ e quelli di intersezione con la retta $a = b$, bisettrice del primo e terzo quadrante.

Il campo di esistenza della funzione è $\mathbb{R} - \{\pm 1\}$. Poiché il polinomio $a^2 - a + 1$ ha discriminante negativo, esso assume solo valori positivi. Quindi il grafico della funzione non interseca l'asse a, mentre interseca l'asse b in $\left(0; -\frac{1}{2}\right)$. La funzione è positiva se $a^2 - 1 > 0$, cioè se $a < -1 \vee a > 1$. I limiti per $a \rightarrow \pm\infty$ e $a \rightarrow \pm 1$ valgono:

$$\lim_{a \to \pm\infty} \frac{a^2-a+1}{2(a^2-1)} = \frac{1}{2},$$

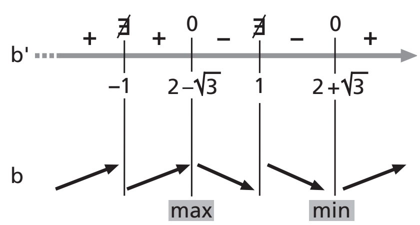
$$\lim_{a \to -1^{\pm}} \frac{a^2-a+1}{2(a^2-1)} = \mp\infty,$$

$$\lim_{a \to 1^{\pm}} \frac{a^2-a+1}{2(a^2-1)} = \pm\infty.$$

Ne segue che la retta $b = \frac{1}{2}$ è asintoto orizzontale per $a \rightarrow \pm\infty$, mentre le rette $a = 1$ e $a = -1$ sono asintoti verticali. Studiamo ora la derivata prima.

$$b'(a) = \frac{(2a-1)\cdot 2(a^2-1) - 4a(a^2-a+1)}{4(a^2-1)^2} = \frac{a^2-4a+1}{2(a^2-1)^2}$$

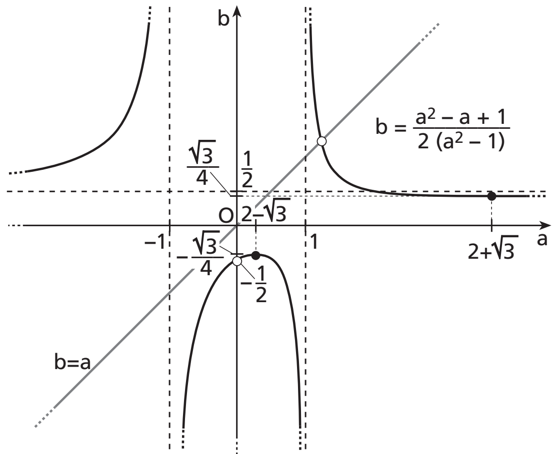
che è nulla se $a = 2 \pm \sqrt{3}$. La figura 1 riassume lo schema del segno.



▲ **Figura 1.**

La funzione presenta un massimo per $a = 2 - \sqrt{3}$, con $f(2-\sqrt{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{4}$, e un minimo per $a = 2 + \sqrt{3}$, con $f(2+\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Nella figura 2 è rappresentato il grafico della funzione.



▶ **Figura 2.**

PROBLEMA 2

a) Entrambe le funzioni sono di tipo polinomiale e hanno come campo di esistenza l'insieme dei numeri reali. Studiamo prima la funzione $f(x) = \frac{-2x^3 + 6x^2}{3}$.

Poiché $f(x) = -\frac{2x^2(x-3)}{3}$, la funzione è positiva se $x < 0 \vee 0 < x < 3$, negativa se $x > 3$ e il suo grafico interseca gli assi nei punti (0; 0) e (3; 0). Calcoliamo i limiti per $x \to \pm\infty$:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{-2x^3 + 6x^2}{3} = \mp\infty.$$

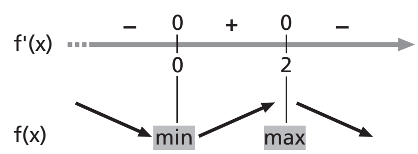
Verifichiamo se la funzione f ammette asintoti obliqui:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-2x^2 + 6x}{3} = -\infty.$$

Ne segue che non vi sono asintoti obliqui. Studiamo ora la derivata prima.

$$f'(x) = -2x^2 + 4x = -2x(x-2).$$

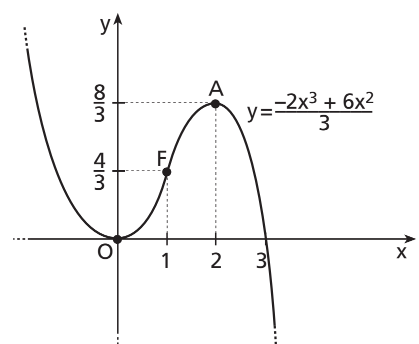
Lo schema della figura 3 ne riassume il segno.



▲ **Figura 3.**

La funzione ha perciò un minimo nel punto $O(0; 0)$ e un massimo in $A\left(2; \frac{8}{3}\right)$.

La derivata seconda è $f''(x) = -4x + 4$. Essa è positiva per $x < 1$, negativa per $x > 1$ e nulla in $x = 1$. Pertanto la funzione ha un unico flesso in $F\left(1; \frac{4}{3}\right)$ e ha la concavità rivolta verso l'alto solo per $x < 1$. Nella figura 4 è rappresentato il grafico di f.



▶ **Figura 4.**

Studiamo ora la funzione $g(x)=\frac{x^3-6x^2+12x}{3}=\frac{x(x^2-6x+12)}{3}$. Il suo campo di esistenza è l'asse reale; è positiva per $x>0$, negativa se $x<0$ e interseca gli assi solo nell'origine. Inoltre risulta:

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3\left(1-\frac{6}{x}+\frac{12}{x^2}\right)}{3}=\pm\infty.$$

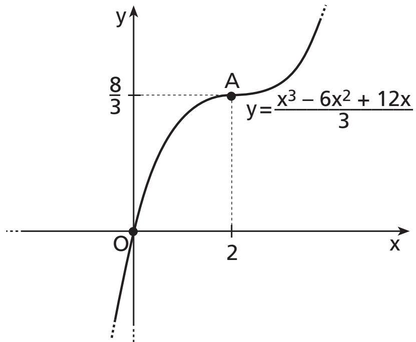
Verifichiamo se la funzione ammette asintoti obliqui:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2\left(1-\frac{6}{x}+\frac{12}{x^2}\right)}{3}=+\infty.$$

Ne segue che non vi sono asintoti obliqui. Studiamo ora la derivata prima:

$$g'(x)=x^2-4x+4=(x-2)^2.$$

Essa si annulla solo per $x=2$; diversamente è sempre positiva. La funzione g è quindi crescente. Inoltre $g''(x)=2x-4$, che è positiva per $x>2$, negativa per $x<2$ e nulla per $x=2$. In conclusione il punto $A\left(2;\frac{8}{3}\right)$ corrisponde a un flesso con tangente orizzontale e la funzione ha la concavità rivolta verso l'alto solo per $x>2$. Il grafico della funzione g è riportato in figura 5.

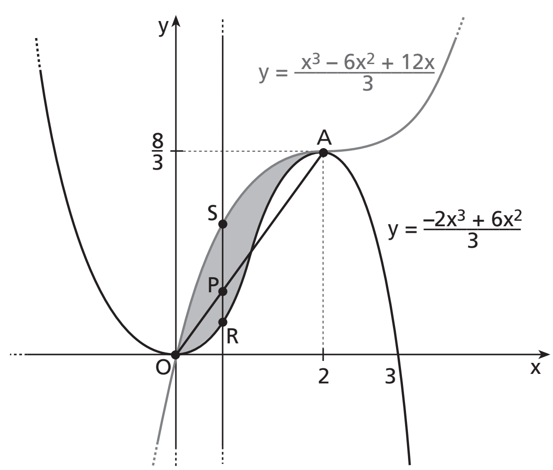


▲ **Figura 5.**

b) Come già emerso dallo studio delle due funzioni, entrambi i grafici hanno in comune, oltre all'origine, anche il punto $A\left(2;\frac{8}{3}\right)$. Verifichiamo algebricamente che non vi sono altri punti in comune, risolvendo il seguente sistema:

$$\begin{cases} y=\dfrac{-2x^3+6x^2}{3} \\ y=\dfrac{x^3-6x^2+12x}{3}\end{cases} \rightarrow\ -2x^3+6x^2=x^3-6x^2+12x\ \rightarrow\ x(x-2)^2=0\ \rightarrow\ x=0 \vee x=2.$$

Dunque O e A sono gli unici punti di intersezione tra le due curve (figura 6).
Tracciato il segmento OA, si prende un punto P su tale segmento e si tracci la parallela all'asse y passante per il punto.



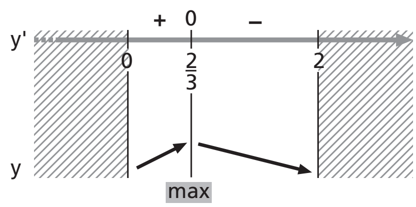
▶ **Figura 6.**

La retta OA ha equazione $y=\dfrac{4}{3}x$. Quindi $P\left(x;\ \dfrac{4}{3}x\right)$ per un valore $x\in[0;\ 2]$. Per lo stesso valore di x, si ha $R\left(x;\dfrac{-2x^3+6x^2}{3}\right)$ ed $S\left(x;\ \dfrac{x^3-6x^2+12x}{3}\right)$. Ne segue che la lunghezza del segmento RS vale:

$$\overline{RS}=\left|\frac{x^3-6x^2+12x}{3}-\frac{-2x^3+6x^2}{3}\right|=\left|x(x-2)^2\right|=x(x-2)^2,\text{ essendo } x\in[0;\ 2].$$

Cerchiamo il massimo della funzione $y=x(x-2)^2$ nell'intervallo $[0;\ 2]$. La derivata prima è $y'=3x^2-8x+4$ e lo schema seguente ne riassume il segno (figura 7).

La funzione ha un massimo per $x=\dfrac{2}{3}$. Quindi il punto P cercato ha coordinate $P\left(\dfrac{2}{3};\ \dfrac{8}{9}\right)$.



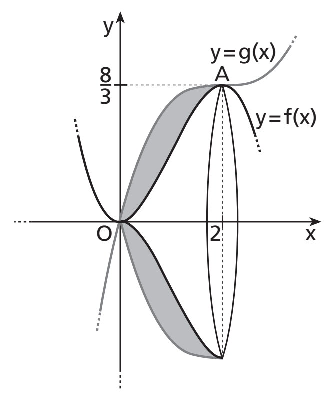
▲ **Figura 7.**

c) Consideriamo due punti generici appartenenti rispettivamente ai grafici delle funzioni f e g con uguale ascissa $a\in\mathbb{R}$. Il coefficiente angolare della retta tangente al grafico di f in a è $f'(a)=-2a^2+4a$. Mentre il coefficiente angolare della retta tangente al grafico di g in a è $g'(a)=a^2-4a+4$. Tali tangenti sono parallele se i loro coefficienti angolari sono uguali:

$$-2a^2+4a=a^2-4a+4 \quad\to\quad 3a^2-8a+4=0 \quad\to\quad a=2\vee a=\frac{2}{3}.$$

Per $a=2$ si ottiene il punto A intersezione dei due grafici e per $a=\dfrac{2}{3}$ si ritrovano i punti R ed S.

d) Il solido generato dalla regione finita di piano delimitata dalle due curve quando ruota di un giro completo intorno all'asse x è rappresentato nella figura 8.



▶ **Figura 8.**

Il corrispondente volume vale:

$$V=\pi\int_0^2[g(x)^2-f(x)^2]dx=\pi\int_0^2\left[\left(\frac{x^3-6x^2+12x}{3}\right)^2-\left(\frac{-2x^3+6x^2}{3}\right)^2\right]dx=$$

$$=\frac{\pi}{3}\int_0^2(-x^6+4x^5+8x^4-48x^3+48x^2)dx=\frac{\pi}{3}\left[-\frac{1}{7}x^7+\frac{2}{3}x^6+\frac{8}{5}x^5-12x^4+16x^3\right]_0^2=\frac{1216}{315}\pi.$$

QUESTIONARIO

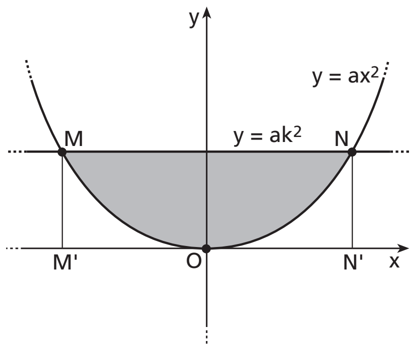
1 Consideriamo il sistema di riferimento con origine nel vertice della parabola, asse y coincidente con l'asse di simmetria della parabola e asse x tangente nel vertice, come mostrato in figura 9.
La parabola p ha equazione $y = ax^2$, con a numero reale positivo mentre le coordinate dei punti M ed N sono $M(-k;\ ak^2)$ ed $N(k;\ ak^2)$, con $k \geq 0$.
L'area della regione delimitata dalla parabola p e dalla retta MN è:

$$A = \int_{-k}^{k} (ak^2 - ax^2)dx = \left[ak^2 x - \frac{a}{3}x^3\right]_{-k}^{k} =$$

$$= ak^3 - \frac{a}{3}k^3 + ak^3 - \frac{a}{3}k^3 = \frac{4}{3}ak^3.$$

Mentre l'area del rettangolo $MNN'M'$ è $A_{MNN'M'} = 2k \cdot ak^2 = 2ak^3$.
Pertanto vale:

$$\frac{A}{A_{MNN'M'}} = \frac{\frac{4}{3}ak^3}{2ak^3} = \frac{2}{3}.$$



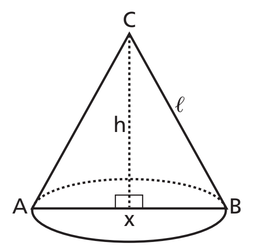
▲ **Figura 9.**

2 Sia ABC il triangolo isoscele la cui rotazione intorno all'altezza riferita alla base genera un cono circolare retto (figura 10).
Sia k il valore costante del suo perimetro e x la lunghezza della base. Ne segue che il lato obliquo misura $\frac{k-x}{2}$. L'altezza del cono è perciò:

$$h = \sqrt{l^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{k-x}{2}\right)^2 - \frac{x^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{k^2 - 2kx}.$$

Il volume del cono vale:

$$V = \frac{1}{3}A_{base} \cdot h = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{k^2 - 2kx} = \frac{\pi}{24}x^2\sqrt{k^2 - 2kx}.$$



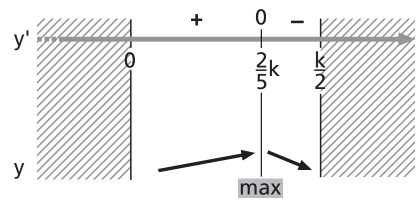
▲ **Figura 10.**

Per massimizzare il volume calcoliamo la derivata prima della funzione $y = x^2\sqrt{k^2 - 2kx}$ nel dominio $\left[0; \frac{k}{2}\right]$ (la base del triangolo non può superare il semiperimetro):

$$y' = 2x\sqrt{k^2 - 2kx} + x^2 \cdot \frac{-2k}{2\sqrt{k^2 - 2kx}} = \frac{2x(k^2 - 2kx) - kx^2}{\sqrt{k^2 - 2kx}} = \frac{2k^2 x - 5kx^2}{\sqrt{k^2 - 2kx}}.$$

Tale derivata è nulla per $x = 0$ e $x = \frac{2}{5}k$ e lo schema seguente (figura 11) ne riassume il segno.

Il valore massimo del volume del cono si ottiene per $x = \frac{2}{5}k$. In questo caso il lato obliquo del triangolo risulta $l = \frac{k - \frac{2}{5}k}{2} = \frac{3}{10}k$.



▲ **Figura 11.**

Pertanto il rapporto fra il lato del triangolo e la sua base vale:

$$\frac{l}{x}=\frac{\frac{3}{10}k}{\frac{2}{5}k}=\frac{3}{4}.$$

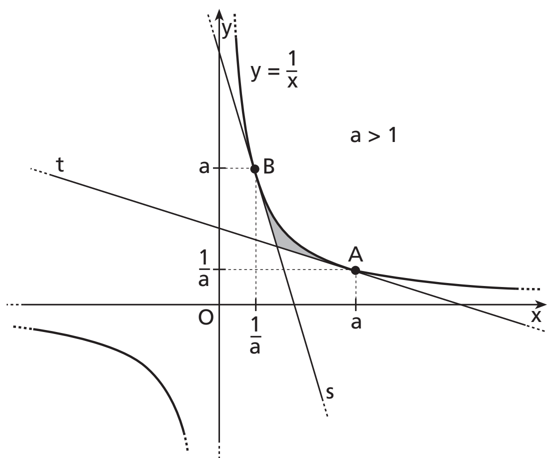
3 Nella figura 12 sono rappresentate l'iperbole $y=\dfrac{1}{x}$, le tangenti a essa nei punti $A\left(a;\ \dfrac{1}{a}\right)$ e $B\left(\dfrac{1}{a};\ a\right)$ $(a\neq 0)$ e la regione piana da esse limitata nel caso particolare di $a>1$.
Osserviamo che se $a=\pm 1$, allora $A\equiv B$ e l'area in questione risulta nulla.
Ci limiteremo al caso di $a>0 \wedge a\neq 1$ in quanto per $a<0 \wedge a\neq -1$ la regione piana delimitata che si ottiene è simmetrica e congruente al caso di a positivo.
Il coefficiente angolare della tangente all'iperbole di equazione $y=\dfrac{1}{x}$ nel punto A è $y'(a)=-\dfrac{1}{a^2}$, mentre il coefficiente angolare della tangente in B è $y'\left(\dfrac{1}{a}\right)=-a^2$. La tangente t in A ha dunque equazione:

$$t: y-\frac{1}{a}=-\frac{1}{a^2}(x-a) \quad\rightarrow\quad t: y=-\frac{1}{a^2}x+\frac{2}{a},$$

mentre la tangente s in B è invece:

$$s: y-a=-a^2\left(x-\frac{1}{a}\right) \quad\rightarrow\quad s: y=-a^2x+2a.$$

Calcoliamo l'ascissa del punto di intersezione tra t ed s considerando il sistema seguente:



▲ **Figura 12.**

$$\begin{cases} y=-\dfrac{1}{a^2}x+\dfrac{2}{a} \\ y=-a^2x+2a \end{cases} \rightarrow\ -\frac{1}{a^2}x+\frac{2}{a}=-a^2x+2a \ \rightarrow\ x(a^4-1)=2a(a^2-1) \ \rightarrow\ x=\frac{2a}{a^2+1}.$$

Pertanto l'area cercata vale:

$$\text{Area}=\left|\int_{\frac{1}{a}}^{\frac{2a}{a^2+1}}\left[\frac{1}{x}-(-a^2x+2a)\right]dx+\int_{\frac{2a}{a^2+1}}^{a}\left[\frac{1}{x}-\left(-\frac{1}{a^2}x+\frac{2}{a}\right)\right]dx\right|=$$

$$=\left|\left[\log|x|+\frac{a^2}{2}x^2-2ax\right]_{\frac{1}{a}}^{\frac{2a}{a^2+1}}+\left[\log|x|+\frac{x^2}{2a^2}-\frac{2}{a}x\right]_{\frac{2a}{a^2+1}}^{a}\right|=\left|\log a^2+\frac{2-2a^2}{a^2+1}\right|.$$

4 Si dice che l è limite sinistro della funzione $y=f(x)$ per x che tende ad a, e si scrive $\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=l$, se per ogni $\varepsilon>0$ esiste un numero $\delta>0$ tale che $|f(x)-l|<\varepsilon$ per ogni $x\in\,]a-\delta;\ a[$.
Dimostriamo che $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(x+\dfrac{x}{|x|}\right)=-1$, verificando per quali valori di x vale $\left|x+\dfrac{x}{|x|}+1\right|<\varepsilon$, ovvero:

$$\begin{cases} x+\dfrac{x}{|x|}+1<\varepsilon \\ x+\dfrac{x}{|x|}+1>-\varepsilon \end{cases}$$

Tale sistema è equivalente all'unione dei seguenti sistemi:

$$\begin{cases} x\geq 0 \\ x+2<\varepsilon \\ x+2>-\varepsilon \end{cases} \vee \begin{cases} x<0 \\ x<\varepsilon \\ x>-\varepsilon \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x\geq 0 \\ x<\varepsilon-2 \\ x>-\varepsilon-2 \end{cases} \vee \quad -\varepsilon<x<0.$$

Assumendo ε piccolo a piacere, si può considerare $\varepsilon<2$: il primo sistema non ha pertanto soluzioni. Risulta allora $-\varepsilon<x<0$.
Perciò vale la condizione di definizione di limite sinistro scegliendo $\delta=\varepsilon$, per cui preso un qualsiasi $\varepsilon>0$ vale $|f(x)-(-1)|<\varepsilon$ per ogni $x\in\,]-\varepsilon;\,0[$.
Si dice invece che l è limite destro della funzione $y=f(x)$ per x che tende ad a, e si scrive $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=l$, se per ogni $\varepsilon>0$ esiste un numero $\delta>0$ tale che $|f(x)-l|<\varepsilon$ per ogni $x\in\,]a;\,a+\delta[$.

Dimostriamo che $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x+\dfrac{x}{|x|}\right)=1$, verificando per quali valori di x risulta $\left|x+\dfrac{x}{|x|}-1\right|<\varepsilon$, cioè:

$$\begin{cases} x+\dfrac{x}{|x|}-1<\varepsilon \\ x+\dfrac{x}{|x|}-1>-\varepsilon \end{cases}$$

Tale sistema è equivalente all'unione dei seguenti sistemi:

$$\begin{cases} x\geq 0 \\ x<\varepsilon \\ x>-\varepsilon \end{cases} \vee \begin{cases} x<0 \\ x-2<\varepsilon \\ x-2>-\varepsilon \end{cases} \rightarrow 0\leq x<\varepsilon \vee \begin{cases} x<0 \\ x<\varepsilon+2 \\ x>-\varepsilon+2 \end{cases}$$

Assumendo ε piccolo a piacere, si può considerare $\varepsilon<2$: il secondo sistema non ha pertanto soluzioni. Risulta allora $0\leq x<\varepsilon$.
Le soluzioni del primo sistema sono i valori di $x\in\,]0;\,\varepsilon[$. Perciò vale la condizione di definizione di limite destro scegliendo $\delta=\varepsilon$, per cui preso un qualsiasi $\varepsilon>0$ vale $|f(x)-1|<\varepsilon$ per ogni $x\in\,]0;\,\varepsilon[$.

5 Poiché $\lim\limits_{x\to 2}(2+\sqrt[3]{x-2})=2=f(2)$, la funzione f è continua in $x=2$.

Essa è anche derivabile se esiste $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}$ ed è finito.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}\lim_{h\to 0}\frac{2+\sqrt[3]{2+h-2}-2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{h}}{h}=\lim_{h\to 0}h^{-\frac{2}{3}}=\begin{cases} +\infty & \text{se } h\to 0^+ \\ -\infty & \text{se } h\to 0^- \end{cases}.$$

La funzione non è quindi derivabile nel punto $x=2$. Graficamente significa che nel punto (2; 2) la curva corrispondente presenta un flesso ascendente a tangente verticale.

6 Le combinazioni semplici di n elementi a k alla volta sono tutti i possibili sottoinsiemi di k elementi distinti che si possono formare a partire dagli n elementi di partenza. Questi gruppi quindi si distinguono solo per gli elementi e non per il loro ordine.
Le disposizioni di n elementi a k alla volta sono invece tutti i possibili gruppi di k elementi distinti che si possono formare a partire dagli n elementi di partenza; questi gruppi si distinguono sia per gli elementi che per l'ordine.

Per ottenere le disposizioni a partire dalle combinazioni dobbiamo considerare che per ogni sottoinsieme delle combinazioni esistono $k!$ gruppi che si ottengono permutando gli elementi dello stesso sottoinsieme.

Pertanto vale $D_{n,k} = C_{n,k} \cdot k!$ da cui $C_{n,k} = \dfrac{D_{n,k}}{k!}$.

7 Consideriamo i seguenti eventi:

$E_1 = \{$La pallina uscita è contrassegnata da un numero divisibile per 10$\}$,
$E_2 = \{$La pallina uscita è contrassegnata da un numero divisibile per 8$\}$.

I numeri naturali compresi tra 1 e 100 divisibili per 10 sono 10, mentre quelli divisibili per 8 sono 12. Le probabilità dei due eventi, intese come rapporto tra casi favorevoli e casi possibili valgono quindi:

$$P(E_1) = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}, \; P(E_2) = \frac{12}{100} = \frac{3}{25}.$$

a) La probabilità richiesta è la probabilità della somma logica dei due eventi E_1 ed E_2 che, per il teorema della probabilità della somma logica di eventi, vale:

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2).$$

Poiché i numeri naturali da 1 a 100, divisibili sia per 10 che per 8 sono due (i numeri 40 e 80) risulta:

$$P(E_1 \cap E_2) = \frac{2}{100} = \frac{1}{50}.$$

Pertanto vale:

$$P(E_1 \cup E_2) = \frac{1}{10} + \frac{3}{25} - \frac{1}{50} = \frac{1}{5}.$$

b) La probabilità di divisibilità per 10 e 8 è $P(E_1 \cap E_2) = \dfrac{1}{50}$, calcolata in precedenza al punto a).

c) La probabilità richiesta è quella dell'evento complementare a $E_1 \cup E_2$ e quindi vale:

$$1 - P(E_1 \cup E_2) = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}.$$

8 Le equazioni dell'omotetia ω di centro (1; 2) e caratteristica $\dfrac{1}{4}$ sono:

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{4}(x-1)+1 \\ y' = \dfrac{1}{4}(y-2)+2 \end{cases}$$

Per le proprietà dell'omotetia il punto trasformato del baricentro di un triangolo è a sua vota il baricentro del triangolo trasformato. Pertanto calcoliamo il baricentro G del triangolo di vertici $(4;0)$, $(-4; 4)$, $(0; 8)$:

$$G\left(\frac{4-4+0}{3}; \frac{0+4+8}{3}\right), \text{ cioè } G(0; 4).$$

Trasformiamo tale punto secondo l'omotetia ω:

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{4}(0-1)+1 = \dfrac{3}{4} \\ y' = \dfrac{1}{4}(4-2)+2 = \dfrac{5}{2} \end{cases}$$

In conclusione il baricentro del triangolo trasformato è $G'\left(\dfrac{3}{4}; \dfrac{5}{2}\right)$.

9 Sostituendo alle equazioni dell'affinità le coordinate dei punti corrispondenti si ottiene il seguente sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{3} = 3a + \sqrt{2}b \\ \dfrac{7\sqrt{2}}{3} = 3c + \sqrt{2}d \\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}a \\ 2 = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}c \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 9a + 3\sqrt{2}b = 1 \\ 9c + 3\sqrt{2}d = 7\sqrt{2} \\ a = -\dfrac{1}{3} \\ c = \dfrac{2}{3}\sqrt{2} \end{cases}$$

Sostituendo i valori trovati di a e c nelle prime due equazioni, si ottiene:

$$\begin{cases} -3 + 3\sqrt{2}b = 1 \\ 6\sqrt{2} + 3\sqrt{2}d = 7\sqrt{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3\sqrt{2}b = 4 \\ 3\sqrt{2}d = \sqrt{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = \dfrac{2\sqrt{2}}{3} \end{cases}$$

L'affinità cercata è quella di equazioni:

$$\begin{cases} X = -\dfrac{1}{3}x + \dfrac{2\sqrt{2}}{3}y \\ Y = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}x + \dfrac{1}{3}y \end{cases}$$

10 Data una funzione $f(x)$ continua nell'intervallo $[a;\ b]$ tale che $f(a) \cdot f(b) < 0$, si suppone nota l'unicità della soluzione dell'equazione $f(x) = 0$ in tale intervallo. Uno dei metodi per determinare tale soluzione con un'approssimazione $\varepsilon > 0$ è il metodo ricorsivo della bisezione che permette di restringere l'intervallo di partenza intorno alla radice fino all'approssimazione desiderata. Supponiamo noti $f(a)$ ed $f(b)$, con $f(a) < 0$ ed $f(b) > 0$. Si costruisce il seguente algoritmo, il quale chiede in ingresso l'approssimazione ε voluta.

• Inizio Programma Radice approssimata	
• Leggi ε	
• $x_1 = a$	Si assegna alla variabile x_1 l'estremo sinistro a dell'intervallo,
• $x_2 = b$	alla variabile x_2 l'estremo destro b dell'intervallo,
• $P_1 = f(a)$	alla variabile P_1 il valore $f(a)$
• Ripeti	Si costruisce il ciclo basato sul metodo di bisezione
• $x_M = (x_1 + x_2)/2$	Si calcola il punto medio dell'intervallo $[x_1;\ x_2]$
• $P_M = 0$	Si azzera la variabile P_M
• $P_M = f(x_M)$	Si calcola il valore $f(x_M)$
• Se $P_1 \cdot P_M > 0$	Si effettua il controllo sulla posizione della radice rispetto al punto medio
• allora $x_1 = x_M$, $P_1 = P_M$	
• altrimenti $x_2 = x_M$	
• finché $\dfrac{x_2 - x_1}{2} < \varepsilon$	Si effettua il controllo sull'approssimazione voluta
• Scrivi x_M	Si mostra la radice approssimata
• Fine	

Per esercitarti ancora sugli argomenti trattati nel	Svolgi il
Problema 1	• Esercizio 154 pag. T 135 • Esercizio 160 pag. T 136 • Esercizio 50 pag. V 244
Problema 2	• Esercizio 170 pag. V 265 • Problema 2 pag. W 168 • Esercizio 283 pag. W 125
Quesito 1	• Esercizio 220 pag. W 118
Quesito 2	• Quesito 3 pag. W 175 • Esercizio 332 pag. V 212
Quesito 3	• Esercizio 223 pag. W 118 • Esercizio 235 pag. W 120 • Esercizio 255 pag. W 122
Quesito 4	• Esercizio 87 pag. U 91 • Esercizio 72 pag. U 90
Quesito 5	• Quesito 2 pag. W 176 • Esercizio 3 pag. V 90
Quesito 6	• Quesito 1 pag. α 40 • Quesito 2 pag. α 40 • Quesito 6 pag. α 40
Quesito 7	• Esercizio 21 pag. α 75 • Esercizio 117 pag. α 89
Quesito 8	• Esercizio 406 pag. J_1 95 • Esercizio 422 pag. J_1 96
Quesito 9	• Esercizio 496 pag. J_1 109 • Problema 24 pag. J_1 123 • Quesito 5 pag. W 175
Quesito 10	• Esercizio 63 pag. ι 28 • Quesito 2 pag. ι 57