

|  |
|--|
| <b>ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO</b><br><b>CORSO DI ORDINAMENTO 2013</b> |
|--|

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario<sup>1</sup>.

**PROBLEMA 1**

La funzione  $f$  è definita da

$$f(x) = \int_0^x \left[ \cos\left(\frac{t}{2}\right) + \frac{1}{2} \right] dt$$

per tutti i numeri reali  $x$  appartenenti all'intervallo chiuso  $[0, 9]$ .

1. Si calcolino  $f'(\pi)$  e  $f'(2\pi)$  ove  $f'$  indica la derivata di  $f$ .
2. Si tracci, in un sistema di coordinate cartesiane, il grafico  $\Sigma$  di  $f'(x)$  e da esso si deduca per quale o quali valori di  $x$ ,  $f(x)$  presenta massimi o minimi. Si tracci altresì l'andamento di  $f(x)$  deducendolo da quello di  $f'(x)$ .
3. Si trovi il valor medio di  $f'(x)$  sull'intervallo  $[0, 2\pi]$ .
4. Sia  $R$  la regione del piano delimitata da  $\Sigma$  e dall'asse  $x$  per  $0 \leq x \leq 4$ ;  $R$  è la base di un solido  $W$  le cui sezioni con piani ortogonali all'asse  $x$  hanno, per ciascun  $x$ , area  $A(x) = 3 \sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)$ . Si calcoli il volume di  $W$ .

---

<sup>1</sup>Durata massima della prova: 6 ore.

È consentito l'uso della calcolatrice non programmabile.

È consentito l'uso del dizionario bilingue (italiano-lingua del paese di provenienza) per i candidati di madrelingua non italiana.

Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

## PROBLEMA 2

Sia  $f$  la funzione definita, per tutti gli  $x$  reali, da  $f(x) = \frac{8}{4+x^2}$ .

1. Si studi  $f$  e se ne disegni il grafico  $\Phi$  in un sistema di coordinate cartesiane  $Oxy$ . Si scrivano le equazioni delle tangenti a  $\Phi$  nei punti  $P(-2; 1)$  e  $Q(2; 1)$  e si consideri il quadrilatero convesso che esse individuano con le rette  $OP$  e  $OQ$ . Si provi che tale quadrilatero è un rombo e si determinino le misure, in gradi e primi sessagesimali, dei suoi angoli.
2. Sia  $\Gamma$  la circonferenza di raggio 1 e centro  $(0; 1)$ . Una retta  $t$ , per l'origine degli assi, taglia  $\Gamma$  oltre che in  $O$  in un punto  $A$  e taglia la retta d'equazione  $y = 2$  in un punto  $B$ . Si provi che, qualunque sia  $t$ , l'ascissa  $x$  di  $B$  e l'ordinata  $y$  di  $A$  sono le coordinate  $(x; y)$  di un punto di  $\Phi$ .
3. Si consideri la regione  $R$  compresa tra  $\Phi$  e l'asse  $x$  sull'intervallo  $[0, 2]$ . Si provi che  $R$  è equivalente al cerchio delimitato da  $\Gamma$  e si provi altresì che la regione compresa tra  $\Phi$  e tutto l'asse  $x$  è equivalente a quattro volte il cerchio.
4. La regione  $R$ , ruotando attorno all'asse  $y$ , genera il solido  $W$ . Si scriva, spiegandone il perché, ma senza calcolarlo, l'integrale definito che fornisce il volume di  $W$ .

## QUESTIONARIO

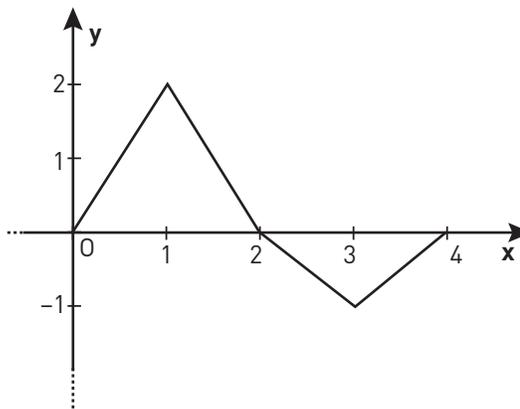
1. Un triangolo ha area 3 e due lati che misurano 2 e 3. Qual è la misura del terzo lato? Si giustifichi la risposta.
2. Si calcoli il dominio della funzione

$$f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{2 - \sqrt{3 - x}}}.$$

3. Si considerino, nel piano cartesiano, i punti  $A(2; -1)$  e  $B(-6; -8)$ . Si determini l'equazione della retta passante per  $B$  e avente distanza massima da  $A$ .
4. Di un tronco di piramide retta a base quadrata si conoscono l'altezza  $h$  e i lati  $a$  e  $b$  delle due basi. Si esprima il volume  $V$  del tronco in funzione di  $a$ ,  $b$  e  $h$ , illustrando il ragionamento seguito.

5. In un libro si legge “*Due valigie della stessa forma sembrano quasi uguali, quanto a capacità, quando differiscono di poco le dimensioni lineari: non sembra che in genere le persone si rendano ben conto che ad un aumento delle dimensioni lineari (lunghezza, larghezza, altezza) del 10% (oppure del 20% o del 25%) corrispondano aumenti di capacità (volume) di circa 33% (oppure 75% o 100%: raddoppio)*”. È così? Si motivi esaurientemente la risposta.
6. Con le cifre da 1 a 7 è possibile formare  $7! = 5040$  numeri corrispondenti alle permutazioni delle 7 cifre. Ad esempio i numeri 1234567 e 3546712 corrispondono a due di queste permutazioni. Se i 5040 numeri ottenuti dalle permutazioni si dispongono in ordine crescente qual è il numero che occupa la settima posizione e quale quello che occupa la 721-esima posizione?
7. Un foglio rettangolare, di dimensioni  $a$  e  $b$ , ha area  $1 \text{ m}^2$  e forma tale che, tagliandolo a metà (parallelamente al lato minore) si ottengono due rettangoli simili a quello di partenza. Quali sono le misure di  $a$  e  $b$ ?

8. La funzione  $f$  ha il grafico in figura. Se  $g(x) = \int_0^x f(t)dt$ , per quale valore positivo di  $x$ ,  $g$  ha un minimo? Si illustri il ragionamento seguito.



9. Si calcoli:

$$\lim_{x \rightarrow 0} 4 \cdot \frac{\sin x \cos x - \sin x}{x^2}.$$

10. Se la figura a lato rappresenta il grafico di  $f(x)$ , quale dei seguenti potrebbe essere il grafico di  $f'(x)$ ? Si giustifichi la risposta.

