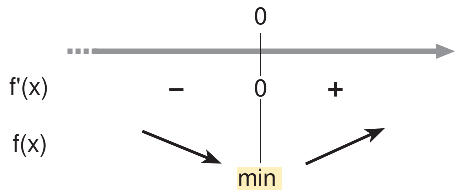
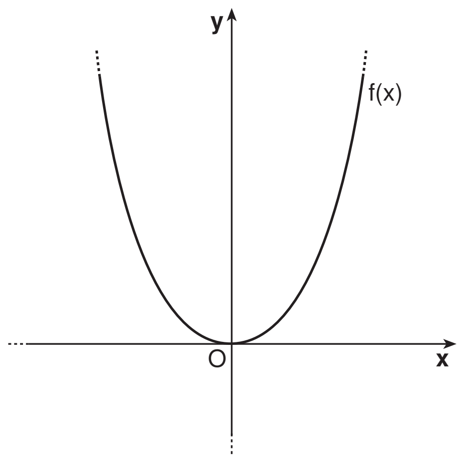
SOLUZIONE DEL PROBLEMA 1
CORSO DI ORDINAMENTO 2012

1. Il periodo T della funzione g è ottenuto uguagliando l'argomento di g a 2π, poiché 2π è il periodo della funzione $y = \operatorname{sen} x$. Pertanto il periodo di T vale:
$$\frac{3}{2}\pi T = 2\pi \Leftrightarrow T = \frac{4}{3}.$$
Studiamo la funzione
$$f(x) = \left|27x^3\right| = \begin{cases} 27x^3, \text{ se } x \geq 0 \\ -27x^3, \text{ se } x < 0 \end{cases}.$$

   - Dominio: $\mathbb{R}$.
   - Simmetrie: $f(-x) = f(x)$, ossia la funzione è pari e il grafico è simmetrico rispetto all'asse y.
   - Intersezione con gli assi cartesiani:
   $$\begin{cases} x = 0 \\ y = |27x^3| \end{cases} \to \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}.$$
   - Segno della funzione:
   $$f(x) > 0 \Leftrightarrow \left|27x^3\right| > 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$
   - Calcolo e segno delle derivate prima e seconda:
   $$f'(x) = \begin{cases} 81x^2, \text{ se } x > 0 \\ 0, \text{ se } x = 0 \\ -81x^2, \text{ se } x < 0 \end{cases},$$
   $$f''(x) = \begin{cases} 162x, \text{ se } x > 0 \\ 0, \text{ se } x = 0 \\ -162x, \text{ se } x < 0 \end{cases}.$$
   Osserviamo che $f'(x) > 0$ se e solo se $x > 0$, quindi $(0; 0)$ è un punto di minimo per $f(x)$ e la funzione è crescente in $[0; +\infty[$ e decrescente in $]-\infty; 0]$.

   Osserviamo che $f''(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e quindi la funzione è convessa.





Studiamo la funzione $g(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}\pi x\right)$.

- Dominio: $\mathbb{R}$.
- Intersezione con gli assi cartesiani:

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = \operatorname{sen}\left(\dfrac{3}{2}\pi x\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2}{3}k \\ y = 0 \end{cases}, \text{ per ogni } k \text{ intero.}$$

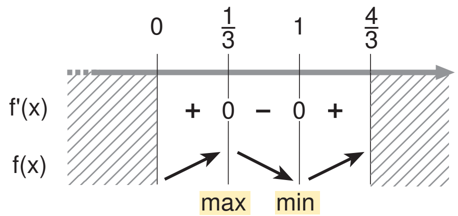
- Calcolo e segno delle derivate prima e seconda:

  Per ogni $x \in \mathbb{R}$, abbiamo

$$g'(x) = \frac{3}{2}\pi \cos\left(\frac{3}{2}\pi x\right);$$
$$g''(x) = -\left(\frac{3}{2}\pi\right)^2 \operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}\pi x\right).$$

  Per $x \in \left[0; \frac{4}{3}\right]$ vale:

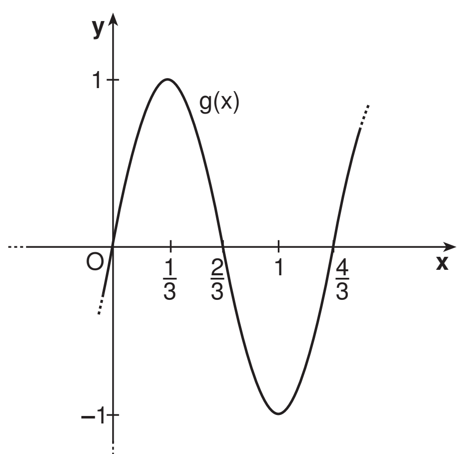
$$g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{3}{2}\pi x\right) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq \frac{3}{2}\pi x \leq \frac{\pi}{2} \vee \frac{3}{2}\pi \leq \frac{3}{2}\pi x \leq 2\pi$$
$$\Leftrightarrow \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{3} \vee 1 \leq x \leq \frac{4}{3}\pi.$$



Pertanto la funzione ha massimi in $\left(\frac{1}{3}+\frac{4}{3}k;1\right)$ per ogni intero k e minimi in $\left(1+\frac{4}{3}k;-1\right)$ per ogni intero k. Osserviamo che, per ogni $x \in \mathbb{R}$, vale

$$g''(x)=0 \Leftrightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}\pi x\right)=0 \rightarrow x=\frac{2}{3}k,\ \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Pertanto la funzione ha flessi in $\left(\frac{2}{3}k;0\right)$ per ogni intero k.



2. In generale l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $f(x)$ in un generico punto $(x_0;y_0)$, se esiste e non è parallela all'asse y, ha equazione:

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0).$$

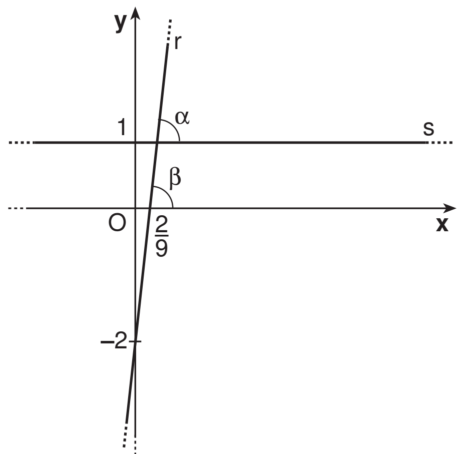
Nel punto $x_0=\frac{1}{3}$, risulta $f\left(\frac{1}{3}\right)=1$ e $f'\left(\frac{1}{3}\right)=9$ e la retta r tangente a G_f nel punto $\left(\frac{1}{3};1\right)$ ha equazione:

$$y-1=9\left(x-\frac{1}{3}\right) \rightarrow y=9x-2.$$

Nel punto $x_0 = \frac{1}{3}$, risulta $g\left(\frac{1}{3}\right) = 1$ e $g'\left(\frac{1}{3}\right) = 0$ e la retta s tangente a G_g nel punto $\left(\frac{1}{3}; 1\right)$ ha equazione:

$$y - 1 = 0 \rightarrow y = 1.$$

Per determinare l'ampiezza dell'angolo acuto α formato da r e da s osserviamo che α è congruente all'angolo β formato dalla retta r e dall'asse delle x e quindi $\mathrm{tg}(\beta)$ corrisponde al coefficiente angolare della retta r. Pertanto l'angolo α vale:



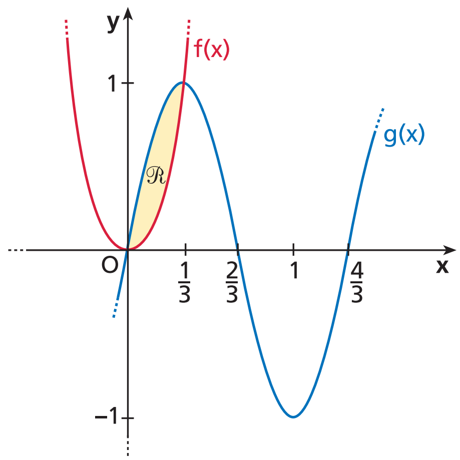
$$\alpha = \beta = \mathrm{arctg}(9) = 1,46\,\mathrm{rad} = 83°40'.$$

3. L'intersezione dei grafici G_f e G_g è data dalle soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} y = |27x^3| \\ y = \mathrm{sen}\left(\frac{3}{2}\pi x\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = 1 \end{cases}.$$

Osserviamo inoltre che vale la disuguaglianza $27x^3 < \mathrm{sen}\left(\frac{3}{2}\pi x\right)$ per $x \in \left]0; \frac{1}{3}\right[$. L'area della regione R è data da:

$$\begin{aligned} A(R) &= \int_0^{\frac{1}{3}} \left(\mathrm{sen}\left(\frac{3}{2}\pi x\right) - 27x^3\right) dx = \\ &= \left[-\frac{2}{3\pi}\cos\left(\frac{3}{2}\pi x\right) - 27\frac{x^4}{4}\right]_0^{\frac{1}{3}} = \\ &= -\frac{27}{4}\cdot\frac{1}{81} + \frac{2}{3\pi} = \\ &= \frac{2}{3\pi} - \frac{1}{12}. \end{aligned}$$



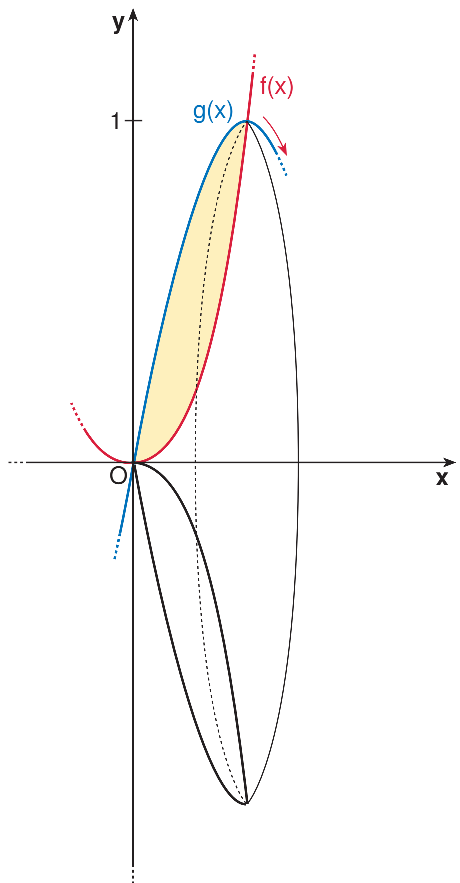
4. Il volume S del solido generato dalla rotazione della regione R attorno all'asse delle x può essere ottenuto come differenza tra il volume V_1 del solido generato dalla rotazione della parte di piano delimitata dalla curva $y = \operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}\pi x\right)$, dalla retta $x = \frac{1}{3}$ e dall'asse x attorno all'asse x, e il volume V_2 del solido generato dalla rotazione della parte di piano delimitata dalla curva $y = 27x^3$, dalla retta $x = \frac{1}{3}$ e dall'asse x attorno all'asse x. Pertanto il volume S vale:

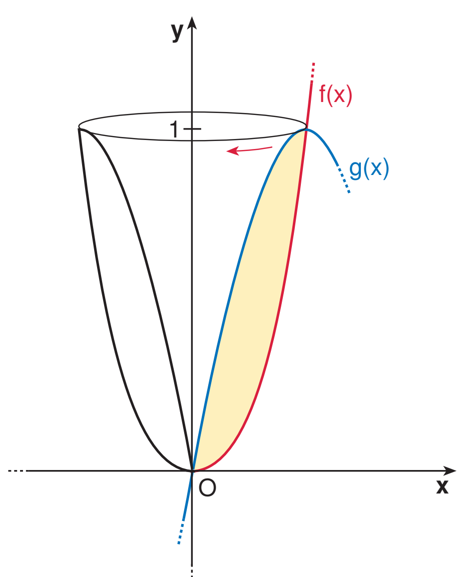
$$S = V_1 - V_2 = \pi \int_0^{\frac{1}{3}} \left(\operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}\pi x\right)\right)^2 dx - \pi \int_0^{\frac{1}{3}} \left(27x^3\right)^2 dx =$$

$$= \pi \int_0^{\frac{1}{3}} \left(\left(\operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}\pi x\right)\right)^2 - \left(27x^3\right)^2\right) dx.$$

Il volume T del solido generato dalla rotazione della regione R attorno all'asse delle y può essere ottenuto come differenza tra il volume V_3 del solido generato dalla rotazione della parte di piano delimitata dalla curva $y = 27x^3$, dalla retta $y = 1$ e dall'asse y attorno all'asse y, e il volume V_4 del solido generato dalla rotazione della parte di piano delimitata dalla curva $y = \operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}\pi x\right)$, dalla retta $y = 1$ e dall'asse y attorno all'asse y. Poiché il volume V_3 è uguale al volume del solido di rotazione intorno all'asse x della regione delimitata dal grafico della funzione $y = \frac{1}{3}\sqrt[3]{x}$, dall'asse x e dalla retta di equazione $x = 1$, si trova:

$$V_3 = \pi \int_0^1 \left(\frac{1}{3}\sqrt[3]{x}\right)^2 dx.$$


y
f(x)
g(x)
1
O
x


y
f(x)
1
g(x)
O
x

Poiché il volume V_4 è uguale al volume del solido di rotazione intorno all'asse x della regione delimitata dal grafico della funzione $y = \dfrac{2}{3\pi}\operatorname{arcsen} x$, dall'asse x e dalla retta di equazione $x = 1$, si trova:

$$V_4 = \pi \int_0^1 \left(\frac{2}{3\pi} \operatorname{arcsen} x \right)^2 dx.$$

Osservando che $\dfrac{2}{3}\operatorname{arcsen}(x) < \dfrac{1}{3}\sqrt[3]{x}$, abbiamo

$$\begin{aligned} T = V_3 - V_4 &= \pi \int_0^1 \left(\frac{1}{3}\sqrt[3]{x} \right)^2 dx - \pi \int_0^1 \left(\frac{2}{3\pi} \operatorname{arcsen} x \right)^2 dx = \\ &= \pi \int_0^1 \left(\left(\frac{1}{3}\sqrt[3]{x} \right)^2 - \left(\frac{2}{3\pi} \operatorname{arcsen} x \right)^2 \right) dx. \end{aligned}$$

SOLUZIONE DEL PROBLEMA 2
CORSO DI ORDINAMENTO 2012

1. Chiamiamo C il punto $\left(0; \frac{3}{2}\right)$. Per facilitare lo studio dell'arco di parabola AC e della retta tangente in A, scriviamo l'equazione in forma esplicita:

$$x^2 = 9 - 6y \Rightarrow 6y = 9 - x^2 \Rightarrow y = -\frac{1}{6}x^2 + \frac{3}{2}.$$

L'arco L è dunque il tratto di grafico della funzione $p(x) = -\frac{1}{6}x^2 + \frac{3}{2}$, compreso tra $x = 0$ e $x = 3$.

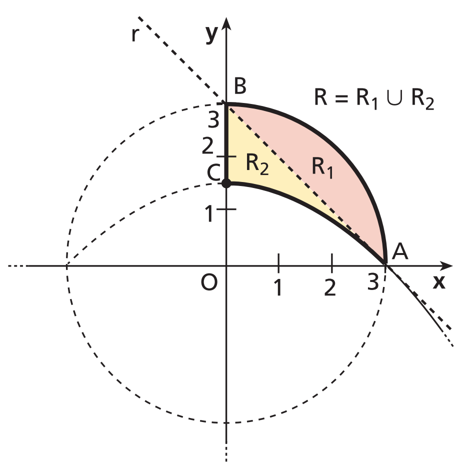
La retta tangente in A ha equazione $y = m(x - x_A) + y_A$, dove $x_A = 3$ e $y_A = 0$ sono le coordinate di A, e $m = p'(3)$ è la derivata di $p(x)$ calcolata in $x = 3$.

Calcoliamo la derivata della funzione $p(x)$:

$$p'(x) = -\frac{1}{6} \cdot 2x + 0 = -\frac{1}{3}x.$$

Poiché $p'(3) = -1$, la retta r ha equazione:

$$r : y = -1(x - 3) + 0 \quad \rightarrow \quad r : y = 3 - x.$$



Osserviamo che r passa anche per il punto B, quindi le due regioni in cui viene diviso R sono:

- il segmento circolare di estremi A e B del cerchio di centro O e raggio 3. Esso si può considerare come la differenza del settore circolare e del triangolo di estremi OAB. Il suo volume è allora:

$$A_{R_1} = A_{sett} - A_{triang} = \frac{1}{4}\pi 3^2 - \frac{1}{2}3^2 = \frac{9\pi - 18}{4};$$

- il triangolo curvilineo ABC, dato dalla differenza del triangolo OAB e la regione OAC compresa tra L e l'asse x (è la metà di un segmento parabolico). L'area di OAC è l'integrale definito di $p(x)$ di estremi 0 e 3:

$$A_{OAC} = \int_0^3 p(x)dx = \int_0^3 \left(-\frac{1}{6}x^2 + \frac{3}{2}\right) dx = \left[-\frac{x^3}{18} + \frac{3}{2}x\right]_0^3 = -\frac{27}{18} + \frac{9}{2} = 3.$$

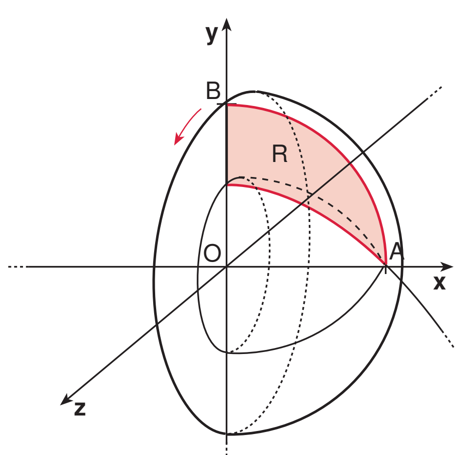
Risulta dunque

$$A_{R_2} = A_{triang} - A_{OAC} = \frac{9}{2} - 3 = \frac{3}{2}.$$

2. Osserviamo che il volume di W non dipende in nessun modo dalla forma della regione R, ma solamente dalla funzione $S(x)$. Esso è dato dall'integrale definito di $S(x)$ di estremi 0 e 3:

$$V_W = \int_0^3 S(x)dx = \int_0^3 e^{5-3x} = \left[-\frac{1}{3}e^{5-3x}\right]_0^3 = -\frac{1}{3}e^{5-9} + \frac{1}{3}e^5 = \frac{e^5 - e^{-4}}{3}.$$

3. Il solido ottenuto dalla rotazione di R attorno all'asse x è la differenza tra una semisfera di centro O e raggio 3 e il solido $\mathcal{P}$ ottenuto dalla rotazione (sempre attorno all'asse x) della regione compresa tra L e l'asse x. Il volume della semisfera



è metà di quello della sfera:

$$V_{semisf} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot 3^3 = 18\pi.$$

Il volume del solido $\mathcal{P}$ è dato dall'integrale:

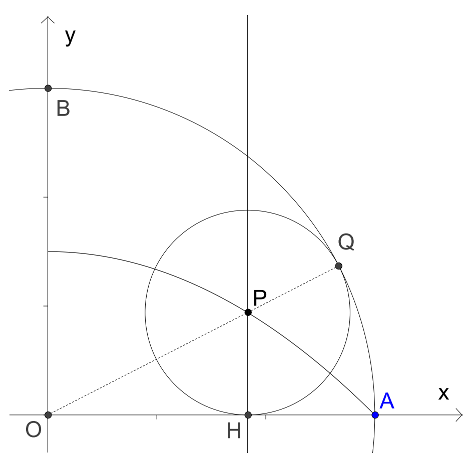
$$\begin{aligned} V_{\mathcal{P}} &= \pi \int_0^3 p(x)^2 dx = \pi \int_0^3 \left(-\frac{1}{6}x^2 + \frac{3}{2}\right)^2 dx = \frac{\pi}{36}\int_0^3 \left(x^2-9\right)^2 dx = \\ &= \frac{\pi}{36}\int_0^3 \left(x^4 - 18x^2 + 81\right) dx = \frac{\pi}{36}\left[\frac{x^5}{5} - 18\cdot\frac{x^3}{3} + 81x\right]_0^3 = \\ &= \frac{\pi}{36}\left(\frac{3^5}{5} - \frac{18\cdot 3^3}{3} + 81\cdot 3\right) = \frac{\pi}{36}\cdot 3^4\left(\frac{3}{5} - 2 + 3\right) = \frac{9}{4}\pi\cdot\frac{8}{5} = \frac{18}{5}\pi. \end{aligned}$$

Per ottenere il solido ottenuto dalla rotazione di R facciamo la sottrazione:

$$V = 18\pi - \frac{18}{5}\pi = \frac{4}{5}\cdot 18\pi = \frac{72}{5}\pi.$$

4. Consideriamo un punto P dell'arco di parabola L. Chiamiamo H la sua propiezione sull'asse x. Sia poi Q il punto dell'arco AB allineato con O e P.

   Allora P è il centro di una circonferenza tangente alla circonferenza e all'asse x se e solo se $PH = PQ$.



Troviamo ora una condizione equivalente a $PH = PQ$, che ci permetta di applicare la descrizione analitica di L.

Osserviamo che $PQ = 3 - OP$, quindi:

$$PH = PQ \quad\leftrightarrow\quad PH = 3 - OP \quad\leftrightarrow\quad OP = 3 - PH \quad\leftrightarrow\quad OP^2 = (3 - PH)^2.$$

Ora, per il teorema di Pitagora, applicato al triangolo rettangolo OPH, risulta:

$$OP^2 = OH^2 + HP^2.$$

Mettendo insieme quanto trovato, abbiamo:

$$\begin{aligned} PH = PQ \Leftrightarrow OH^2 + HP^2 &= (3 - PH)^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow OH^2 + HP^2 &= 9 + PH^2 - 6PH \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow OH^2 &= 9 - 6PH \end{aligned}$$

Ricordiamo ora che il punto P ha coordinate $P\left(x; p(x)\right) = P\left(x; -\frac{1}{6}x^2 + \frac{3}{2}\right)$, con x che può variare tra 0 e 3, quindi $OH = x$ e $PH = \frac{3}{2} - \frac{1}{6}x^2$.

Di conseguenza risulta:

$$OH^2 = x^2$$

e

$$9 - 6PH = 9 - 6\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{6}x^2\right) = 9 - 9 + x^2 = x^2.$$

L'uguaglianza $PH = PQ$ è dunque vera per ogni punto di L. Questo prova che L è il luogo cercato.

La circonferenza tangente anche all'arco di circonferenza di centro A e raggio 3 ha un asse di simmetria dato dalla retta $s : x = \frac{3}{2}$. Infatti la simmetria assiale di asse s porta la circonferenza di centro A in quella di centro O, e lascia invariato l'asse x. Il centro della circonferenza cercata appartiene alla retta s: è dunque il punto di coordinate $\left(\frac{3}{2}; p\left(\frac{3}{2}\right)\right) = \left(\frac{3}{2}; \frac{9}{8}\right)$. Il raggio è uguale a $\frac{9}{8}$.

SOLUZIONE DEL QUESITO 1
CORSO DI ORDINAMENTO 2012

Consideriamo il limite

$$\lim_{h \to 0} \frac{5\left(\frac{1}{2}+h\right)^4 - 5\left(\frac{1}{2}\right)^4}{h}.$$

Esso rappresenta il limite del rapporto incrementale $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ della funzione $f(x) = 5x^4$ calcolato nel punto $x = \dfrac{1}{2}$. Si tratta allora della derivata della funzione f calcolata nel punto $x = \dfrac{1}{2}$:

$$\lim_{h \to 0} \frac{5\left(\frac{1}{2}+h\right)^4 - 5\left(\frac{1}{2}\right)^4}{h} = f'\left(\frac{1}{2}\right).$$

Determiniamo il valore del secondo membro tramite le regole di derivazione:

$$f'(x) = 5 \cdot 4x^3 = 20x^3.$$

Pertanto il limite di partenza vale:

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = 20\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{20}{8} = \left(\frac{5}{2}\right).$$

SOLUZIONE DEL QUESITO 2
CORSO DI ORDINAMENTO 2012

Una retta r è asintoto per la funzione $y = f(x)$ se la distanza da r di un generico punto P appartenente al grafico della funzione tende a 0 quando l'ascissa o l'ordinata di P, o entrambe, tendono all'infinito. In particolare:

- r è asintoto orizzontale e ha equazione $y = a$, $a \in \mathbb{R}$, se $\lim_{x\to\infty} f(x) = a$;
- r è asintoto verticale e ha equazione $x = b$, $b \in \mathbb{R}$, se $\lim_{x\to b} f(x) = \infty$;

  r è asintoto obliquo e ha equazione $y = mx + q$, $m, q \in \mathbb{R}$, $m \neq 0$, se $\lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = m$ e $\lim_{x\to\infty} [f(x) - mx] = q$.

Consideriamo, ad esempio, la funzione $y = \dfrac{3x^2+1}{x^2-4}$.
Il dominio è $\mathbb{R} - \{\pm 2\}$. Calcoliamo i limiti agli estremi del dominio:

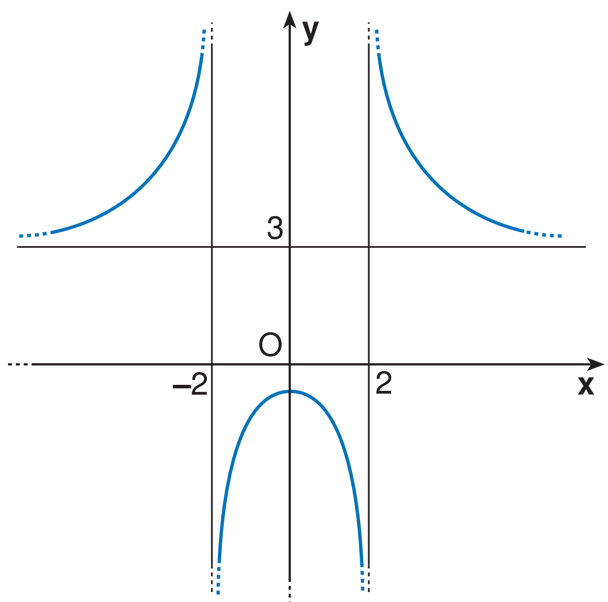
$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x^2+1}{x^2-4} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2\left(3+\dfrac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\dfrac{4}{x^2}\right)} = 3;$$

$$\lim_{x\to -2^\pm} \frac{3x^2+1}{x^2-4} = \lim_{x\to -2^\pm} \frac{3x^2+1}{(x-2)(x+2)} = \mp\infty;$$

$$\lim_{x\to 2^\pm} \frac{3x^2+1}{x^2-4} = \lim_{x\to 2^\pm} \frac{3x^2+1}{(x-2)(x+2)} = \pm\infty.$$

Abbiamo ottenuto un asintoto orizzontale di equazione $y = 3$ e due asintoti verticali di equazioni $x = -2$ e $x = 2$, come richiesto dal testo.

Riportiamo in figura il grafico della funzione studiata.


y
3
O
−2
2
x

SOLUZIONE DEL QUESITO 3
CORSO DI ORDINAMENTO 2012

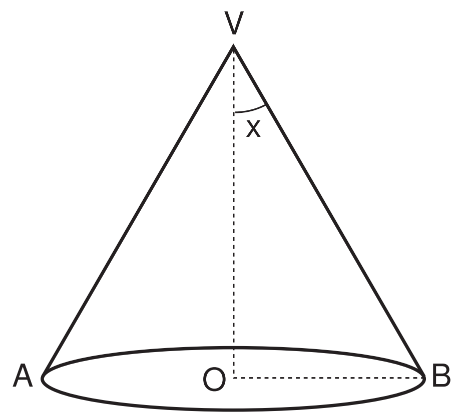
Data la posizione di una particella di equazione $s(t) = 20\left(2e^{-\frac{t}{2}} + t - 2\right)$, determiniamo la velocità $v(t)$ calcolando la derivata prima della funzione $s(t)$ e poi l'accelerazione $a(t)$ calcolando la derivata seconda di $s(t)$.
Quindi:

$$v(t) = s'(t) = 20\left(-e^{-\frac{t}{2}} + 1\right),$$
$$a(t) = s''(t) = 10e^{-\frac{t}{2}}.$$

L'accelerazione a all'istante $t = 4$ vale:

$$a(4) = 10e^{-\frac{4}{2}} = 10e^{-2} = \frac{10}{e^2}.$$

SOLUZIONE DEL QUESITO 4
CORSO DI ORDINAMENTO 2012



È dato il cono di vertice V, altezza OV e apotema $BV = 1$ m.
Omettiamo inizialmente per comodità l'unità di misura.
Indichiamo con x l'angolo $O\widehat{V}B$, con $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Per i teoremi dei triangoli rettangoli, risulta:

$$OV = BV \cdot \cos x = 1 \cdot \cos x = \cos x,$$
$$OB = BV \cdot \operatorname{sen} x = 1 \cdot \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x.$$

Calcoliamo il volume Vol del cono:

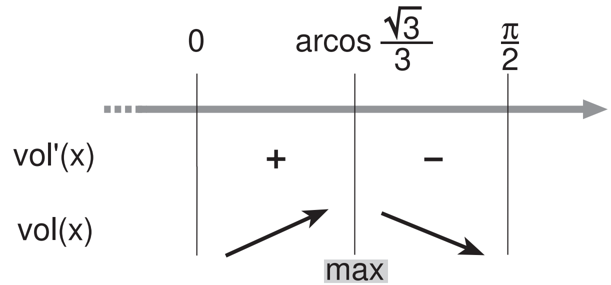
$$\mathrm{Vol}(x) = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot OB^2 \cdot OV = \frac{\pi}{3} \operatorname{sen}^2 x \cos x = \frac{\pi}{3}(1 - \cos^2 x) \cos x = \frac{\pi}{3}(\cos x - \cos^3 x).$$

Calcoliamo la derivata prima $\mathrm{Vol}'(x)$ e studiamone il segno nell'intervallo $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$:

$$\mathrm{Vol}'(x) = \frac{\pi}{3}(-\operatorname{sen} x + 3\cos^2 x \operatorname{sen} x) = \frac{\pi}{3} \operatorname{sen} x(-1 + 3\cos^2 x).$$

Visto che per ogni $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, $\operatorname{sen} x > 0$, allora $\mathrm{Vol}'(x) > 0$ se e solo se $-1 + 3\cos^2 x > 0$, con $0 < x < \frac{\pi}{2}$, cioè

$$\begin{cases} \cos x < -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 < x < \frac{\pi}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} \cos x > \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 < x < \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$



da cui $0 < x < \arccos \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Il volume $\text{Vol}(x)$ è massimo per $x = \arccos \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, e quindi:

$$\text{Vol}_{\text{max}} = \text{Vol}\left(\arccos \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\pi}{3}\left(\cos\left(\arccos \frac{\sqrt{3}}{3}\right) - \cos^3\left(\arccos \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right) =$$
$$= \frac{\pi}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{9}\right) = \frac{2 \cdot \pi}{27}\sqrt{3} \simeq 0,403\,\text{m}^3.$$

Valutiamo la capacità in litri tenuto conto che $1\,\text{m}^3 = 1000\,\ell$:

$$\text{Vol}_{\text{max}} \simeq 0,403\,\text{m}^3 = 403\,\ell.$$

SOLUZIONE DEL QUESITO 5
CORSO DI ORDINAMENTO 2012

Ricordiamo che:

- un segmento è univocamente determinato dai suoi estremi;
- un triangolo è univocamente determinato dai suoi vertici;
- un tetraedro è univocamente determinato dai suoi vertici.

Pertanto il numero di segmenti che si possono costruire dati n punti corrisponde al numero di coppie di punti che si possono scegliere dagli n dati, ovvero

$$C_{n,2} = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Analogamente, il numero di triangoli corrisponde al numero di triplette di punti che si possono formare dagli n dati, ovvero

$$C_{n,3} = \binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}.$$

Allo stesso modo si ottiene che il numero di tetraedri, corrispondente al numero di quaterne di punti che si possono scegliere dagli n dati, è

$$C_{n,4} = \binom{n}{4} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}.$$

SOLUZIONE DEL QUESITO 6
CORSO DI ORDINAMENTO 2012

La derivata della funzione

$$f(x) = 5 \operatorname{sen} x \cos x + \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x - \frac{5}{2} \operatorname{sen} 2x - \cos 2x - 17$$

è pari a

$$f'(x) = 5\cos^2 x - 5\operatorname{sen}^2 x - 2\cos x \operatorname{sen} x - 2\operatorname{sen} x \cos x - 5\cos 2x + 2\operatorname{sen} 2x$$

da cui si ottiene

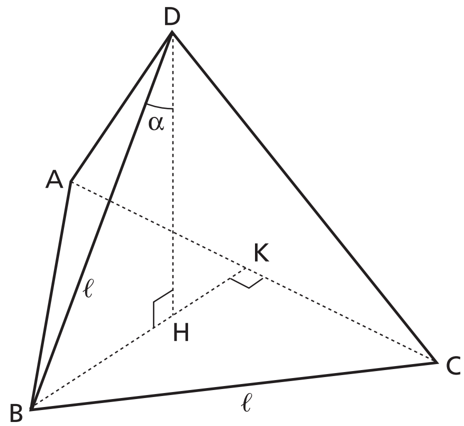
$$\begin{aligned} f'(x) &= 5(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x) - 2\operatorname{sen} 2x - 5\cos 2x + 2\operatorname{sen} 2x = \\ &= 5\cos 2x - 5\cos 2x = 0. \end{aligned}$$

Un altro modo per ottenere il valore della derivata prima di f è il seguente.
Si noti che

$$\begin{aligned} f(x) &= 5 \operatorname{sen} x \cos x + \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x - \frac{5}{2} \operatorname{sen} 2x - \cos 2x - 17 = \\ &= \frac{5}{2}\operatorname{sen} 2x + (\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x) - \frac{5}{2}\operatorname{sen} 2x - \cos 2x - 17 = \\ &= \cos 2x - \cos 2x - 17 = -17, \end{aligned}$$

allora $f'(x) = 0$.

È dato il tetraedro regolare di vertici $ABCD$, altezza $DH = h$ e spigolo ℓ. Sia α l'angolo



$B\widehat{D}H$, formato dallo spigolo BD e dall'altezza DH. Poiché il tetraedro regolare è una piramide retta, il piede H dell'altezza coincide con l'incentro del triangolo equilatero ABC, che è anche baricentro e ortocentro, e divide l'altezza BK del triangolo in due parti, una doppia dell'altra. Dalla geometria del triangolo equilatero risulta:

$$BK = \frac{\sqrt{3}}{2}\ell \;\Rightarrow\; BH = \frac{2}{3}BK = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\ell = \frac{\sqrt{3}}{3}\ell.$$

Applichiamo il teorema dei triangoli rettangoli della trigonometria al triangolo BHD per determinare l'ampiezza dell'angolo α:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{BH}{BD} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}\ell}{\ell} = \frac{\sqrt{3}}{3} \;\Rightarrow\; \alpha = \operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{3}}{3} \simeq 35,26°.$$

SOLUZIONE DEL QUESITO 8
CORSO DI ORDINAMENTO 2012

Data la funzione $f(x) = \dfrac{1}{x}$, continua nell'intervallo $[1; e]$, esiste almeno un punto $z \in [1; e]$ tale che

$$f(z) = \frac{\int_1^e \frac{1}{x} dx}{e-1},$$

con $f(z)$ valore medio della funzione nell'intervallo. Pertanto vale:

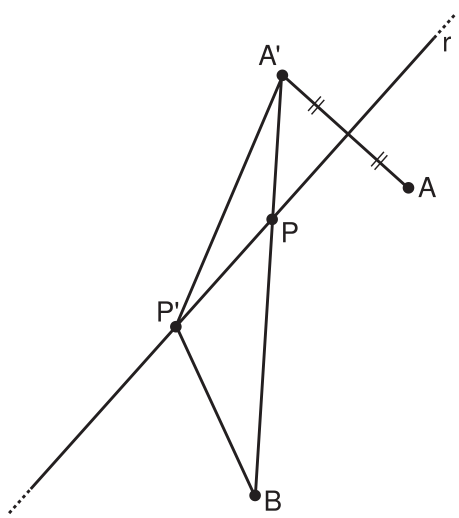
$$f(z) = \frac{\int_1^e \frac{1}{x} dx}{e-1} = \frac{[\ln|x|]_1^e}{e-1} = \frac{\ln e - \ln 1}{e-1} = \frac{1}{e-1}.$$

SOLUZIONE DEL QUESITO 9
CORSO DI ORDINAMENTO 2012

Prima di tutto osserviamo che il cammino minimo che congiunge A e B è una spezzata composta da due segmenti. Questo perchè

1. i cammini che minimizzano le distanze sono segmenti;
2. qualunque cammino che congiunga A e B toccando r si può scrivere come l'unione di due cammini, il primo congiungente A ed r, il secondo congiungente r e B;
3. ognuno dei due cammini appena introdotti è minimo se e solo se è un segmento.

I Metodo: Sia A' il punto simmetrico di A rispetto alla retta r. Consideriamo il segmento $A'B$. Tale segmento interseca la retta r in un punto P poiché A' e B appartengono a semipiani diversi rispetto ad r. Dimostriamo che P è il punto che realizza il cammino che cerchiamo. Se con P' denotiamo un arbitrario punto della retta (dove $P' \neq P$), considerando il triangolo non degenere $A'P'B$, vale che $A'P' + BP' > A'B$.

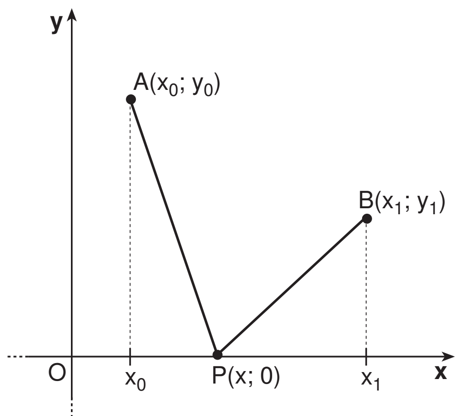


Clicca qui per guardare l'animazione su MATUTOR!

II Metodo: Per semplicità nei calcoli, possiamo considerare come retta l'asse delle x di equazione $y = 0$. Un generico punto P su tale retta avrà dunque coordinate $P(x; 0)$. Possiamo limitarci a considerare i punti $A(x_0; y_0)$ e $B(x_1; y_1)$ con $y_0 > 0$, $y_1 > 0$ (si potrebbe ragionare analogamente se fosse $y_0 < 0$ e $y_1 < 0$). Possiamo anche ipotizzare che $x_0 < x < x_1$.

Sia $f(x) = d(A, P) + d(B, P) = \sqrt{(x - x_0)^2 + y_0^2} + \sqrt{(x - x_1)^2 + y_1^2}$.

Cerchiamo un punto P di coordinate $P(x; 0)$ per cui $f(x)$ assuma valore minimo. Studiamo dunque la derivata prima di $f(x)$.



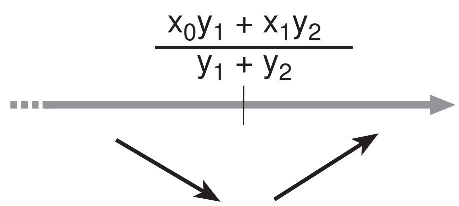
$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{x - x_0}{\sqrt{(x - x_0)^2 + y_0^2}} + \frac{x - x_1}{\sqrt{(x - x_1)^2 + y_1^2}} \geq 0 \\
&\Leftrightarrow (x - x_0)\sqrt{(x - x_1)^2 + y_1^2} \geq -(x - x_1)\sqrt{(x - x_0)^2 + y_0^2}.
\end{aligned}
$$

Poiché abbiamo assunto $x_0 < x < x_1$, ne consegue che entrambi i membri dell'ultima disequazione sono positivi. Elevandoli al quadrato si ottiene

$$
\begin{gathered}
(x - x_0)^2 \left[(x - x_1)^2 + y_1^2\right] \geq (x_1 - x)^2 \left[(x - x_0)^2 + y_0^2\right] \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow (x - x_0)^2(x - x_1)^2 + (x - x_0)^2 y_1^2 \geq (x_1 - x)^2(x - x_0)^2 + (x_1 - x)^2 y_0^2 \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow (x - x_0)^2 y_1^2 \geq (x_1 - x)^2 y_0^2 \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \left(\frac{y_1}{y_0}\right)^2 \geq \left(\frac{x_1 - x}{x - x_0}\right)^2.
\end{gathered}
$$

Poichè $y_0, y_1 > 0$ e $x_0 < x < x_1$ vale che $\dfrac{y_1}{y_0} > 0$ e $\dfrac{x_1 - x}{x - x_0} > 0$, e dunque si ha che

$$
\begin{gathered}
\frac{y_1}{y_0} \geq \frac{x_1 - x}{x - x_0} \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow y_1 x - x_0 y_1 \geq x_1 y_0 - x y_0 \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow x \geq \frac{x_0 y_1 + x_1 y_0}{y_0 + y_1}.
\end{gathered}
$$



Il cammino cercato è quindi dato dall'unione dei segmenti AP e PB, dove P ha coordinate $P\left(\dfrac{x_0y_1 + x_1y_0}{y_0 + y_1}; 0\right)$.

SOLUZIONE DEL QUESITO 10
CORSO DI ORDINAMENTO 2012

Distinguiamo i singoli casi.

A) $f(x) = \cos(\operatorname{sen}(x^2+1))$

La funzione coseno è una funzione pari ed è positiva per valori dell'argomento compresi nell'intervallo $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$. Poiché, per ogni x reale, la funzione $\operatorname{sen}(x^2+1)$ assume valori compresi nell'intervallo $]-1, 1[$, e dato che $]-1; 1[\subseteq \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, segue che per ogni x reale la funzione $f(x)$ è positiva.

B) $f(x) = \operatorname{sen}(\cos(x^2+1))$

Per ogni x reale, la funzione $\cos(x^2+1)$ assume valori compresi nell'intervallo $[-1; 1]$. In questo intervallo la funzione seno assume valori prima negativi, poi positivi.

C) $f(x) = \operatorname{sen}(\ln(x^2+1))$

Per $x = 0$ la funzione si annulla infatti $f(0) = \operatorname{sen}(\ln(0+1)) = \operatorname{sen}(0) = 0$. Pertanto la funzione non è sempre positiva.

D) $f(x) = \cos(\ln(x^2+1))$

Per ogni x reale, la funzione $\ln(x^2+1)$ assume valori compresi nell'intervallo $[0, +\infty[$. In questo intervallo la funzione coseno assume valori sia positivi sia negativi.

Quindi, la risposta corretta è la **A)**.