ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO
Tema di MATEMATICA
a. s. 2009-2010

PROBLEMA 1

Sia *ABCD* un quadrato di lato 1, *P* un punto di *AB* e γ la circonferenza di centro *P* e raggio A*P*. Si prenda sul lato *BC* un punto *Q* in modo che sia il centro di una circonferenza λ passante per *C* e tangente esternamente a γ.

1. Se $AP = x$, si provi che il raggio di λ in funzione di x è dato da $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$.
2. Riferito il piano ad un sistema di coordinate *Oxy*, si tracci, indipendentemente dalle limitazioni poste ad x dal problema geometrico, il grafico di $f(x)$. La funzione $f(x)$ è invertibile? Se sì, quale è il grafico della sua inversa?
3. Sia $g(x) = \left|\frac{1-x}{1+x}\right|$, $x \in R$; qual è l'equazione della retta tangente al grafico di $g(x)$ nel punto $R(0,1)$? E nel punto $S(1,0)$? Cosa si può dire della tangente al grafico di $g(x)$ nel punto *S*?
4. Si calcoli l'area del triangolo mistilineo *ROS*, ove l'arco *RS* appartiene al grafico di $f(x)$ o, indifferentemente, di $g(x)$.

PROBLEMA 2

Nel piano, riferito a coordinate cartesiane *Oxy*, si consideri la funzione *f* definita da $f(x) = b^x$ $(b > 0, b \neq 1)$.

1. Sia G_b il grafico di $f(x)$ relativo ad un assegnato valore di *b*. Si illustri come varia G_b al variare di *b*.
2. Sia *P* un punto di G_b. La tangente a G_b in *P* e la parallela per *P* all'asse *y* intersecano l'asse *x* rispettivamente in *A* e in B. Si dimostri che, qualsiasi sia *P*, il segmento *AB* ha lunghezza costante. Per quali valori di *b* la lunghezza di *AB* è uguale a 1?
3. Sia *r* la retta passante per *O* tangente a G_e (*e* = numero di *Nepero*). Qual è la misura in radianti dell'angolo che la retta *r* forma con il semiasse positivo delle ascisse?
4. Si calcoli l'area della regione del primo quadrante delimitata dall'asse *y*, da *Ge* e dalla retta d'equazione $y = e$.

QUESTIONARIO

1. Sia $p(x)$ un polinomio di grado n. Si dimostri che la sua derivata n-esima è $p^{(n)}(x) = n!\, a_n$ dove a_n è il coefficiente di x^n.
2. Siano ABC un triangolo rettangolo in A, r la retta perpendicolare in B al piano del triangolo e P un punto di r distinto da B. Si dimostri che i tre triangoli PAB, PBC, PCA sono triangoli rettangoli.
3. Sia γ il grafico di $f(x) = e^{3x}+1$. Per quale valore di x la retta tangente a γ in $(x, f(x))$ ha pendenza uguale a 2?
4. Si calcoli: $\lim_{x\to\infty} 4x \sin\frac{1}{x}$
5. Un serbatoio ha la stessa capacità del massimo cono circolare retto di apotema 80 cm. Quale è la capacità in litri del serbatoio?
6. Si determini il dominio della funzione $f(x) = \sqrt{cosx}$.
7. Per quale o quali valori di k la funzione

$$h(x) = \begin{cases} 3x^2 - 11x - 4, & x \le 4 \\ kx^2 - 2x - 1, & x > 4 \end{cases}$$

è continua in $x = 4$?

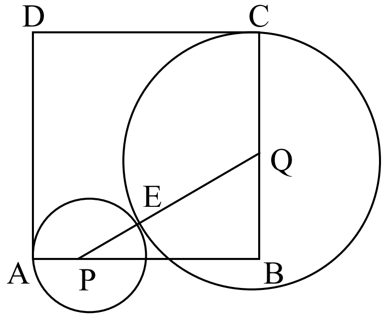
8. Se $n > 3$ e $\binom{n}{n-1}, \binom{n}{n-2}, \binom{n}{n-3}$ sono in progressione aritmetica, qual è il valore di n?
9. Si provi che non esiste un triangolo ABC con $AB = 3$, $AC = 2$ e $A\hat{B}C = 45°$. Si provi altresì che se $AB = 3$, $AC = 2$ e $A\hat{B}C = 30°$, allora esistono due triangoli che soddisfano queste condizioni.
10. Si consideri la regione delimitata da $y = \sqrt{x}$, dall'asse x e dalla retta $x = 4$ e si calcoli il volume del solido che essa genera ruotando di un giro completo intorno all'asse y.

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito l'uso della calcolatrice non programmabile.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

PROBLEMA 1

Punto 1

Consideriamo la figura sottostante in cui è rappresentata la geometria del problema.



Indichiamo con E il punto di contatto delle due circonferenze; il segmento PQ passerà per E.
Indicando con $\overline{CQ} = \overline{QE} = y, 0 < y < 1$ il raggio della circonferenza λ, si ha:

$\overline{QP} = x + y$

$\overline{PB} = 1 - x$

$\overline{QB} = 1 - y$

Applicando il teorema di Pitagora al triangolo PQB si ha:

$$\overline{QP}^2 = \overline{PB}^2 + \overline{QB}^2 \rightarrow$$
$$\rightarrow (x+y)^2 = (1-x)^2 + (1-y)^2 \rightarrow$$
$$\rightarrow \cancel{x^2} + \cancel{y^2} + 2xy = 1 + \cancel{x^2} - 2x + 1 + \cancel{y^2} - 2y \rightarrow$$
$$\rightarrow \cancel{2}y \cdot (1+x) = \cancel{2} \cdot (1-x) \rightarrow$$
$$\rightarrow y = \frac{1-x}{1+x}$$

Punto 2

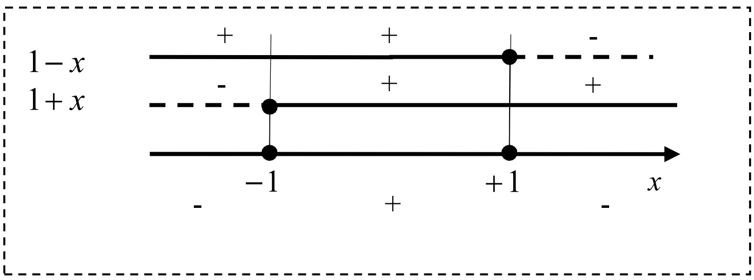
Studiamo la funzione $y = \frac{1-x}{1+x}$

- *Dominio*: $1 + x \neq 0 \rightarrow x \neq -1 \Leftrightarrow x \in (-\infty,-1) \cup (-1,+\infty)$;
- *Intersezione asse ascisse*: $y = \frac{1-x}{1+x} = 0 \rightarrow x = 1$
- *Intersezione asse ordinate*: $x = 0 \rightarrow y = -1$
- *Simmetrie*: la funzione è simmetrica rispetto alla retta $y = x$;
- *Positività*:

$N: 1 - x > 0 \Rightarrow x < 1$

$D: 1 + x > 0 \Rightarrow x > -1$

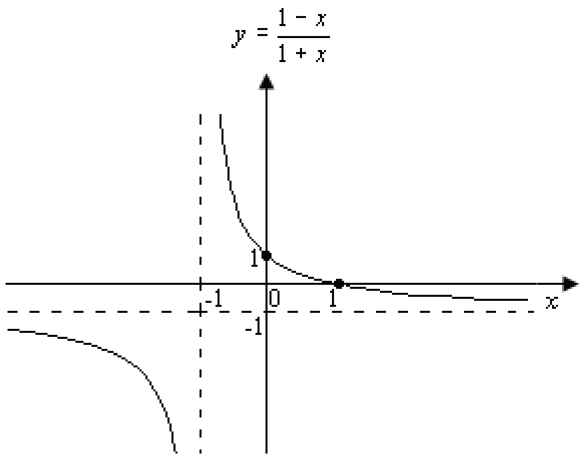
$y = \frac{1-x}{1+x} > 0 \Rightarrow -1 < x < 1$



- *Asintoti verticali*: $\lim_{x\to -1^-} \frac{1-x}{1+x} = -\infty, \lim_{x\to -1^+} \frac{1-x}{1+x} = +\infty$ per cui $x = -1$ è asintoto verticale;
- *Asintoti orizzontali*: $\lim_{x\to \pm\infty} \frac{1-x}{1+x} = -1$ per cui $y = -1$ è asintoto orizzontale;
- *Asintoti obliqui*: trattandosi di funzione razionale fratta, la presenza dell'asintoto orde la presenza di quelli obliqui;

- *Crescenza e decrescenza*: la derivata prima è $y'=-\frac{2}{(1+x)^2}$ che è sempre negativa nel dominio $x\in(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$; quindi nel dominio la funzione è strettamente decrescente;
- *Concavità e convessità*: la derivata seconda è $y''=\frac{4}{(1+x)^3}$ per cui la funzione presenta concavità verso l'alto in $(-1,+\infty)$ e verso il basso in $(-\infty,-1)$; non esistono flessi.

Il grafico è di seguito presentato:



Alternativamente avremmo potuto ricavare il grafico ricordando che la funzione $y=\frac{1-x}{1+x}$ è una funzione omografica, definita per $x\neq -1$, di asintoto verticale $x=-1$ ed orizzontale $y=-1$, con centro di simmetria in $C(-1,-1)$.

In altro modo effettuando la trasformazione $\sigma:\begin{cases}X=x+1\\Y=y+1\end{cases}$, la funzione trasformata nel nuovo riferimento cartesiano (X,Y) sarà $Y-1=\frac{1-(X-1)}{1+(X-1)}\rightarrow Y-1=\frac{2-X}{X}\rightarrow Y=\frac{2}{X}\rightarrow XY=2$, cioè una iperbole equilatera di asintoti $X=0, Y=0$; applicando quindi la trasformazione, la funzione di partenza sarà una iperbole equilatera traslata di asintoti $x=X-1=-1, y=Y-1=-1$.

La funzione $y=\frac{1-x}{1+x}$, come sopra evidenziato, è strettamente decrescente nel dominio $x\in(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$ e inoltre se $x\in(-\infty,-1)\Rightarrow y<-1$ e $x\in(-1,+\infty)\Rightarrow y>-1$, per cui essa è invertibile.

Per ricavare l'inversa poniamo $y=f(x)$ e risolviamo nella variabile *x* l'equazione $\frac{1-x}{1+x}=y$; si ha $x=\frac{1-y}{1+y}$, per cui $f^{-1}(x)=\frac{1-x}{1+x}=f(x)$ cioè l'inversa di f è f stessa; quindi f ed f^{-1} hanno stesso grafico o equivalentemente il grafico di f^{-1} è il simmetrico di quello di f rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante di equazione $y=x$.

Punto 3

La funzione $g(x)=\left|\frac{1-x}{1+x}\right|$ può essere riscritta nel seguente modo:

$$g(x)=\left|\frac{1-x}{1+x}\right|=\begin{cases}\frac{1-x}{1+x} & \text{se } -1<x\le 1\\ -\frac{1-x}{1+x} & \text{se } x<-1 \vee x>1\end{cases}$$

il cui grafico lo si ricava da quello di $y=\frac{1-x}{1+x}$ ribaltando verso le ordinate positive le parti di grafico al di sotto dell'asse delle ascisse.

In particolare la derivata prima sarà:

$$g'(x)=\begin{cases}-\frac{2}{(1+x)^2} & \text{se } -1<x\le 1\\ \frac{2}{(1+x)^2} & \text{se } x<-1 \vee x>1\end{cases}$$

L'equazione della tangente al grafico di $g(x)$ in un punto generico (x_P, y_P) è $y-y_P=g'(x_P)(x-x_P)$; nel punto ad ascissa $x_R=0$ si ha $y_R=1, g'(x_R)=\left[-\frac{2}{(1+x_R)^2}\right]_{x_R=1}=-2$ per cui l'equazione della tangente in $\mathrm{R}(0,1)$ è $t_1: y=-2x+1$.

Per quanto riguarda la tangente al punto di ascissa $x_S=1$, calcoliamo il limite destro e sinistro della derivata $g'(x)$:

$$\lim_{x\to 1^-} g'(x)=\lim_{x\to 1^-}\left[-\frac{2}{(1+x)^2}\right]=-\frac{1}{2}$$

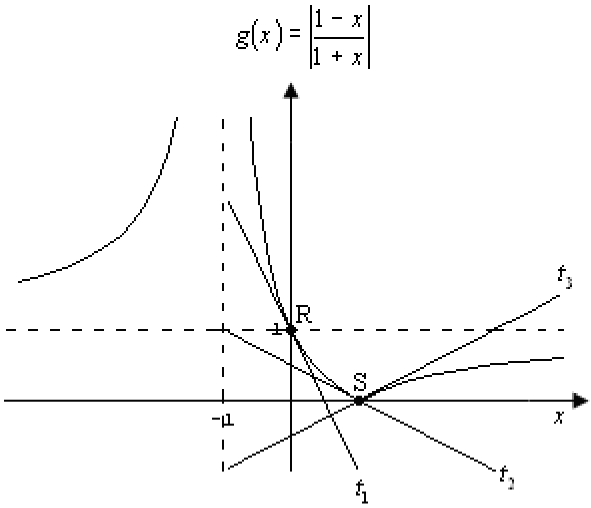
$$\lim_{x\to 1^+} g'(x)=\lim_{x\to 1^+}\left[\frac{2}{(1+x)^2}\right]=\frac{1}{2}$$

Essendo limite destro e sinistro finiti e differenti, deduciamo che in $x_S=1$ la funzione presenta un punto angoloso di non derivabilità, per cui non ha senso parlare di tangente al grafico di $g(x)=\left|\frac{1-x}{1+x}\right|$ in $\mathrm{S}(1,0)$; in particolare, trattandosi di punto angoloso, possiamo parlare di tangente a sinistra ed a destra del grafico di $g(x)$ che hanno rispettivamente equazioni

$$t_2: y=-\frac{1}{2}(x-1)$$

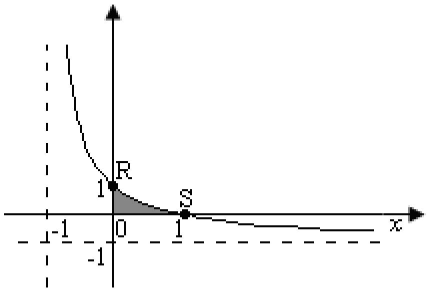
$$t_3: y=\frac{1}{2}(x-1)$$

Il grafico sottostante raffigura la funzione $g(x)=\left|\frac{1-x}{1+x}\right|$ e le tre tangenti nello stesso riferimento cartesiano:



Punto 4

Consideriamo il grafico seguente in cui l’area da calcolare è colorata in grigio:



L’area vale $A = \int_0^1 \left(\frac{1-x}{1+x} \right) dx = \int_0^1 \left(\frac{2}{1+x} - 1 \right) dx = \left[2\ln|x+1| \right]_0^1 - 1 = 2\ln 2 - 1 = \ln 4 - 1 = \ln\left(\frac{4}{e} \right)$.

PROBLEMA 2

Punto 1

Al variare di $b > 0, b \neq 1$, il grafico G_b sta sempre nel semispazio delle ordinate positive e tutti i grafici passeranno per il punto $(0,1)$. Fissato $b > 0, b \neq 1$, studiamo la funzione $f(x) = b^x$:

$$\lim_{x \to +\infty} b^x = \begin{cases} +\infty & \text{se} \quad b > 1 \\ 0 & \text{se} \quad 0 < b < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -\infty} b^x = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad b > 1 \\ +\infty & \text{se} \quad 0 < b < 1 \end{cases}$$

Dai limiti soprastanti deduciamo che $f(x) = b^x$ presenta l'asintoto orizzontale destro $y = 0$ se $0 < b < 1$, mentre presenta l'asintoto orizzontale sinistro $y = 0$ se $b > 1$.

Le derivate prima e seconda sono rispettivamente:

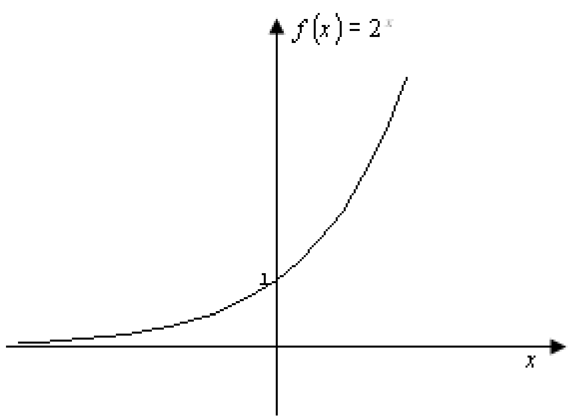
$$f'(x) = \ln b \cdot b^x$$

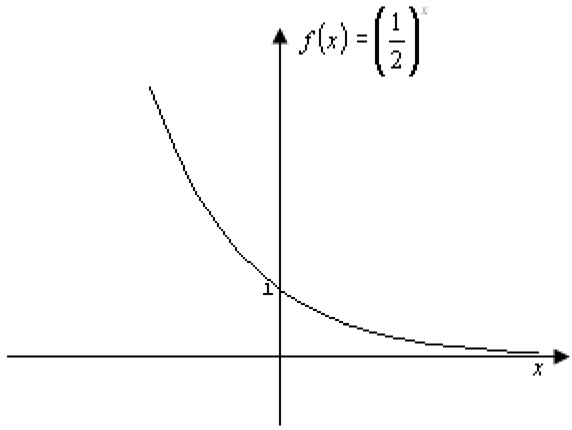
$$f''(x) = (\ln b)^2 \cdot b^x$$

da cui deduciamo che se $b > 1 (\ln b > 0)$ la funzione è strettamente crescente, mentre se $0 < b < 1 (\ln b < 0)$ è strettamente decrescente; in ambo i casi la funzione è convessa in tutto R cioè volge sempre concavità verso l'alto in quanto $(\ln b)^2 > 0 \ \forall b > 0 \wedge b \neq 1$.

Inoltre poiché $\left(\frac{1}{b}\right)^x = b^{-x}$, deduciamo che $(x, y) \in G_{\frac{1}{b}}$ se $(-x, y) \in G_b$, in altre parole il grafico di $G_{\frac{1}{b}}$ lo si ricava per simmetria intorno all'asse delle ordinate a partire da quello di G_b.

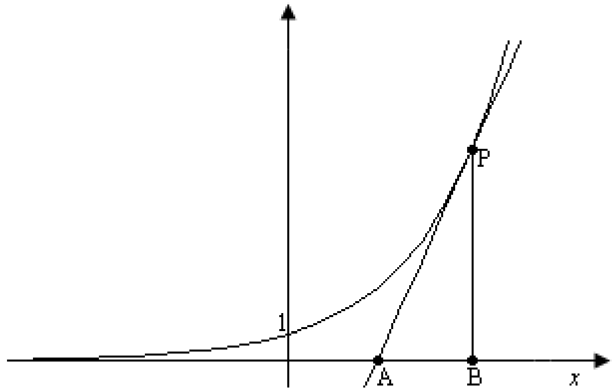
Di seguito due grafici per $b = 2, b = \frac{1}{2}$:





Punto 2

Consideriamo la figura seguente, in cui si è assunto senza ledere la generalità del problema $b > 1$.



Il generico punto P ha coordinate $P(a, b^a)$, per cui il punto B avrà coordinate $B(a,0)$; la tangente al grafico di $f(x) = b^x$ in un punto generico (x_P, y_P) è $y - y_P = f'(x_P)(x - x_P)$; nel punto ad ascissa $x_P = a$ si ha $f'(x_P) = \left[\ln b \cdot b^x\right]_{x_P = a} = \ln b \cdot b^a$ per cui l'equazione della tangente in $P(a, b^a)$ è $y = \ln b \cdot b^a \cdot (x - a) + b^a$. L'ascissa del punto A si ricava imponendo $y = 0$ in $y = \ln b \cdot b^a \cdot (x - a) + b^a$, da cui $A\left(a - \frac{1}{\ln b}, 0\right)$.

Il segmento $\overline{AB}$ misura allora: $\overline{AB} = |x_B - x_A| = \left| a - \left(a - \frac{1}{\ln b}\right)\right| = \frac{1}{|\ln b|}$ che risulta essere, fissato *b*, costante al variare di $P(a, b^a)$. La lunghezza del segmento orientato $\overrightarrow{AB}$ si chiama sottotangente e le funzioni esponenziali $f(x) = b^x$ hanno la sottotangente costante pari a $\frac{1}{|\ln b|} = |\log_b e|$.

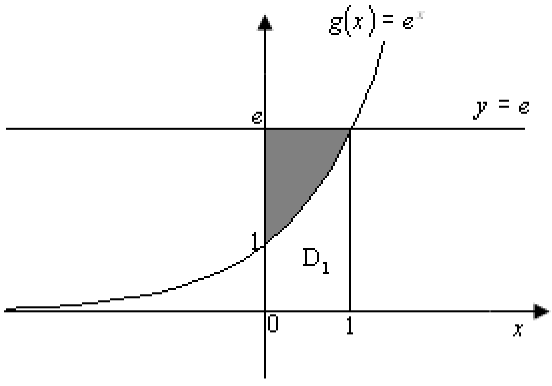
Inoltre $\overline{AB} = \frac{1}{|\ln b|} = 1$ se $|\ln b| = 1 \to \ln b = \pm 1$ e cioè se $b = e \vee b = \frac{1}{e}$.

Punto 3

Un generico punto P del grafico G_e di $g(x) = e^x$ ha coordinate $P(a, e^a)$ e la tangente in $P(a, e^a)$ a G_e ha equazione $y = e^a \cdot (x - a) + e^a$. Imponendo il passaggio per l'origine $O(0,0)$ della retta tangente, si ha: $0 = e^a \cdot (0 - a) + e^a \to e^a(1 - a) = 0 \to a = 1$ in quanto $e^a > 0 \ \forall a \in R$. Quindi la retta tangente passante per l'origine ha equazione $y = e \cdot x$ e forma con il semiasse positivo delle ascisse un angolo pari all'arcotangente del coefficiente angolare $\alpha = \arctan(e)[\text{rad}] \approx 1{,}2182\,[\text{rad}]$.

Punto 4

Consideriamo il grafico seguente in cui l'area da calcolare D è colorata in grigio:



Tale area può essere calcolata come differenza delle aree:

- del rettangolo R di vertici $(0,0),(1,0),(1,e),(0,e)$;
- dell'area D_1 sottesa da G_e compresa tra le ascisse $x=0, x=1$

L'area del rettangolo vale $S(R)=e\cdot 1=e$ mentre l'area dell'area sottesa da G_e compresa tra le ascisse $x=0, x=1$ vale $S(D_1)=\int_0^1 e^x dx=\left[e^x\right]_0^1=e-1$.

In conclusione $S(D)=S(R)-S(D_1)=e-(e-1)=1$.

Alternativamente l'inversa della funzione $g(x)=e^x$ è $g^{-1}(y)=\ln y$ con $y>0$, per cui l'area da calcolare diventa: $S(D)=\int_1^e \ln y dy=\left[y(\ln y-1)\right]_1^e=\left[e(\ln e-1)-1(\ln 1-1)\right]=\left[e(1-1)-1(0-1)\right]=1$ in cui si è applicata l'integrazione per parti.

QUESTIONARIO

Quesito 1

Un generico polinomio $p(x)$ di grado *n* può essere scritto nel seguente modo:

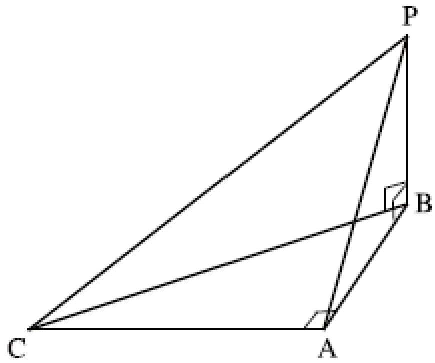
$p(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0$ con $a_i\in R, i=0,1,\cdots,n$

Calcoliamo le derivate prima, seconda e così via sino all'n-esima:

$$p'(x)=n\cdot a_n x^{n-1}+(n-1)\cdot a_{n-1}x^{n-2}+\cdots+2\cdot a_2x+a_1$$
$$p''(x)=n\cdot(n-1)\cdot a_n x^{n-2}+(n-1)\cdot(n-2)\cdot a_{n-1}x^{n-3}+\cdots+2\cdot a_2$$
$$p'''(x)=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot a_n x^{n-3}+(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\cdot a_{n-1}x^{n-4}+\cdots+6\cdot a_3$$
$$\vdots$$
$$p^{(n)}(x)=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\cdot(n-4)\cdot\cdots\cdot 2\cdot 1\cdot a_n=n!\cdot a_n$$

Quesito 2

Consideriamo la figura a lato rappresentante la geometria del problema.



Poiché la retta PB è ortogonale al piano del triangolo, essa è ortogonale a tutte le rette del piano passanti per B, quindi è ortogonale a BA e BC, da cui deduciamo che i triangoli PBC e PBA sono entrambi rettangoli in B. Ci resta da dimostrare che anche PAC è rettangolo; in particolare vogliamo dimostrare che PAC è rettangolo in A. Ciò è vero se, applicando il teorema

di Pitagora, si ha $\overline{PC}^2=\overline{PA}^2+\overline{AC}^2$.

Applicando il teorema di Pitagora ai triangoli PBA , PBC ed ABC otteniamo:

$\overline{PB}^2=\overline{PA}^2-\overline{AB}^2 \quad (1)$

$\overline{PC}^2=\overline{PB}^2+\overline{BC}^2 \quad (2)$

$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2 \quad (3)$

Sostituendo le espressioni (1) e (3) in (2) si ha:

$\overline{PC}^2=\overline{PB}^2+\overline{BC}^2=\left(\overline{PA}^2-\overline{AB}^2\right)+\left(\overline{AB}^2+\overline{AC}^2\right)=\overline{PA}^2+\overline{AC}^2$ cioè il triangolo PAC è rettangolo in A.

Quesito 3

La pendenza della retta tangente in x a una funzione $f(x)$ è la derivata prima di $f(x)$. Nel caso in esame la derivata prima di $f(x)=e^{3x}+1$ è $f'(x)=3e^{3x}$, per cui imponendo $f'(x)=3e^{3x}=2$ si ricava $e^{3x}=\frac{2}{3}\rightarrow 3x=\ln\left(\frac{2}{3}\right)\rightarrow x=\frac{1}{3}\ln\left(\frac{2}{3}\right)=\ln\left(\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right)$. In corrispondenza di $x=\ln\left(\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right)$ si ha $f\left(\ln\left(\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right)\right)=e^{\ln\left(\frac{2}{3}\right)}+1=\frac{2}{3}+1=\frac{5}{3}$. Quindi la funzione $f(x)=e^{3x}+1$ ha tangente in $\left(\ln\left(\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right),\frac{5}{3}\right)$ con pendenza pari a 2.

Quesito 4

Effettuiamo il cambio di variabile $y=\frac{1}{x}$; se $x\rightarrow\infty$ $y\rightarrow 0$, per cui

$$\lim_{x\rightarrow\infty}4x\sin\frac{1}{x}=4\cdot\lim_{y\rightarrow 0}\frac{\sin y}{y}=4$$

in cui si è sfruttato il limite notevole $\lim_{y\rightarrow 0}\frac{\sin y}{y}=1$.

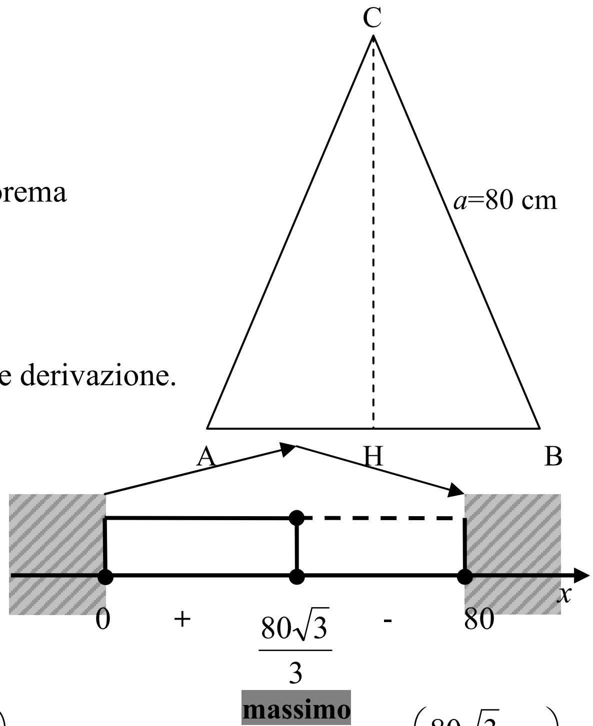
Quesito 5

Consideriamo la figura a lato in cui è rappresentato in sezione un cono di apotema $a=80cm$, altezza h e raggio di base r.

Poniamo $\overline{CH}=x, 0<x<80$. Il raggio di base per il teorema di Pitagora misura $\overline{HB}=r=\sqrt{6400-x^2}$.

Il volume del cono è $V(x)=\frac{\pi h r^2}{3}=\frac{\pi}{3}x\left(6400-x^2\right)$.

La massimizzazione del volume la effettuiamo mediante derivazione. Si ha:



$$V'(x)=\frac{\pi}{3}\left(6400-3x^2\right)$$

$$V'(x)>0\rightarrow 0<x<\frac{80\sqrt{3}}{3}$$

$$V'(x)<0\rightarrow\frac{80\sqrt{3}}{3}<x<80$$

quindi il volume è strettamente crescente in $\left(0,\frac{80\sqrt{3}}{3}\right)$ e strettamente decrescente in $\left(\frac{80\sqrt{3}}{3},80\right)$.

Inoltre $V''(x)=-2\pi x$ e $V''\left(\frac{80\sqrt{3}}{3}\right)=-\frac{160\pi\sqrt{3}}{3}<0$ per cui il volume è massimo per $x=\frac{80\sqrt{3}}{3}$ e vale

$$V_{MAX}=V\left(\frac{80\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{\pi}{3}\left(\frac{80\sqrt{3}}{3}\right)\left(6400-\frac{6400}{3}\right)=\frac{1024000\sqrt{3}}{27}\pi\left[\text{cm}^3\right]=\frac{1024\sqrt{3}}{27}\pi\left[\text{dm}^3\right].$$

Ricordando che $1\,l = 1\,\text{dm}^3$, il volume massimo in litri è $V_{MAX} = \dfrac{1024\sqrt{3}}{27}\pi$ litri $\cong 206{,}4$ litri.

Quesito 6

Il dominio di $f(x) = \sqrt{\cos(x)}$ è l'insieme degli $x \in R$ che soddisfano la disequazione $\cos(x) \geq 0$, cioè $-\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ con $k \in Z$.

Quesito 7

Affinché la funzione $h(x)$ sia continua in $x = 4$ deve aversi $\lim_{x\to 4^-} h(x) = \lim_{x\to 4^+} h(x)$. Per il caso in esame i limiti sinistro e destro valgono rispettivamente:

$$\lim_{x\to 4^-} h(x) = \lim_{x\to 4^-}\left(3x^2 - 11x - 4\right) = 0$$

$$\lim_{x\to 4^+} h(x) = \lim_{x\to 4^+}\left(kx^2 - 2x - 1\right) = 16k - 9$$

Imponendone l'uguaglianza si ha $16k - 9 = 0 \Rightarrow k = \dfrac{9}{16}$.

In $x = 4$ la funzione è tuttavia non derivabile e presenta un punto angoloso in quanto

$$\lim_{x\to 4^-} h'(x) = \lim_{x\to 4^-}(6x - 11) = 13$$

$$\lim_{x\to 4^+} h'(x) = \lim_{x\to 4^+}\left(\frac{9}{8}x - 2\right) = \frac{5}{2}$$

Quesito 8

Una progressione aritmetica è una successione di numeri tali che la differenza tra ciascun termine e il suo precedente sia una costante. Tale costante viene detta *ragione* della progressione.

Nel caso in esame i tra numeri $\binom{n}{n-1},\binom{n}{n-2},\binom{n}{n-3}$ sono in progressione aritmetica se

$$\binom{n}{n-1} - \binom{n}{n-2} = \binom{n}{n-2} - \binom{n}{n-3} \to \binom{n}{n-3} - 2\binom{n}{n-2} + \binom{n}{n-1} = 0.$$

Esplicitiamo i singoli coefficienti binomiali:

$$\binom{n}{n-1} = \frac{n!}{(n-1)!\cdot 1!} = \frac{n!}{(n-1)!} = n$$

$$\binom{n}{n-2} = \frac{n!}{(n-2)!\cdot 2!} = \frac{n!}{(n-2)!\cdot 2} = \frac{n\cdot(n-1)}{2}$$

$$\binom{n}{n-3} = \frac{n!}{(n-3)!\cdot 3!} = \frac{n!}{(n-3)!\cdot 6} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{6}$$

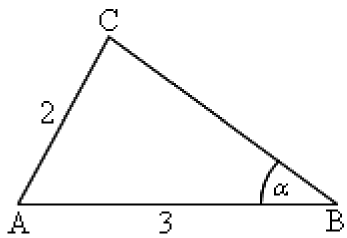
Si ha quindi:

$$\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{6}-2\cdot\frac{n\cdot(n-1)}{2}+n=0\rightarrow$$
$$\rightarrow\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{6}-n\cdot(n-1)+n=0\rightarrow$$
$$\rightarrow\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{6}-n\cdot(n-2)=0\rightarrow$$
$$\rightarrow\frac{n\cdot(n-2)}{6}(n-1-6)=\frac{n\cdot(n-2)\cdot(n-7)}{6}=0\rightarrow\left\langle\begin{array}{l} n=0<3 \text{ non acc.}\\ n=2<3 \text{ non acc.}\\ n=7>3 \text{ acc.}\end{array}\right.$$

In conclusione il valore accettabile è $n=7$ cui corrispondono i tre valori $\binom{7}{6}=7,\binom{7}{5}=21,\binom{7}{4}=35$.

Quesito 9

Consideriamo la figura a lato, rappresentante il triangolo ABC con $\overline{\mathrm{AC}}=2,\overline{\mathrm{AB}}=3,\mathrm{A\hat{B}C}=\alpha$ e consideriamo i casi corrispondenti ad $\alpha=45°$ ed $\alpha=30°$.



- $\alpha=45°$

  Applicando il teorema dei seni si ha:

  $$\frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\sin(\mathrm{A\hat{C}B})}=\frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\sin(\alpha)}\rightarrow$$
  $$\rightarrow\sin(\mathrm{A\hat{C}B})=\frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\overline{\mathrm{AC}}}\cdot\sin(\alpha)\rightarrow$$
  $$\rightarrow\sin(\mathrm{A\hat{C}B})=\frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$$

  Poiché $\frac{3\sqrt{2}}{4}>1$, un triangolo con $\overline{\mathrm{AC}}=2,\overline{\mathrm{AB}}=3,\mathrm{A\hat{B}C}=45°$ non esiste.

- $\alpha=30°$

  Applicando ancora una volta il teorema dei seni si ricava

  $$\frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\sin(\mathrm{A\hat{C}B})}=\frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\sin(\alpha)}\rightarrow$$
  $$\rightarrow\sin(\mathrm{A\hat{C}B})=\frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\overline{\mathrm{AC}}}\cdot\sin(\alpha)\rightarrow$$
  $$\rightarrow\sin(\mathrm{A\hat{C}B})=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{4}\rightarrow$$
  $$\rightarrow\mathrm{A\hat{C}B}=\arcsin\left(\frac{3}{4}\right)\cong 48{,}6°\vee\mathrm{A\hat{C}B}=180°-\arcsin\left(\frac{3}{4}\right)\cong 131{,}4°$$

  In tal caso esistono due triangoli che soddisfano le condizioni $\overline{\mathrm{AC}}=2,\overline{\mathrm{AB}}=3,\mathrm{A\hat{B}C}=30°$.

  Per calcolare la misura del terzo lato si può procedere in due modi distinti:

  - Teorema dei seni: si ha

$$\frac{\overline{AC}}{\sin(\alpha)} = \frac{\overline{BC}}{\sin(C\hat{A}B)} \rightarrow$$

$$\rightarrow \overline{BC} = \overline{AC} \cdot \frac{\sin(C\hat{A}B)}{\sin(\alpha)} \rightarrow$$

$$\rightarrow \overline{BC} = \overline{AC} \cdot \frac{\sin(150° - A\hat{C}B)}{\frac{1}{2}} \rightarrow$$

$$\rightarrow \overline{BC} = 2 \cdot \overline{AC} \cdot \sin(150° - A\hat{C}B) = 4 \cdot [\sin(150°)\cos(A\hat{C}B) - \cos(150°)\sin(A\hat{C}B)] \rightarrow$$

$$\rightarrow \overline{BC} = 4 \cdot \left[\frac{\cos(A\hat{C}B)}{2} + \frac{\sqrt{3}\sin(A\hat{C}B)}{2}\right] = 4 \cdot \left[\frac{\pm\sqrt{1-\sin^2(A\hat{C}B)}}{2} + \frac{\sqrt{3}\cdot\sin(A\hat{C}B)}{2}\right] \rightarrow$$

$$\rightarrow \overline{BC} = 4 \cdot \left(\frac{\pm\sqrt{1-\frac{9}{16}}}{2} + \frac{\sqrt{3}\cdot\frac{3}{4}}{2}\right) = 4 \cdot \left(\pm\frac{\sqrt{7}}{8} + \frac{3\sqrt{3}}{8}\right) = \frac{(3\sqrt{3} \pm \sqrt{7})}{2}$$

- Teorema di Carnot: posto $\overline{BC} = x$ si ha

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + x^2 - 2 \cdot \overline{AB} \cdot x \cdot \cos(\alpha) \rightarrow$$

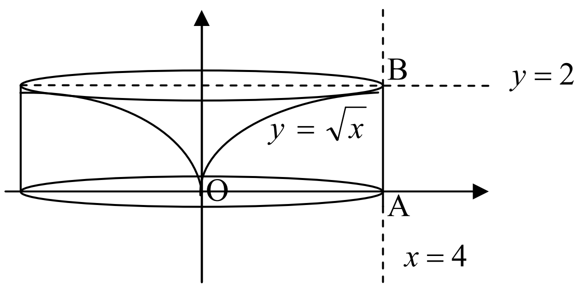
$$\rightarrow 4 = 9 + x^2 - 2 \cdot 3 \cdot x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2 - 3\sqrt{3} \cdot x + 5 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \overline{BC} = \frac{3\sqrt{3} \pm \sqrt{7}}{2}$$

Quesito 10

Consideriamo la figura a lato rappresentante il solido di volume V ottenuto dalla rotazione intorno all'asse y della regione delimitata da $y = \sqrt{x}$, dall'asse x e dalla retta $x = 4$.



Il volume richiesto è dato dalla differenza del volume del cilindro di altezza $\overline{AB} = 2$ e raggio di base $\overline{OA} = 4$ ed il volume ottenuto dalla rotazione della parte di piano delimitata da $y = \sqrt{x}$, dall'asse y e dalla retta $y = 2$.

Il volume del cilindro è $V_C = \pi \cdot \overline{OA}^2 \cdot \overline{AB} = 32\pi$.

Il volume ottenuto dalla rotazione della parte di piano delimitata da $y = \sqrt{x}$, dall'asse y e dalla retta $y = 2$, è $V_D = \pi \cdot \int_0^2 g^2(y)dy$ dove $g(y) = y^2, 0 \le y \le 2$;

quindi $V_D = \pi \cdot \int_0^2 g^2(y)dy = \pi \cdot \int_0^2 y^4 dy = \pi \cdot \left[\frac{y^5}{5} \right]_0^2 = \frac{32}{5}\pi$.

In conclusione $V = V_C - V_D = 32\pi - \frac{32}{5}\pi = \frac{128}{5}\pi$.

Alternativamente il volume richiesto può essere calcolato nel seguente modo: consideriamo il cilindro C ottenuto ruotando attorno all'asse delle *y* il segmento AB di estremi $A(x,0), B(x,\sqrt{x})$; tale cilindro avrà superficie laterale pari a $S(x) = 2\pi x \cdot \sqrt{x}$ integrando la quale in $[0,4]$ si ottiene il volume:

$$V = \int_0^4 S(x)dx = \int_0^4 2\pi x \cdot \sqrt{x}dx = 2\pi \int_0^4 x^{\frac{3}{2}}dx = 2\pi \cdot \frac{2}{5}\left[x^{\frac{5}{2}} \right]_0^4 = \frac{4}{5}\pi \cdot 4^{\frac{5}{2}} = \frac{4}{5}\pi \cdot 2^5 = \frac{128}{5}\pi .$$

Nicola de Rosa