ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

Indirizzo M: ordinamento + liceo della comunicazione

CORSO DI ORDINAMENTO

Sessione suppletiva 2009

Tema di MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 dei 10 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

I due segmenti adiacenti OA, AB sono uguali ed hanno una lunghezza data a. Nel medesimo semipiano rispetto alla retta OB si descrivano due semicirconferenze di diametri rispettivi OA ed OB, e per il punto O si conduca la semiretta tangente comune, sulla quale si prenda il segmento OC = a. Con origine O, si conduca una semiretta, che forma con OB un angolo α e interseca in P e Q le semicirconferenze.

1. Si calcoli il rapporto:

$$(1) \qquad \frac{\overline{CP}^2 + \overline{PQ}^2 + \overline{QC}^2}{2a^2}$$

e lo si esprima in funzione di $x = \tan(\alpha)$, controllando che risulta:

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 4}{x^2 + 1}$$

2. Prescindendo dalla questione geometrica, si studi la funzione f(x) e se ne tracci il grafico γ.

3. Si dica per quale valore di α si hanno rispettivamente il massimo e il minimo del rapporto (1).

4. Si determini l'area della superficie piana, finita, delimitata dall'asse delle ordinate, dalla curva γ e dal suo asintoto.

PROBLEMA 2

Sia data la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} x(2 - \ln x) & \text{per } x > 0 \\ 0, & \text{per } x = 0 \end{cases}$$

1. Questa funzione è continua nel punto di ascissa 0 ? E' derivabile in tale punto ?

2. Si studi la funzione f(x) e se ne tracci il grafico γ, su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy).

3. Si calcoli l'espressione, in funzione di $t(t > 0)$, dell'integrale

$$I(t) = \int_t^{e^2} x(2 - \ln x)dx$$

4. Si faccia vedere che I(t) tende verso un limite finito quando t tende a 0. Cosa rappresenta questo limite nel grafico precedente ?

QUESTIONARIO

1. Una piramide, avente area di base B e altezza h, viene secata con un piano parallelo alla base. Si calcoli a quale distanza dal vertice si deve condurre tale piano, affinché il prisma che ha per basi la sezione di cui sopra e la sua proiezione ortogonale sul piano di base della piramide abbia volume massimo.

2. Si calcoli il limite della funzione $\frac{\ln^2 x + x - 1}{x^2 - x + \sin^2(x-1)}$ quando x tende a 1.

3. Si calcoli il volume del solido generato dalla rotazione attorno all'asse x della porzione di piano limitata dalla curva $y = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, dall'asse x e dalle rette $x = 1, x = \sqrt{3}$.

4. Dato un triangolo rettangolo inscritto in un semicerchio, se sui suoi cateti presi come diametri ed esternamente si costruiscono due semicerchi, da questi e dal dato semicerchio sono determinati due menischi, detti lunule d'Ippocrate. Si dimostri che la loro somma ha la stessa area del triangolo.

5. Si determini il luogo γ dei punti di intersezione delle due rette di equazioni:

$$\lambda x - y - (\lambda + 2) = 0\,,$$

$$(1 - \lambda)\, x + y + 2 = 0,$$

descritto al variare di λ, parametro reale qualunque. Si disegni la curva γ.

6. Sono dati un angolo α di π^2 radianti e un angolo β di 539 gradi. Si verifichi che sono entrambi maggiori di un angolo giro e minori di due angoli giro. Si dica quale dei due è il maggiore. Si dica inoltre se è più grande il seno di α o il seno di β.

7. Il comandante di una nave decide di raggiungere il porto B partendo dal punto A e seguendo un percorso rettilineo. A causa di un errore, però, la nave inizia la sua navigazione lungo una rotta leggermente diversa da quella prevista. Dopo 5 ore ci si accorge dello sbaglio e il comandante ordina di virare di un angolo di 23° in modo da dirigere ora esattamente verso il porto B, che viene raggiunto dopo 3 ore. Se l'imbarcazione ha mantenuto sempre una velocità costante, quanto tempo si è perso a causa dell'errore?

8. Data la parabola $x = -ay^2 + 3y$ (con a > 0), si determini per quale valore di a l'area della parte finita di piano compresa tra il suo grafico e l'asse y è uguale a 72.

9. Si dimostri che un numero di quattro cifre tutte uguali è divisibile per 101.

10. Si enunci il teorema di Rolle e si mostri, con opportuni esempi, che se una qualsiasi delle tre condizioni previste non è soddisfatta, il teorema non è valido.

———————

Durata massima della prova: 6 ore.
E' consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.
Non è ammesso lasciare l'aula degli esami prima che siano trascorse tre ore dalla dettatura del tema.

PROBLEMA 1

I due segmenti adiacenti OA, AB sono uguali ed hanno una lunghezza data *a*. Nel medesimo semipiano rispetto alla retta OB si descrivano due semicirconferenze di diametri rispettivi OA ed OB, e per il punto O si conduca la semiretta tangente comune, sulla quale si prenda il segmento OC = *a*. Con origine O, si conduca una semiretta, che forma con OB un angolo α e interseca in P e Q le semicirconferenze.

Punto 1

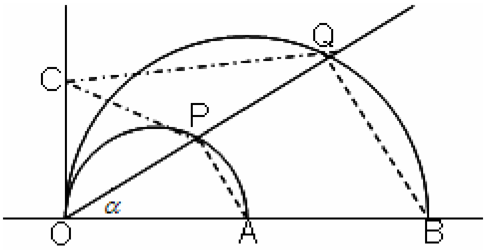
Si calcoli il rapporto:

$$(1) \qquad \frac{\overline{CP}^2+\overline{PQ}^2+\overline{QC}^2}{2a^2}$$

e lo si esprima in funzione di $x=\tan(\alpha)$**, controllando che risulta:**

$$f(x)=\frac{x^2-3x+4}{x^2+1}$$

Si consideri la figura seguente:



Posto $P\hat{O}A=\alpha$ con $0°<\alpha<90°$, applicando il teorema dei triangoli rettangoli ai triangoli OPA e OQB si ha $\overline{OP}=a\cos(\alpha), \overline{OQ}=2a\cos(\alpha), \overline{PQ}=\overline{OQ}-\overline{OP}=a\cos(\alpha)$. Applicando il teorema di Carnot ai triangoli OCP e OCQ si ha:

$$\overline{CP}^2=\overline{OC}^2+\overline{OP}^2-2\cdot\overline{OC}\cdot\overline{OP}\cdot\cos(90°-\alpha)=$$
$$=a^2+a^2\cos^2(\alpha)-2\cdot a\cdot a\cos(\alpha)\cdot\sin(\alpha)=a^2\left[1+\cos^2(\alpha)-\sin(2\alpha)\right]$$
$$\overline{QC}^2=\overline{OC}^2+\overline{OQ}^2-2\cdot\overline{OC}\cdot\overline{OQ}\cdot\cos(90°-\alpha)=$$
$$=a^2+4a^2\cos^2(\alpha)-2\cdot a\cdot 2a\cos(\alpha)\cdot\sin(\alpha)=a^2\left[1+4\cos^2(\alpha)-2\sin(2\alpha)\right]$$

Allora si ha:

$$\frac{\overline{CP}^2+\overline{PQ}^2+\overline{QC}^2}{2a^2}=\frac{a^2\left[1+\cos^2(\alpha)-\sin(2\alpha)\right]+a^2\cos^2(\alpha)+a^2\left[1+4\cos^2(\alpha)-2\sin(2\alpha)\right]}{2a^2}=$$
$$=\frac{\left[6\cos^2(\alpha)-3\sin(2\alpha)+2\right]}{2}$$

Ricordiamo che $\cos^2(\alpha)=\dfrac{1}{1+\tan^2(\alpha)}, \sin(2\alpha)=\dfrac{2\tan(\alpha)}{1+\tan^2(\alpha)}$ per cui

$$\frac{\overline{\mathrm{CP}}^2+\overline{\mathrm{PQ}}^2+\overline{\mathrm{QC}}^2}{2a^2}=\frac{\left[6\cos^2(\alpha)-3\sin(2\alpha)+2\right]}{2}=\frac{\left[\frac{6}{1+\tan^2(\alpha)}-\frac{6\tan(\alpha)}{1+\tan^2(\alpha)}+2\right]}{2}=$$

$$=\frac{2\tan^2(\alpha)-6\tan(\alpha)+8}{2\left(1+\tan^2(\alpha)\right)}=\frac{\tan^2(\alpha)-3\tan(\alpha)+4}{\left(1+\tan^2(\alpha)\right)}$$

Per $x=\tan(\alpha)$ si ha $f(x)=\frac{\overline{\mathrm{CP}}^2+\overline{\mathrm{PQ}}^2+\overline{\mathrm{QC}}^2}{2a^2}=\frac{x^2-3x+4}{x^2+1}$.

Punto 2

Prescindendo dalla questione geometrica, si studi la funzione f(x) e se ne tracci il grafico γ.

Studiamo la funzione $f(x)=\frac{x^2-3x+4}{x^2+1}$

Dominio: R

Intersezione asse delle ascisse: la funzione $f(x)=\frac{x^2-3x+4}{x^2+1}$ non interseca mai l'asse delle ascisse in quanto il numeratore è un fattore sempre positivo;

Intersezione asse delle ordinate: $x=0 \rightarrow y=4$

Positività: la funzione $f(x)=\frac{x^2-3x+4}{x^2+1}$ è positiva in tutto il dominio R

Asintoti verticali: non esistono visto il dominio della funzione

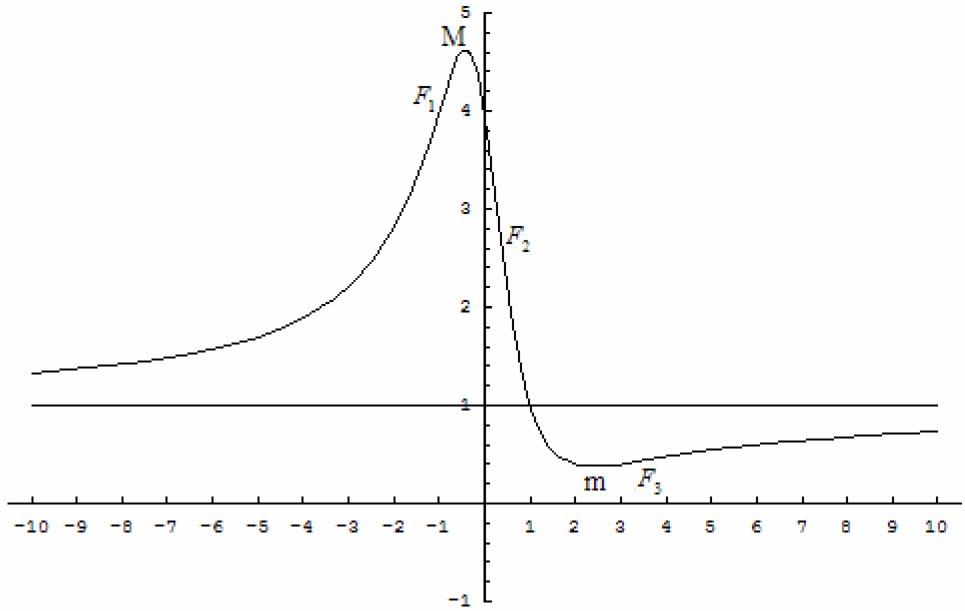
Asintoti orizzontale: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-3x+4}{x^2+1}=1$ per cui $y=1$ è asintoto orizzontale destro e sinistro;

Asintoti obliqui: non esistono in quanto esiste l'asintoto orizzontale e per funzioni razionali fratte la presenta dell'asintoto orizzontale esclude la presenza di quello obliquo e viceversa;

Crescenza e decrescenza: $f'(x)=\frac{3\left(x^2-2x-1\right)}{\left(x^2+1\right)^2}$ per cui la funzione è strettamente crescente in $\left(-\infty,1-\sqrt{2}\right)\cup\left(1+\sqrt{2},+\infty\right)$, strettamente decrescente in $\left(1-\sqrt{2},1+\sqrt{2}\right)$ e si annulla in $x=1+\sqrt{2}, x=1-\sqrt{2}$. Quindi $M=\left(1-\sqrt{2},\frac{5+3\sqrt{2}}{2}\right)$ è un massimo relativo e $m=\left(1+\sqrt{2},\frac{5-3\sqrt{2}}{2}\right)$ è un minimo relativo.

Flessi: $f''(x) = -\dfrac{6(x+1)(x^2-4x+1)}{(x^2+1)^3}$ per cui in $(-\infty,-1)\cup(2-\sqrt{3},2+\sqrt{3})$ la funzione volge la concavità verso l'alto e in $(-1,2-\sqrt{3})\cup(2+\sqrt{3},+\infty)$ verso il basso per cui $F_1=(-1,4), F_2=\left(2-\sqrt{3},\dfrac{7+3\sqrt{3}}{4}\right), F_3=\left(2+\sqrt{3},\dfrac{7-3\sqrt{3}}{4}\right)$ sono flessi a tangente obliqua.

Il grafico è sotto presentato:



Punto 3

Si dica per quale valore di α si hanno rispettivamente il massimo e il minimo del rapporto (1).

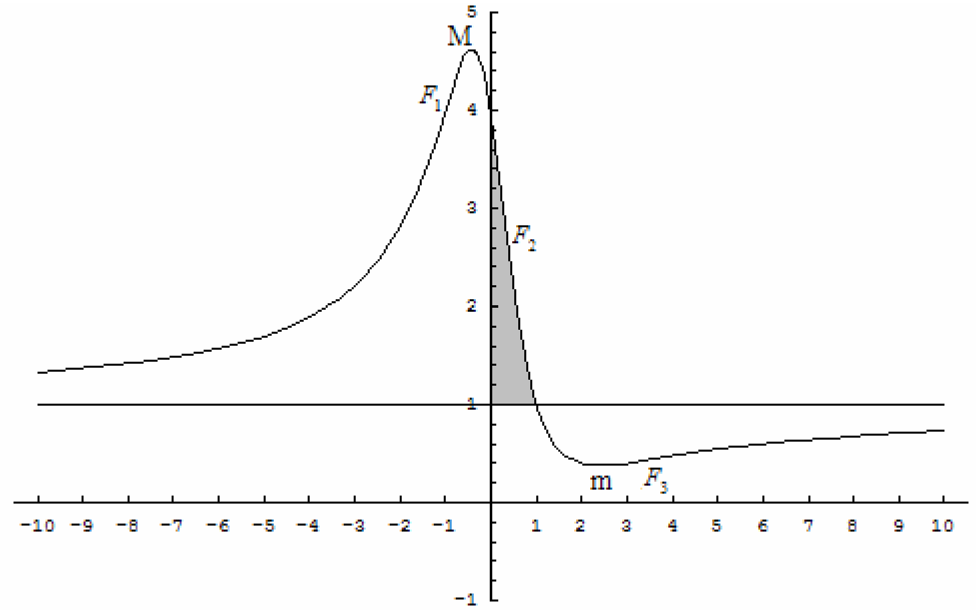
Il valore massimo lo si ha per $x=\tan(\alpha)=1-\sqrt{2}$ da cui $\alpha=\arctan(1-\sqrt{2})=\dfrac{7\pi}{8}=157{,}5°$ mentre il valore minimo lo si ha per $x=\tan(\alpha)=1+\sqrt{2}$ da cui $\alpha=\arctan(1+\sqrt{2})=\dfrac{3\pi}{8}=67{,}5°$

Punto 4

Si determini l'area della superficie piana, finita, delimitata dall'asse delle ordinate, dalla curva γ e dal suo asintoto.

La curva $f(x)=\dfrac{x^2-3x+4}{x^2+1}$ interseca il suo asintoto di equazione $y=1$ nel punto ad ascissa $x=1$.

L'area da calcolare è in grigio nella figura seguente:



Tale area vale:

$$S=\int_0^1\left[\frac{x^2-3x+4}{x^2+1}-1\right]dx=\int_0^1\left[\frac{3-3x}{x^2+1}\right]dx=\int_0^1\left[\frac{3}{x^2+1}-\frac{3}{2}\frac{2x}{x^2+1}\right]dx=$$

$$=\left[3\arctan(x)-\frac{3}{2}\ln\left(x^2+1\right)\right]_0^1=\frac{3\pi}{4}-\frac{3\ln 2}{2}=\frac{3(\pi-2\ln 2)}{4}$$

PROBLEMA 2

Sia data la funzione:

$$f(x)=\begin{cases} x(2-\ln x) & \text{per } x>0 \\ 0, & \text{per } x=0 \end{cases}$$

Punto 1

Questa funzione è continua nel punto di ascissa 0 ?

E' derivabile in tale punto ?

Studiamo la continuità della funzione $f(x)=\begin{cases} x(2-\ln x) & \text{per } x>0 \\ 0, & \text{per } x=0 \end{cases}$. Calcoliamo il limite per $x \to 0^+$:

$$\lim_{x\to 0^+} x(2-\ln x)=\lim_{x\to 0^+} 2x-\lim_{x\to 0^+} x\ln x=0-\lim_{x\to 0^+} x\ln x=-\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\frac{\infty}{\infty}\text{ f.i.}\xrightarrow{\text{De l'Hospital}}$$

$$\lim_{x\to 0^+} x(2-\ln x)=-\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=-\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+} x=0$$

Quindi la funzione $f(x)=\begin{cases} x(2-\ln x) & \text{per } x>0 \\ 0, & \text{per } x=0 \end{cases}$ è continua in $x=0$.

Studiamo la derivabilità: la derivata prima della funzione per $x>0$ è $f'(x)=1-\ln(x)$ per cui $\lim_{x\to 0^+} f'(x)=\lim_{x\to 0^+}[1-\ln(x)]=+\infty$ da cui deduciamo che la funzione $f(x)=\begin{cases} x(2-\ln x) & \text{per } x>0 \\ 0, & \text{per } x=0 \end{cases}$ non è derivabile in $x=0$.

Punto 2

Si studi la funzione f(x) e se ne tracci il grafico γ, su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy).

Studiamo la funzione $f(x)=\begin{cases} x(2-\ln x) & \text{per } x>0 \\ 0, & \text{per } x=0 \end{cases}$ ed in particolare $g(x)=x(2-\ln x)$ definita per $x>0$.

Dominio: $x>0$

Intersezione asse delle ascisse: $g(x)=x(2-\ln x)=0 \to \left\langle \begin{array}{l} x=0 \\ 2-\ln x=0 \end{array}\right. \to \left\langle \begin{array}{l} x=0 \\ x=e^2 \end{array}\right.$;

Intersezione asse delle ordinate: la funzione è prolungabile per continuità in $x=0$ per cui $x=0 \to y=0$;

Positività: la funzione $g(x) = x(2 - \ln x) > 0 \Rightarrow 0 < x < e^2$;

Asintoti verticali: non esistono in quanto $\lim_{x \to 0^+} x(2 - \ln x) = 0$ come dimostrato al punto 1;

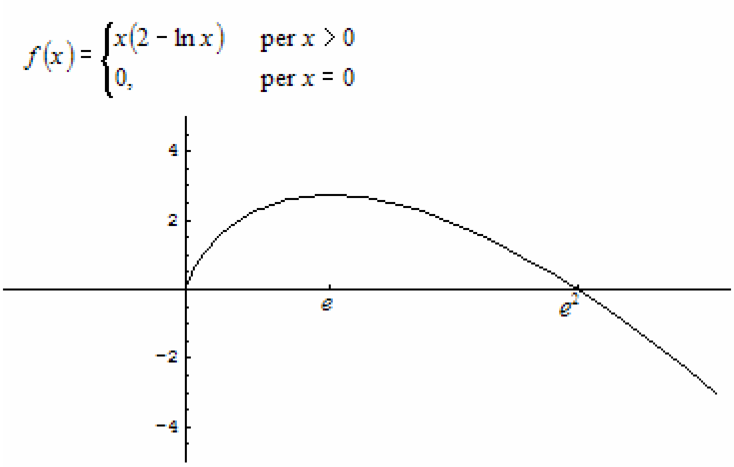
Asintoti orizzontale: $\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$ per cui non esistono asintoti orizzontali;

Asintoti obliqui: non esistono in quanto $\lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} (2 - \ln x) = -\infty$;

Crescenza e decrescenza: $g'(x) = 1 - \ln x$ per cui la funzione è strettamente crescente in $(0, e)$, strettamente decrescente in $(e, +\infty)$ e si annulla in $x = e$.

Flessi: $g''(x) = -\frac{1}{x}$ per cui in tutto il dominio la funzione volge la concavità verso il basso. Inoltre $g''(e) = -\frac{1}{e} < 0$ per cui $M = (e, e)$ è un massimo relativo ed assoluto.

Il grafico è sotto presentato:



Punto 3

Si calcoli l'espressione, in funzione di $t (t > 0)$, dell'integrale

$$I(t) = \int_t^{e^2} x(2 - \ln x) dx$$

Calcoliamo l'integrale $I(t) = \int_t^{e^2} x(2 - \ln x) dx$ integrando per parti. Si ha:

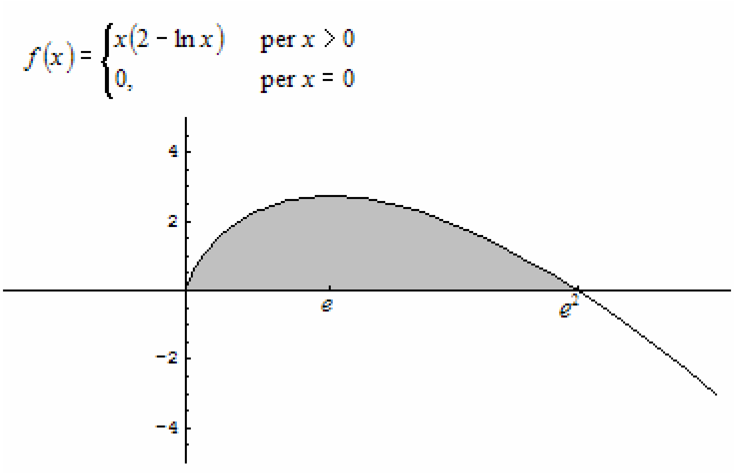
$$\int x(2 - \ln x) dx = \int 2x dx - \int x \ln x dx = x^2 - \frac{x^2}{2} \ln x + \int \frac{x}{2} dx = x^2 - \frac{x^2}{2} \ln x + \frac{x^2}{4} = \frac{x^2}{4}(5 - 2 \ln x)$$

per cui $I(t) = \int_t^{e^2} x(2 - \ln x) dx = \left[\frac{x^2}{4}(5 - 2 \ln x) \right]_t^{e^2} = \frac{e^4}{4}(5 - 4) - \frac{t^2}{4}(5 - 2 \ln t) = \frac{e^4}{4} - \frac{t^2}{4}(5 - 2 \ln t)$.

Punto 4

Si faccia vedere che I(t) tende verso un limite finito quando t tende a 0. Cosa rappresenta questo limite nel grafico precedente ?

Allo stesso modo con cui si è dimostrato che la funzione è continua in $x=0$, si dimostra che $\lim_{t\to 0^+}\frac{t^2}{4}(5-2\ln t)=0$ per cui $\lim_{t\to 0^+} I(t)=\lim_{t\to 0^+}\left[\frac{e^4}{4}-\frac{t^2}{4}(5-2\ln t)\right]=\frac{e^4}{4}$ che rappresenta l'area compresa tra la curva $f(x)=\begin{cases} x(2-\ln x) & \text{per } x>0 \\ 0, & \text{per } x=0 \end{cases}$ e l'asse delle ascisse, rappresentata in grigio di seguito:

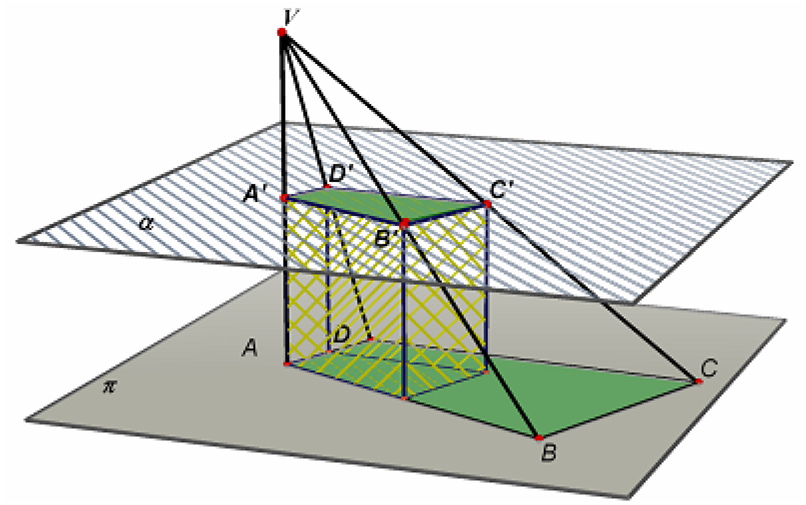


QUESTIONARIO

Quesito 1

Una piramide, avente area di base B e altezza h, viene secata con un piano parallelo alla base. Si calcoli a quale distanza dal vertice si deve condurre tale piano, affinché il prisma che ha per basi la sezione di cui sopra e la sua proiezione ortogonale sul piano di base della piramide abbia volume massimo.

Consideriamo la figura seguente:



Proiettando ortogonalmente il poligono A'B'C'D' sul piano π, si ottiene il prisma retto di base A'B'C'D' e altezza AA'. Consideriamo le piramidi VABCD e VA'B'C'D'; il rapporto tra le aree S_{ABCD} e $S_{A'B'C'D'}$ delle basi è uguale al rapporto dei quadrati delle altezze VA e VA', cioè $\frac{S_{ABCD}}{S_{A'B'C'D'}}=\left(\frac{\overline{\mathrm{VA}}}{\overline{\mathrm{VA'}}}\right)^2$ da cui $S_{A'B'C'D'}=S_{ABCD}\left(\frac{\overline{\mathrm{VA'}}}{\overline{\mathrm{VA}}}\right)^2$. Ponendo $\overline{\mathrm{VA'}}=x$ con $0\le x\le h$ si ha $\overline{\mathrm{AA'}}=h-x$ per cui il volume del prisma sarà $V_{PRISMA}(x)=S_{AiBiCiD'}\cdot\overline{\mathrm{AA'}}=\frac{B}{h^2}\left[x^2(h-x)\right]$ con $0\le x\le h$. Calcoliamo la derivata prima e seconda della funzione $f(x)=x^2(h-x)$ da massimizzare. Si ha

$$f'(x)=2xh-3x^2$$
$$f''(x)=2h-6x$$

da cui deduciamo che la funzione volume è strettamente crescente in $\left(0,\frac{2h}{3}\right)$, strettamente decrescente in $\left(\frac{2h}{3},h\right)$, concava verso l'alto in $\left(0,\frac{h}{3}\right)$ e verso il basso in $\left(\frac{h}{3},h\right)$. Inoltre

$f''(0)=2h>0, f''\left(\frac{2h}{3}\right)=-2h<0$ per cui il volume massimo lo si ha per $x=\frac{2h}{3}$ e vale $V_{PRISMA}\left(\frac{2h}{3}\right)=\frac{B}{h^2}\left[\frac{4h^2}{9}\left(h-\frac{2h}{3}\right)\right]=\frac{4}{27}Bh$.

Quesito 2

Si calcoli il limite della funzione $\frac{\ln^2 x+x-1}{x^2-x+\sin^2(x-1)}$ quando x tende a 1.

Il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$ per cui applicando il teorema di De L'Hospital si ha $\lim_{x\to 1}\frac{\ln^2 x+x-1}{x^2-x+\sin^2(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{2\ln x}{x}+1}{2x-1+2\sin(x-1)\cos(x-1)}=\frac{0+1}{2-1+0}=1$.

Alternativamente utilizzando i limiti notevoli, effettuando prima la sostituzione $t=x-1$ si ha:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln^2 x+x-1}{x^2-x+\sin^2(x-1)}=\lim_{t\to 0}\frac{\ln^2(t+1)+t}{t(t+1)+\sin^2(t)}=\lim_{t\to 0}\frac{t^2\cdot\overbrace{\left[\frac{\ln(t+1)}{t}\right]^2}^{=1}+t}{t(t+1)+t^2\cdot\underbrace{\left[\frac{\sin(t)}{t}\right]^2}_{=1}}=\lim_{t\to 0}\frac{t^2+t}{t(t+1)+t^2}=\lim_{t\to 0}\frac{t+1}{2t+1}=1$$

Quesito 3

Si calcoli il volume del solido generato dalla rotazione attorno all'asse x della porzione di piano limitata dalla curva $y=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, dall'asse x e dalle rette $x=1, x=\sqrt{3}$.

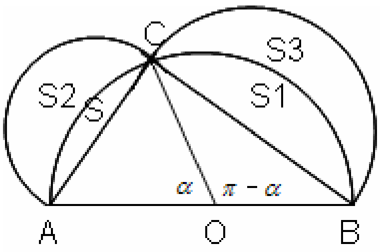
Il volume richiesto, utilizzando il teorema di Guldino è pari a

$$V=\pi\int_1^{\sqrt{3}}y^2dx=\pi\int_1^{\sqrt{3}}\frac{x^2}{1+x^2}dx=\pi\int_1^{\sqrt{3}}\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx=$$
$$=\pi[x-\arctan(x)]_1^{\sqrt{3}}=\pi\left[\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}\right)-\left(1-\frac{\pi}{4}\right)\right]=\frac{\pi\left(12\sqrt{3}-12-\pi\right)}{12}$$

Quesito 4

Dato un triangolo rettangolo inscritto in un semicerchio, se sui suoi cateti presi come diametri ed esternamente si costruiscono due semicerchi, da questi e dal dato semicerchio sono determinati due menischi, detti lunule d'Ippocrate. Si dimostri che la loro somma ha la stessa area del triangolo.

Consideriamo la figura seguente:



L'area del triangolo rettangolo ABC, posto $\overline{AO}=\overline{OB}=\overline{OC}=r$, è

$$S(\mathrm{ABC})=\frac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{AO}}\cdot\overline{\mathrm{OC}}\cdot\sin\left(\mathrm{A\hat{O}C}\right)+\frac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{OB}}\cdot\overline{\mathrm{OC}}\cdot\sin\left(\mathrm{B\hat{O}C}\right)=$$

$$=\frac{r^2}{2}\cdot\sin(\alpha)+\frac{r^2}{2}\cdot\sin(\pi-\alpha)=\frac{r^2}{2}\cdot\sin(\alpha)+\frac{r^2}{2}\cdot\sin(\alpha)=r^2\cdot\sin(\alpha)$$

Poniamo $\overline{AC}=a,\overline{CB}=b$ con $a^2+b^2=4r^2$. L'area della lunula S2 la calcoliamo come differenza tra l'area della semicirconferenza di diametro $\overline{AC}=a$ e l'area S. L'area della semicirconferenza di diametro $\overline{AC}=a$ è $\frac{\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2}{2}=\frac{\pi a^2}{8}$ mentre l'area S è data dalla differenza tra l'area del settore circolare AOC e l'area del triangolo AOC, cioè $S=\frac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{AO}}\cdot\overline{\mathrm{OC}}\cdot\mathrm{A\hat{O}C}-\frac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{AO}}\cdot\overline{\mathrm{OC}}\cdot\sin\left(\mathrm{A\hat{O}C}\right)=\frac{r^2}{2}[\alpha-\sin(\alpha)]$ per cui $S2=\frac{\pi a^2}{8}-\frac{r^2}{2}[\alpha-\sin(\alpha)]$.

Analogamente l'area della lunula S3 la calcoliamo come differenza tra l'area della semicirconferenza di diametro $\overline{BC}=b$ e l'area S1. L'area della semicirconferenza di diametro $\overline{BC}=b$ è $\frac{\pi\left(\frac{b}{2}\right)^2}{2}=\frac{\pi b^2}{8}$ mentre l'area S1 è data dalla differenza tra l'area del settore circolare BOC e l'area del triangolo BOC, cioè $S=\frac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{CO}}\cdot\overline{\mathrm{OB}}\cdot\mathrm{B\hat{O}C}-\frac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{CO}}\cdot\overline{\mathrm{OB}}\cdot\sin\left(\mathrm{B\hat{O}C}\right)=\frac{r^2}{2}[\pi-\alpha-\sin(\pi-\alpha)]=\frac{r^2}{2}[\pi-\alpha-\sin(\alpha)]$ per cui $S3=\frac{\pi b^2}{8}-\frac{r^2}{2}[\pi-\alpha-\sin(\alpha)]$. Quindi

$$S2+S3=\frac{\pi a^2}{8}-\frac{r^2}{2}[\alpha-\sin(\alpha)]+\frac{\pi b^2}{8}-\frac{r^2}{2}[\pi-\alpha-\sin(\alpha)]=$$

$$=\frac{\pi\left(a^2+b^2\right)}{8}-\frac{\pi r^2}{2}+r^2\sin(\alpha)=\underbrace{\frac{\pi\left(a^2+b^2-4r^2\right)}{8}}_{=0}+r^2\sin(\alpha)=r^2\sin(\alpha)=S(\mathrm{ABC})\text{ c.v.d.}$$

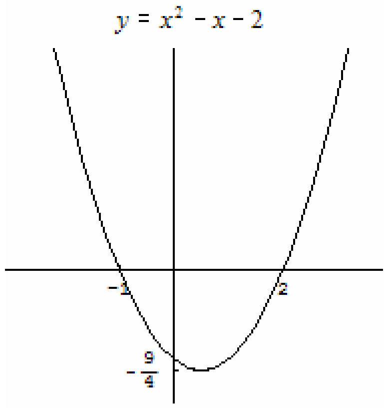
Quesito 5

Si determini il luogo γ dei punti di intersezione delle due rette di equazioni:

$$\lambda x - y - (\lambda + 2) = 0\ ,$$
$$(1 - \lambda)\, x + y + 2 = 0,$$

descritto al variare di λ, parametro reale qualunque. Si disegni la curva γ.

Sommando membro a membro le due equazioni si ha $x = \lambda$ che sostituita in una delle due equazioni date fornisce il luogo $y = x^2 - x - 2$ che rappresenta una parabola con concavità verso l'alto, vertice in $\left(\frac{1}{2}, -\frac{9}{4}\right)$ e che interseca l'asse delle ascisse in $(-1,0),(2,0)$ e quello delle ordinate in $(0,-2)$. Di seguito il grafico del luogo:



Quesito 6

Sono dati un angolo α di π^2 radianti e un angolo β di 539 gradi. Si verifichi che sono entrambi maggiori di un angolo giro e minori di due angoli giro. Si dica quale dei due è il maggiore. Si dica inoltre se è più grande il seno di α o il seno di β.

Esprimendo l'angolo $\alpha = \pi^2[\text{rad}]$ in gradi si ha $\alpha° = \frac{180° \cdot \alpha^r}{\pi} = \frac{180° \cdot \pi^2}{\pi} = (180\pi)°$. Poiché $2 < \pi < 4$ si ha $360° < (180\pi)° < 720°$ cioè l'angolo $\alpha = \pi^2[\text{rad}]$ è maggiore di un angolo giro e minore di due angoli giro. Per l'angolo $\beta = 539°$ si ha $\beta = 539° < 540° = (180 \cdot 3)°$; poiché $\pi < 4$ si ha $360° < 539° < (180 \cdot 3)° = 540° < 720°$ cioè l'angolo $\beta = 539°$ è maggiore di un angolo giro e minire di due angoli giro. Per stabilire quale dei due angoli è minore basta osservare che $\pi > 3$ per cui vale la seguente catena di disuguaglianze: $\beta = 539° < (180 \cdot 3)° < (180 \cdot \pi)° = \alpha$ per cui $\alpha > \beta$. Calcoliamo ora $\sin(\alpha), \sin(\beta)$. Ricordando che il seno è una funzione periodica con periodo pari a 360°, si ha:

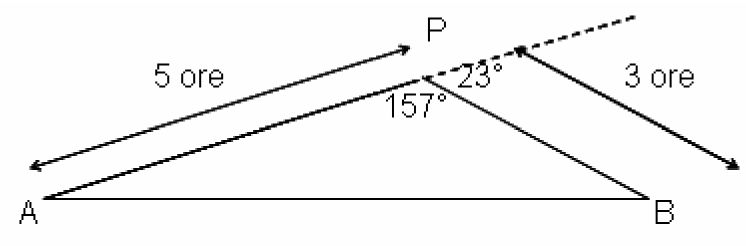
$$\sin(\alpha) = \sin[(180\pi)^\circ] = \sin[(180\pi)^\circ - 360^\circ] = \sin[180(\pi - 2)^\circ]$$
$$\sin(\beta) = \sin[539^\circ] = \sin[539^\circ - 360^\circ] = \sin[179^\circ]$$

Ora poiché l'angolo 179° si trova nel secondo quadrante della circonferenza goniometrica, si ha $\sin(\beta) = \sin[179^\circ] > 0$, mentre poiché $1 < (\pi - 2) < \frac{3}{2}$ si ha $180^\circ < 180(\pi - 2)^\circ < 270^\circ$ cioè $180(\pi - 2)^\circ$ si trova nel terzo quadrante per cui $\sin(\alpha) = \sin[180(\pi - 2)^\circ] < 0$. In conclusione $\sin(\alpha) < \sin(\beta)$.

Quesito 7

Il comandante di una nave decide di raggiungere il porto B partendo dal punto A e seguendo un percorso rettilineo. A causa di un errore, però, la nave inizia la sua navigazione lungo una rotta leggermente diversa da quella prevista. Dopo 5 ore ci si accorge dello sbaglio e il comandante ordina di virare di un angolo di 23° in modo da dirigere ora esattamente verso il porto B, che viene raggiunto dopo 3 ore. Se l'imbarcazione ha mantenuto sempre una velocità costante, quanto tempo si è perso a causa dell'errore?

Consideriamo la figura seguente:

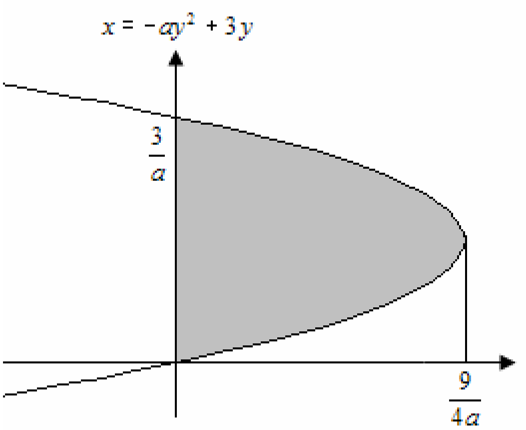


Il percorso AP in ore è lungo 5 ore, mentre il percorso PB 3 ore, per cui il tempo totale impiegato per arrivare a B partendo da A e passando per P è 8 ore. Applicando il teorema di Carnot, il percorso rettilineo AB in ore è pari a $\overline{AB} = \sqrt{\overline{AP}^2 + \overline{PB}^2 - 2 \cdot \overline{AP} \cdot \overline{PB} \cdot \cos(180^\circ - 23^\circ)} = \sqrt{34 + 30\cos(23^\circ)} \cong 7{,}85 \text{ ore}$ per cui, a causa della rotta sbagliata, si è perso un tempo pari a $\Delta = (8 - 7{,}85)\text{ore} = 0{,}15 \text{ ore} = 9 \text{ minuti}$.

Quesito 8

Data la parabola $x = -ay^2 + 3y$ (con a > 0), si determini per quale valore di a l'area della parte finita di piano compresa tra il suo grafico e l'asse y è uguale a 72.

Consideriamo la figura seguente:



L'area compresa tra la parabola di equazione $x = -ay^2 + 3y$ e l'asse delle ordinate, in grigio nella figura soprastante, è calcolabile attraverso il teorema di Archimede. Secondo questo teorema, l'area di un segmento parabolico è pari ai $\frac{2}{3}$ dell'area del rettangolo circoscritto ad esso. La parabola $x = -ay^2 + 3y$ ha vertice in $V = \left(\frac{9}{4a}, \frac{3}{2a}\right)$ ed interseca l'asse delle ordinate in $(0,0), \left(0, \frac{3}{a}\right)$. Il rettangolo circoscritto avrà un lato pari a $\frac{3}{a}$ ed un altro lato pari a $\frac{9}{4a}$ e in corrispondenza l'area vale $S(R) = \frac{27}{4a^2}$. Imponendo che $\frac{2}{3} \cdot S(R) = 72$ si ha $\frac{9}{2a^2} = 72 \Rightarrow a^2 = \frac{1}{16} \Rightarrow a = \pm\frac{1}{4}$ e poiché per ipotesi $a > 0$ la soluzione accettabile è $a = \frac{1}{4}$. Alternativamente possiamo calcolare l'area tramite integrale e si ha: $S = \int_0^{\frac{3}{a}} \left(-ay^2 + 3y\right)dy = \left[-\frac{ay^3}{3} + \frac{3y^2}{2}\right]_0^{\frac{3}{a}} = -\frac{9}{a^2} + \frac{27}{2a^2} = \frac{9}{2a^2}$ ed imponendo $S = \frac{9}{2a^2} = 72$ si riottiene la soluzione accettabile $a = \frac{1}{4}$.

Quesito 9

Si dimostri che un numero di quattro cifre tutte uguali è divisibile per 101.

Indichiamo con $kkkk$ il numero di 4 cifre tutte uguali con $k > 1$. Effettuando la divisione di $kkkk$ per 101 si trova facilmente che $kkkk : 101 = kk$.

Quesito 10

Si enunci il teorema di Rolle e si mostri, con opportuni esempi, che se una qualsiasi delle tre condizioni previste non è soddisfatta, il teorema non è valido.

Il teorema di Rolle afferma che se una funzione è continua in un intervallo chiuso $[a,b]$, derivabile in ogni punto dell'intervallo aperto (a,b) e assume valori uguali $f(a) = f(b)$, esiste almeno un punto interno ad (a,b) la cui derivata si annulla, cioè $f'(c) = 0$.

Formalmente:

Sia $f:[a,b]\to R$. *Se f è continua in* $[a,b]$, *derivabile in* (a,b) *e tale che* $f(a)=f(b)$, *allora* $\exists c\in(a,b): f'(c)=0$.

Mostriamo ora, con opportuni controesempi, che se viene a cadere ognuna delle tre ipotesi, il teorema non è valido.

1. Sia $f:[0,1]\to R, x\mapsto x$: la funzione è continua in [0,1] e derivabile in (0,1), ma $f(0)=0\neq f(1)=1$ per cui il teorema di Rolle non è applicabile. Infatti la derivata della funzione non è mai nulla, essendo $f'(x)=1$;
2. Sia $f:[-1,1]\to R, x\mapsto |x|$: la funzione è continua in [0,1], inoltre $f(-1)=1=f(1)$, ma non è derivabile in $x=0\in(-1,1)$ in cui presenta un punto angoloso per cui il teorema di Rolle non è applicabile. Infatti la derivata della funzione, dove esiste, non è mai nulla, essendo $f'(x)=\begin{cases}1 & \text{se } x>0\\ -1 & \text{se } x<0\end{cases}$;
3. Sia $f:[0,1]\to R, f(x)=\begin{cases}x & \text{se } 0\le x<1\\ 0 & \text{se } x=1\end{cases}$: la funzione è derivabile in $(0,1)$, inoltre $f(0)=f(1)=0$, ma non è continua in $x=1$ per cui il teorema di Rolle non è applicabile. Infatti la derivata della funzione non è mai nulla.