
ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO
Tema di: MATEMATICA
a. s. 2007-2008

PROBLEMA 1

Dato un quadrante AOB di cerchio, di centro O e raggio 2, si consideri sull'arco AB un punto P.

1. Si esprima in funzione di $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ (con $x = B\hat{O}P$) l'area del quadrilatero OMPN, essendo M ed N i punti medi dei raggi OA e OB.
2. Si studi la funzione f(t) così ottenuta e si tracci il suo grafico γ, indipendentemente dai limiti posti dal problema geometrico.
3. Si dica per quale valore di x l'area del quadrilatero assume valore massimo.
4. Si calcoli l'area della parte finita di piano compresa tra la curva γ e l'asse x.

PROBLEMA 2

Si consideri la funzione:

$$y = \sin(x)(2\cos(x)+1)$$

1. Tra le sue primitive si individui quella il cui diagramma γ passa per il punto $P(\pi,0)$.
2. Si rappresenti graficamente la curva γ nell'intervallo $0 \le x \le 2\pi$ e si dimostri che essa è simmetrica rispetto alla retta $x = \pi$.
3. Si scrivano le equazioni della retta tangenti alla curva nei suoi due punti A e B di ascisse $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2}$ e si determini il loro punto d'intersezione C.
4. Si calcoli l'area della parte finita di piano compresa tra la curva e le due suddette tangenti.

QUESTIONARIO

1) Si determini la distanza delle due rette parallele:

$$3x + y - 3\sqrt{10} = 0 \qquad\qquad 6x + 2y + 5\sqrt{10} = 0$$

2) Un trapezio rettangolo è circoscritto ad una semicirconferenza di raggio r in modo che la base maggiore contenga il diametro. Si calcoli in gradi e primi (sessagesimali) l'ampiezza x dell'angolo acuto del trapezio, affinché il solido da esso generato in una rotazione completa attorno alla base maggiore abbia volume minimo.

3) Si determinino le equazioni degli asintoti della curva:

$$f(x) = -x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2}$$

4) Si calcoli il limite della funzione:

$$\frac{\cos(x) - \cos(2x)}{1 - \cos(x)}$$

quando x tende a 0.

5) Si calcoli il valore medio della funzione $f(x) = \log\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$nell'intervallo $0 \leq x \leq 1$.

6) Si sechi il solido di una sfera con un piano, in modo che il circolo massimo sia medio proporzionale fra le superficie appianate delle calotte nelle quali rimane divisa la sfera.

7) La regione finita di piano delimitata dalla curva di equazione $f(x) = e^{\frac{x}{2}}(x+1)$e dall'asse x nell'intervallo $0 \leq x \leq 1$ è la base di un solido S le cui sezioni sono tutte esagoni regolari. Si calcoli il volume di S.

8) Si stabilisca per quali valori del parametro reale k esiste una piramide triangolare regolare tale che k sia il rapporto fra il suo apotema e lo spigolo di base.

9) Si scriva l'equazione della tangente al diagramma della funzione:

$$f(x) = \left(x^2 + 1\right)^{\sin(x)}$$

nel punto P di ascissa $x = \dfrac{\pi}{2}$.

10) Dato un sistema di riferimento cartesiano (ortogonale monometrico) in un piano, si dica che cosa rappresenta l'insieme dei punti $P\left(1 + t^2, 1 + t^2\right)$, ottenuto al variare di t nei reali.

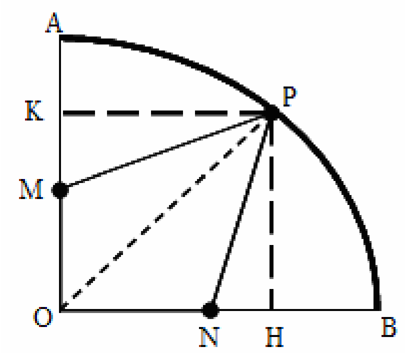
PROBLEMA 1

Dato un quadrante AOB di cerchio, di centro O e raggio 2, si consideri sull'arco AB un punto P.

Punto 1

Si esprima in funzione di $t=\tan\left(\frac{x}{2}\right)$ (con $x=B\hat{O}P$) l'area del quadrilatero OMPN, essendo M ed N i punti medi dei raggi OA e OB.

Consideriamo la figura sottostante:



L'area del quadrilatero OMPN è la somma delle aree dei triangolo OMP e ONP:

$S(OMNP)=S(OMP)+S(ONP)$ con $S(OMP)=\frac{OM\cdot PK}{2}, S(ONP)=\frac{ON\cdot PH}{2}$.

Ma, posto $x=B\hat{O}P$ con $0° < x < 90°$, si ha:

$$PH = OP\cdot\sin\left(H\hat{O}P\right)=2\cdot\sin(x)$$
$$PK = OP\cdot\sin\left(90°-H\hat{O}P\right)=2\cdot\sin(90°-x)=2\cdot\cos(x)$$

per cui $S(OMNP)=\frac{1\cdot 2\cos(x)}{2}+\frac{1\cdot 2\sin(x)}{2}=\cos(x)+\sin(x)$.

Inoltre $\sin(x)=\frac{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}, \cos(x)=\frac{1-\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}$ per cui $f(t)=\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}=\frac{-t^2+2t+1}{1+t^2}$ con il limite geometrico $t>0$.

Punto 2

Si studi la funzione f(t) così ottenuta e si tracci il suo grafico γ, indipendentemente dai limiti posti dal problema geometrico.

Studiamo la funzione $f(t)=\frac{-t^2+2t+1}{1+t^2}$

Dominio: R

Intersezioni asse ascisse: $f(t)=\frac{-t^2+2t+1}{1+t^2}=0 \Rightarrow t^2-2t-1=0 \Rightarrow t=1\pm\sqrt{2}$

Intersezioni asse ordinate: $t=0 \Rightarrow f(0)=1$

Eventuali simmetrie: la funzione non è né pari né dispari

Positività: $f(t)=\frac{-t^2+2t+1}{1+t^2}\geq 0 \Rightarrow t^2-2t-1\leq 0 \Rightarrow 1-\sqrt{2}\leq t\leq 1+\sqrt{2}$

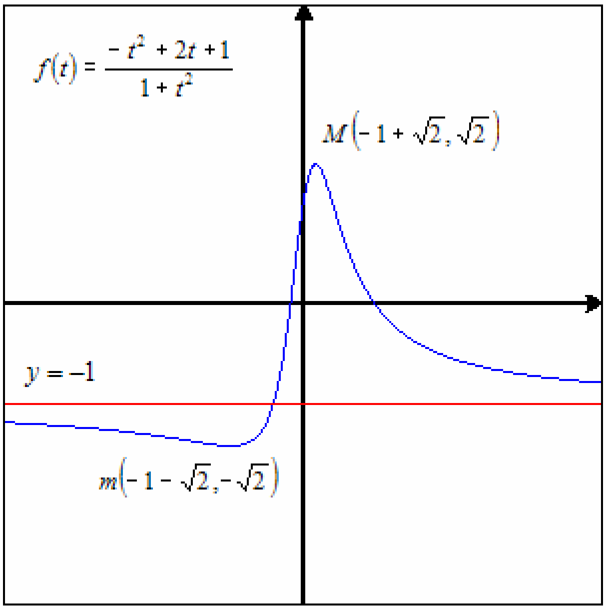
Asintoti verticali: non ce ne sono

Asintoti orizzontali: $\lim_{t\to\pm\infty}\left(\frac{-t^2+2t+1}{1+t^2}\right)=-1$ per cui la retta $y=-1$ è asintoto orizzontale

Crescenza e decrescenza: $f'(t)=\frac{(-2t+2)(1+t^2)-(2t)(-t^2+2t+1)}{(1+t^2)^2}=\frac{-2(t^2+2t-1)}{(1+t^2)^2}$ per cui la funzione è strettamente crescente in $\left(-1-\sqrt{2},-1+\sqrt{2}\right)$, strettamente decrescente in $\left(-\infty,-1-\sqrt{2}\right)\vee\left(-1+\sqrt{2},+\infty\right)$ e si annulla in $t=-1-\sqrt{2}$ in cui presenta un minimo relativo $m\left(-1-\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)$ed in $t=-1+\sqrt{2}$ in cui presenta un massimo relativo $M\left(-1+\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$.

Concavità e convessità: $f''(t)=\frac{4(t-1)(t^2+4t+1)}{(1+t^2)^3}$ per cui la funzione presenta tre flessi alle ascisse $t_1=1, t_2=-2-\sqrt{3}, t_3=-2+\sqrt{3}$.

Il grafico è di seguito presentato:



Punto 3

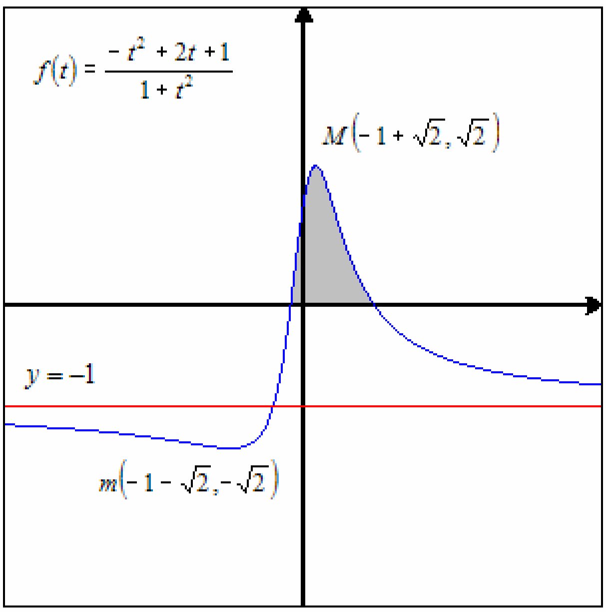
Si dica per quale valore di x l'area del quadrilatero assume valore massimo.

Il valore che massimizza l'area del quadrilatero è $t=\sqrt{2}-1$ e cioè $\tan\left(\frac{x}{2}\right)=\sqrt{2}-1$ da cui $\frac{x}{2}=\arctan\left(\sqrt{2}-1\right)=\frac{\pi}{8}\Rightarrow x=\frac{\pi}{4}$.

Punto 4

Si calcoli l'area della parte finita di piano compresa tra la curva γ e l'asse x.

L'area da calcolare è in grigio nella figura seguente:



$$Area = \int_{1-\sqrt{2}}^{1+\sqrt{2}} \left(\frac{-t^2 + 2t + 1}{1+t^2} \right) dt = \int_{1-\sqrt{2}}^{1+\sqrt{2}} \left(\frac{2t}{1+t^2} - 1 + \frac{2}{1+t^2} \right) dt =$$

$$= \left[\ln\left(1+t^2\right) - t + 2\arctan(t) \right]_{1-\sqrt{2}}^{1+\sqrt{2}} =$$

$$= \left[\ln\left(4+2\sqrt{2}\right) - 1 - \sqrt{2} + 2\arctan\left(1+\sqrt{2}\right) \right] - \left[\ln\left(4-2\sqrt{2}\right) - 1 + \sqrt{2} + 2\arctan\left(1-\sqrt{2}\right) \right] =$$

$$= \ln\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} \right) - 2\sqrt{2} + 2\arctan\left(1+\sqrt{2}\right) + 2\arctan\left(\sqrt{2}-1\right) =$$

$$= 2\ln\left(1+\sqrt{2}\right) - 2\sqrt{2} + 2 \cdot \left(\frac{3\pi}{8} \right) + 2 \cdot \left(\frac{\pi}{8} \right) =$$

$$= 2\ln\left(1+\sqrt{2}\right) - 2\sqrt{2} + \pi$$

PROBLEMA 2

Si consideri la funzione: $y=\sin(x)(2\cos(x)+1)$

Punto 1

Tra le sue primitive si individui quella il cui diagramma γ **passa per il punto** $P(\pi,0)$**.**

Calcoliamo la primitiva della funzione $y=\sin(x)(2\cos(x)+1)=\sin(2x)+\sin(x)$;

$$F(x)=\int[\sin(2x)+\sin(x)]dx=-\frac{1}{2}\cos(2x)-\cos(x)+k$$

Imponendo il passaggio per $P(\pi,0)$ si ricava: $-\frac{1}{2}+1+k=0\Rightarrow k=-\frac{1}{2}$ cui corrisponde

$$F(x)=-\frac{1}{2}\cos(2x)-\cos(x)-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}[\cos(2x)+1]-\cos(x)=-\cos(x)(\cos(x)+1).$$

Punto 2

Si rappresenti graficamente la curva γ **nell'intervallo** $0\le x\le 2\pi$ **e si dimostri che essa è simmetrica rispetto alla retta** $x=\pi$**.**

Studiamo la funzione $F(x)=-\cos(x)(\cos(x)+1)$ in $[0,2\pi]$

Dominio: $[0,2\pi]$

Intersezioni asse ascisse:

$$F(x)=-\cos(x)(\cos(x)+1)=0\Rightarrow\cos(x)=0\Rightarrow x=\frac{\pi}{2},x=\frac{3\pi}{2}\ \text{ e }\ \cos(x)=-1\Rightarrow x=\pi$$

Intersezioni asse ordinate: $x=0\Rightarrow F(0)=-2$

Eventuali simmetrie: la funzione è pari

Positività: $F(x)=-\cos(x)(\cos(x)+1)\ge 0\Rightarrow\cos(x)\le 0\Rightarrow\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{3\pi}{2}$

Asintoti verticali: non ce ne sono

Asintoti orizzontali ed obliqui: non ce ne sono

Crescenza e decrescenza: $F'(x)=2\sin(x)\cos(x)+\sin(x)=\sin(x)(2\cos(x)+1)$.

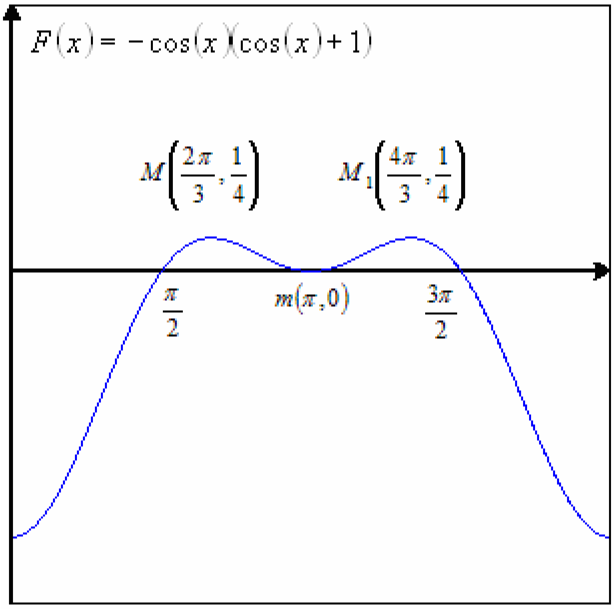
Ora $\sin(x)>0\Rightarrow 0<x<\pi$ mentre $(2\cos(x)+1)>0\Rightarrow 0<x<\frac{2\pi}{3}\vee\frac{4\pi}{3}<x<2\pi$ per cui la funzione è strettamente crescente in $\left[0,\frac{2\pi}{3}\right[\vee\left]\pi,\frac{4\pi}{3}\right[$, strettamente decrescente in $\left]\frac{2\pi}{3},\pi\right[\vee\left]\frac{4\pi}{3},2\pi\right]$ e si annulla in $x=\frac{2\pi}{3}$ in cui ha un massimo relativo $M\left(\frac{2\pi}{3},\frac{1}{4}\right)$, in $x=\frac{4\pi}{3}$

in cui ha un massimo relativo $M_1\left(\frac{4\pi}{3},\frac{1}{4}\right)$ ed in $x=\pi$ in cui ha un minimo relativo $m(\pi,0)$, in $x=\frac{4\pi}{3}$ in cui ha un massimo relativo $M_1\left(\frac{4\pi}{3},\frac{1}{4}\right)$

Concavità e convessità: $F''(x)=2\cos(2x)+\cos(x)=4\cos^2(x)+\cos(x)-2$ pertanto la funzione presenta flessi alle ascisse tali che

$$\cos(x)=\frac{-1\pm\sqrt{33}}{8}\Rightarrow$$
$$x=\arccos\left(\frac{-1+\sqrt{33}}{8}\right), x=2\pi-\arccos\left(\frac{-1+\sqrt{33}}{8}\right).$$
$$x=\arccos\left(\frac{1+\sqrt{33}}{8}\right), x=2\pi-\arccos\left(\frac{1+\sqrt{33}}{8}\right)$$

Il grafico è di seguito presentato:



Già dal grafico si evidenzia la simmetria della curva rispetto alla retta $x=\pi$. La dimostrazione analitica di ciò si ha sottoponendo la funzione $F(x)=-\cos(x)(\cos(x)+1)$ alla trasformazione $\begin{cases} X=2\pi-x \\ Y=y \end{cases}$ da cui $Y=-\cos(2\pi-X)(\cos(2\pi-X)+1)=-\cos(X)(\cos(X)+1)$ c.v.d.

Punto 3

Si scrivano le equazioni della retta tangenti alla curva nei suoi due punti A e B di ascisse $\frac{\pi}{2}$ e

$\frac{3\pi}{2}$ **e si determini il loro punto d'intersezione C.**

L'equazione della retta tangente in $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$ è $y=m\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$ con $m=F'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\left[\sin(x)(2\cos(x)+1)\right]_{x=\frac{\pi}{2}}=1$ da cui la retta tangente in $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$ è $y=\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$.

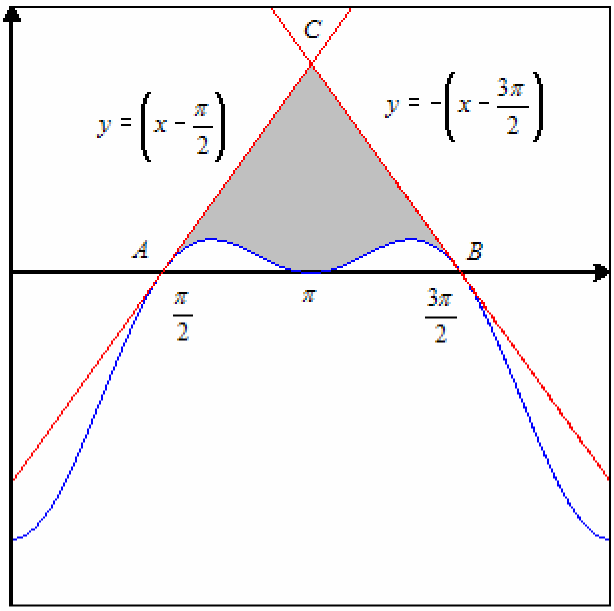
Analogamente l'equazione della retta tangente in $\left(\frac{3\pi}{2},0\right)$ è $y=m\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)$ con $m=F'\left(\frac{3\pi}{2}\right)=\left[\sin(x)(2\cos(x)+1)\right]_{x=\frac{3\pi}{2}}=-1$ da cui la retta tangente in $\left(\frac{3\pi}{2},0\right)$ è $y=-\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)$.

Le due tangenti si incontrano nel punto $C\left(\pi,\frac{\pi}{2}\right)$

Punto 4

Si calcoli l'area della parte finita di piano compresa tra la curva e le due suddette tangenti.

L'area è rappresentata in grigio nella figura sottostante:



e vale:

$$Area = S(ABC) - 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} [-\cos(x)(\cos(x)+1)]dx =$$

$$= \frac{\pi^2}{4} + 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left[\frac{\cos(2x)+1}{2} + \cos(x)\right]dx = \frac{\pi^2}{4} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} [\cos(2x) + 1 + 2\cos(x)]dx =$$

$$= \frac{\pi^2}{4} + \left[\frac{1}{2}\sin(2x) + x + 2\sin(x)\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{\pi^2}{4} + [\pi] - \left[\frac{\pi}{2} + 2\right] =$$

$$= \frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi}{2} - 2 = \frac{\pi^2 + 2\pi - 8}{4} = \frac{(\pi+4)(\pi-2)}{4}$$

QUESTIONARIO

Quesito 1

Si determini la distanza delle due rette parallele:

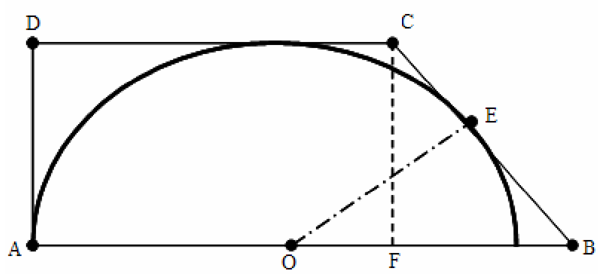
$$3x + y - 3\sqrt{10} = 0 \qquad 6x + 2y + 5\sqrt{10} = 0$$

Consideriamo un generico punto della prima retta e poi calcoliamo la distanza di esso dalla seconda. Un punto appartenente alla prima retta è $\left(\sqrt{10}, 0\right)$ e la sua distanza da $6x + 2y + 5\sqrt{10} = 0$ è $d = \frac{\left|6 \cdot \sqrt{10} + 2 \cdot 0 + 5 \cdot \sqrt{10}\right|}{\sqrt{6^2 + 2^2}} = \frac{11 \cdot \sqrt{10}}{2 \cdot \sqrt{10}} = \frac{11}{2}$.

Quesito 2

Un trapezio rettangolo è circoscritto ad una semicirconferenza di raggio r in modo che la base maggiore contenga il diametro. Si calcoli in gradi e primi (sessagesimali) l'ampiezza x dell'angolo acuto del trapezio, affinché il solido da esso generato in una rotazione completa attorno alla base maggiore abbia volume minimo.

Consideriamo la figura sottostante:



Poniamo $x = C\hat{B}F$ con $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Si ha: $CF = r, FB = \frac{r}{\tan(x)} = r\frac{\cos(x)}{\sin(x)}, OB = \frac{OE}{\sin(x)} = \frac{r}{\sin(x)}$, per cui

$$CD = AO + OF = AO + OB - FB = r + \frac{r}{\sin(x)} - r\frac{\cos(x)}{\sin(x)} = r\left[\frac{1 + \sin(x) - \cos(x)}{\sin(x)}\right].$$

Il solido generato da una rotazione completa attorno alla base maggiore non è altro che un cilindro di altezza CD e raggio di base CF cui si sovrappone un cono di altezza FB e raggio di base CF. Quindi

$$V = V_{Cilindro} + V_{Cono} = \pi r^2 \cdot CD + \frac{\pi r^2 \cdot FB}{3} = \frac{\pi r^2}{3}(3CD + FB) =$$
$$= \frac{\pi r^3}{3}\left[3\left(\frac{1+\sin(x)-\cos(x)}{\sin(x)}\right) + \frac{\cos(x)}{\sin(x)}\right] =$$
$$= \frac{\pi r^3}{3}\left[\left(\frac{3+3\sin(x)-2\cos(x)}{\sin(x)}\right)\right]$$

Calcoliamo la derivata della funzione volume:

$$V' = \frac{\pi r^3}{3}\left[\frac{\sin(x)(3\cos(x)+2\sin(x)) - \cos(x)(3+3\sin(x)-2\cos(x))}{\sin^2(x)}\right] =$$
$$= \frac{\pi r^3}{3}\left[\frac{2-3\cos(x)}{\sin^2(x)}\right]$$

La funzione volume, considerando il limite geometrico $0 < x < \frac{\pi}{2}$, risulta essere strettamente crescente in $\left(\arccos\left(\frac{2}{3}\right), \frac{\pi}{2}\right)$, strettamente decrescente in $\left(0, \arccos\left(\frac{2}{3}\right)\right)$ e si annulla in $x = \arccos\left(\frac{2}{3}\right) \cong 48°11'22''$ in cui il volume assume valore minimo

$$V\left(\arccos\left(\frac{2}{3}\right)\right) = \frac{\pi r^3}{3}\left[\left(\frac{3+3\sqrt{1-\frac{4}{9}}-\frac{4}{3}}{\sqrt{1-\frac{4}{9}}}\right)\right] = \frac{\pi r^3}{3}\left[\left(\frac{\frac{5}{3}+\sqrt{5}}{\frac{\sqrt{5}}{3}}\right)\right] = \pi r^3\,\frac{(5+3\sqrt{5})}{3\sqrt{5}} = \pi r^3\,\frac{(\sqrt{5}+3)}{3}$$

Quesito 3

Si determinino le equazioni degli asintoti della curva:

$$f(x) = -x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2}$$

La funzione $f(x) = -x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2}$ è definita e continua su tutto l'asse reale, per cui sicuramente non ammetterà asintoti verticali.

Vediamo se esistono asintoti orizzontali:

$$\lim_{x \to -\infty}\left[-x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2}\right] = (+\infty + \infty) = +\infty$$
$$\lim_{x \to +\infty}\left[-x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2}\right] = (-\infty + \infty)$$

e razionalizzando si ha

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\left(-x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right)\left(\sqrt{x^2+2x+2}+x-1\right)}{\sqrt{x^2+2x+2}+x-1}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{(4x+1)}{x\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}+1-\frac{1}{x}\right)}\right]=2$$

in cui si è sfruttato che per $x\to+\infty$ vale $|x|=x$, per cui la retta $y=2$ è asintoto orizzontale destro.

Vediamo se esistono asintoti obliqui: essi avranno equazione $y=mx+q$.

$$m=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{-x+1+\sqrt{x^2+2x+2}}{x}\right]=\left[\frac{x\left(-1+\frac{1}{x}-\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}\right)}{x}\right]=-2$$

$$q=\lim_{x\to-\infty}\left[-x+1+\sqrt{x^2+2x+2}+2x\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right]=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right)\left(\sqrt{x^2+2x+2}-x-1\right)}{\sqrt{x^2+2x+2}-x-1}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{-x\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}+1+\frac{1}{x}\right)}\right]=0$$

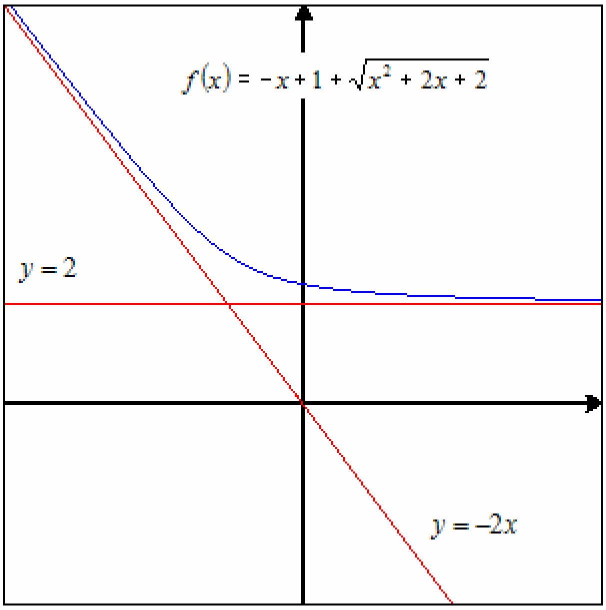
in cui si è sfruttato che per $x\to-\infty$ vale $|x|=-x$, per cui la retta $y=-2x$ è asintoto obliquo sinistro.

Vediamo se esiste anche un asintoto obliquo destro:

$$m=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{-x+1+\sqrt{x^2+2x+2}}{x}\right]\overset{|x|=x}{=}\left[\frac{x\left(-1+\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}\right)}{x}\right]=0$$

$$q=\lim_{x\to+\infty}\left[-x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right]=2$$

Per cui in conclusione esiste un asintoto orizzontale destro di equazione $y=2$ ed un asintoto obliquo sinistro di equazione $y=-2x$ come il grafico della funzione mostra:



Quesito 4

Si calcoli il limite della funzione:

$$\frac{\cos(x)-\cos(2x)}{1-\cos(x)}$$

quando x tende a 0.

Possiamo seguire due strade: applicare o meno il teorema di De L'Hopital. Le mostreremo entrambe:

- **Uso di de l'Hopital**

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{\cos(x)-\cos(2x)}{1-\cos(x)}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{-\sin(x)+4\sin(x)\cos(x)}{\sin(x)}\right]=\lim_{x\to 0}[4\cos(x)-1]=3$$

- **Senza de l'Hopital**

La funzione di cui calcolare il limite è

$$\left[\frac{\cos(x)-\cos(2x)}{1-\cos(x)}\right]=\left[\frac{-2\cos^2(x)+\cos(x)+1}{1-\cos(x)}\right]=\left[\frac{(1-\cos(x))(2\cos(x)+1)}{1-\cos(x)}\right]=(2\cos(x)+1)$$

Per cui $\lim_{x\to 0}\left[\frac{\cos(x)-\cos(2x)}{1-\cos(x)}\right]=\lim_{x\to 0}[(2\cos(x)+1)]=3$

Quesito 5

Si calcoli il valore medio della funzione $f(x)=\log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ nell'intervallo $0 \le x \le 1$.

Il valore medio di una funzione $f(x)$ in un intervallo chiuso e limitato [a,b] è $V_M=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.

In tal caso si ha $V_M = \int_0^1 \log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx$ ed applicando l'integrazione per parti troviamo:

$$V_M = \left[x\log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x\cdot\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)}{x+\sqrt{1+x^2}}dx =$$
$$= \left[x\log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x\cdot}{\sqrt{1+x^2}}dx =$$
$$= \left[x\log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right]_0^1 - \left[\sqrt{1+x^2}\right]_0^1 = \log\left(1+\sqrt{2}\right)+1-\sqrt{2}$$

Quesito 6

Si sechi il solido di una sfera con un piano, in modo che il circolo massimo sia medio proporzionale fra le superficie appianate delle calotte nelle quali rimane divisa la sfera.

Il circolo massimo di una sfera di raggio r ha superficie $S_C = \pi\cdot r^2$, mentre le superfici delle due calotte appianate di altezze h e $(2r-h)$ sono rispettivamente $S_{C1} = 2\cdot\pi\cdot r\cdot h, S_{C2} = 2\cdot\pi\cdot r\cdot(2r-h)$. Va quindi impostata l'equazione $(2\cdot\pi\cdot r\cdot h)\cdot[2\cdot\pi\cdot r\cdot(2r-h)] = \pi^2\cdot r^4$ da cui $4h^2 - 8rh + r^2 = 0 \Rightarrow h_{1,2} = r\left(\frac{4\pm 2\sqrt{3}}{4}\right) = r\left(\frac{2\pm\sqrt{3}}{2}\right)$ che sono rispettivamente le due altezze delle due calotte. In conclusione la sfera va divisa in modo che le due calotte abbiano altezze $h_1 = r\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}\right), h_2 = r\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2}\right)$.

Quesito 7

La regione finita di piano delimitata dalla curva di equazione $f(x) = e^{\frac{x}{2}}(x+1)$ e dall'asse x nell'intervallo 0 ≤ x ≤ 1 è la base di un solido S le cui sezioni sono tutte esagoni regolari. Si calcoli il volume di S.

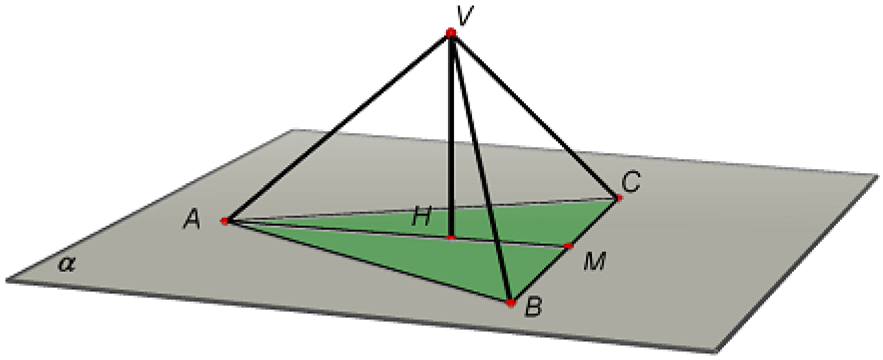
Un esagono regolare è composto da 6 triangoli equilateri di lato l, per cui la sua area sarà $A(x) = 6\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot l^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot l^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot\left[e^{\frac{x}{2}}(x+1)\right]^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot e^x(x+1)^2$ ed il suo volume $V = \int_0^1 \frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot e^x(x+1)^2\,dx = \frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot\int_0^1 e^x(x+1)^2\,dx$. Applicando l'integrazione per parti si ha:

$$V=\frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot\int_0^1 e^x(x+1)^2dx=\frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot\left\{\left[e^x(x+1)^2\right]_0^1-2\int_0^1 e^x(x+1)dx\right\}=$$
$$=\frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot\left\{\left[e^x(x+1)^2\right]_0^1-\left[2e^x(x+1)\right]_0^1+2\int_0^1 e^xdx\right\}=$$
$$=\frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot\left\{\left[e^x(x+1)^2-2e^x(x+1)+2e^x\right]_0^1\right\}=$$
$$=\frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot\{[4e-4e+2e]-[1-2+2]\}=\frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot(2e-1)$$

Quesito 8

Si stabilisca per quali valori del parametro reale k esiste una piramide triangolare regolare tale che k sia il rapporto fra il suo apotema e lo spigolo di base.

Consideriamo la figura sottostante:



Come è facile sperimentare, quando *V* coincide con *H*, piede dell'altezza della piramide, questa degenera nel triangolo di base ed, essendo *H* il baricentro del triangolo di base, la lunghezza dell'apotema *MV* non può essere inferiore alla lunghezza di *MH*, la cui misura è un terzo della lunghezza dell'altezza del triangolo stesso.

Quindi il rapporto $k = MV / BC$ deve essere maggiore di $\sqrt{3}/6$.

Quesito 9

Si scriva l'equazione della tangente al diagramma della funzione:

$$f(x)=\left(x^2+1\right)^{\sin(x)}$$

nel punto P di ascissa $x=\frac{\pi}{2}$**.**

Il punto P è $\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi^2}{4}+1\right)$ e la tangente in esso ha generica equazione $y=m\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\left(\frac{\pi^2}{4}+1\right)$. La funzione $f(x)=(x^2+1)^{\sin(x)}$ può essere riscritta come $f(x)=e^{\sin(x)\cdot\ln(x^2+1)}$ e la sua derivata è $f'(x)=(x^2+1)^{\sin(x)}\cdot\left[\cos(x)\cdot\ln(x^2+1)+\sin(x)\cdot\frac{2x}{x^2+1}\right]$, pertanto $m=f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\left(\frac{\pi^2}{4}+1\right)\cdot\left[\frac{\pi}{\frac{\pi^2}{4}+1}\right]=\pi$ da cui la tangente $y=\pi\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\left(\frac{\pi^2}{4}+1\right)=\pi\cdot x-\frac{\pi^2}{4}+1$.

Quesito 10

Dato un sistema di riferimento cartesiano (ortogonale monometrico) in un piano, si dica che cosa rappresenta l'insieme dei punti $P(1+t^2,1+t^2)$, ottenuto al variare di t nei reali.

L'insieme dei punti $P(1+t^2,1+t^2)$, visto che l'ordinata è uguale all'ascissa e che $1+t^2\geq 1 \quad \forall t\in R$, non è altro che la semiretta di equazione $y=x$ con $x\geq 1$.