ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

Corso di ordinamento – sessione straordinaria 2008

Problema 1

Sia data la parabola di equazione:

$$y = ax^2 + bx + c$$

1. Si determinino a, b, c, in modo che la parabola passi per i punti $A(0,-6)$, $B(1,0)$ e nel punto B sia tangente alla retta di coefficiente angolare 5.
2. Si determinino le misure dei lati del rettangolo di perimetro massimo inscritto nel segmento parabolico limitato dalla parabola e dall'asse x.
3. Trovato questo rettangolo ed essendo M ed N i due suoi vertici che stanno sulla parabola, si calcoli in gradi e primi (sessagesimali) l'ampiezza dell'angolo acuto formato dalle due tangenti alla parabola in M e N.
4. Si calcoli il rapporto tra i volumi dei solidi generati in una rotazione attorno all'asse x dal segmento parabolico e dal rettangolo di perimetro massimo considerato.

Problema 2

Si consideri la funzione:

$$f(x) = \log\frac{x+1}{x^2+2}$$

1. Si studi tale funzione e si tracci il suo grafico γ, su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy).
2. Si scriva l'equazione della tangente alla curva γ nel punto d'intersezione con l'asse y.
3. Si studi la funzione $g(x) = e^{f(x)}$ e se ne tracci il grafico Γ.
4. Si calcoli l'area della superficie piana, delimitata dalla curva Γ, dagli assi cartesiani e dalla retta di equazione $x = \sqrt{2}$.

Questionario

1. Si determinino le costanti a e b in modo che la funzione: $F(x) = a\cos x + b\cos^3 x$, sia una primitiva della funzione $f(x) = 3\,\text{sen}\,x - 2\,\text{sen}^3 x$.
2. Si determinino le equazioni degli asintoti della curva $f(x) = \text{arctg}\,x - \dfrac{x}{1+x^2}$.
3. Fra tutti i cilindri inscritti in un cono circolare retto, avente raggio di base r e altezza h, si trovi quello di volume massimo.
4. Si consideri la funzione:
$$f(x) = \begin{cases} 3x + \dfrac{\sqrt{4x^2}}{x}, & \text{per } x \neq 0 \\ 2 & \text{per } x = 0 \end{cases}$$
Se ne studi la continuità nel punto $x = 0$ e poi si tracci il suo grafico.
5. Si consideri la seguente proposizione: "Due piani α e β sono tra loro perpendicolari se e solo se ogni retta di α è perpendicolare ad ogni retta di β". Si dica se è vera o falsa e si motivi esaurientemente la risposta.
6. Si determini, in base alla definizione, la derivata della funzione $f(x) = \text{sen}^2 x$ in $x = \dfrac{\pi}{4}$.
7. Si provi che alla funzione $f(x) = \text{tg}\,x + \text{sen}\,x$, nell'intervallo $0 \le x \le \pi$, non è applicabile il teorema di Rolle.
8. Si calcoli il valore medio della funzione $y = \dfrac{x^4+1}{x^2+1}$, nell'intervallo $0 \le x \le 1$.
9. Si determini il campo di esistenza della funzione $y = \log\left(\sqrt{x^2-2x} - x + 4\right)$.
10. Si calcoli il limite della funzione $\dfrac{e^{\text{sen}\,x} - \cos x}{e^{\cos x} - e\log(x+e)}$, quando x tende a 0.

PROBLEMA1

Punto 1

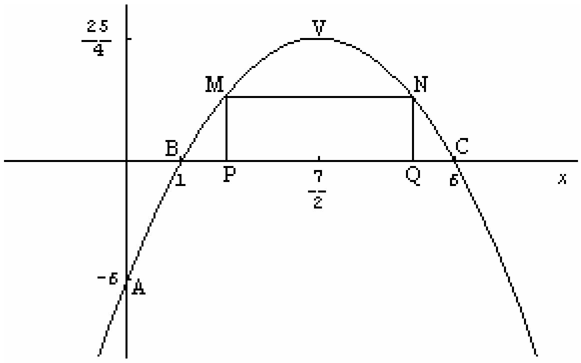
1. Il passaggio per A(0,-6) comporta la condizione $c=-6$;
2. Il passaggio per B(1,0) comporta la condizione $a+b+c=0$;
3. Il coefficiente angolare della retta tangente alla parabola in B(1,0) è pari al valore della derivata prima della funzione parabolica valutata nell'ascissa del punto B, cioè $m=[2ax+b]_{x=1}=2a+b$ da cui ricaviamo la terza condizione $2a+b=5$.

Si tratta quindi di risolvere il sistema $\begin{cases} a+b+c=0 \\ 2a+b=5 \\ c=-6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=7 \\ c=-6 \end{cases}$ per cui la parabola ha equazione $y=-x^2+7x-6$.

Punto 2

La parabola $y=-x^2+7x-6$ ha concavità verso il basso e vertice in $V=\left(\frac{7}{2},\frac{25}{4}\right)$ ed interseca l'asse delle ascisse in B(1,0) e C(6,0) e quello delle ordinate in A(0,-6).

Si consideri la figura seguente rappresentante il rettangolo inscritto nel segmento parabolico limitato dalla parabola e dall'asse delle ascisse.



Per trovare i vertici del rettangolo si può procedere in due modi differenti. Li proponiamo entrambi.

- I vertici del rettangolo sono simmetrici rispetto alla retta di equazione $x=\frac{7}{2}$ ed hanno perciò coordinate $P(x,0), Q(7-x,0), N(7-x,-x^2+7x-6), M(x,-x^2+7x-6)$ con $1<x<6$. Il perimetro del rettangolo è $2p(x)=2\overline{PQ}+2\overline{PM}=2(7-2x)+2(-x^2+7x-6)=-2x^2+10x+2$; anche il perimetro è una parabola con concavità verso il basso che raggiunge il suo massimo nell'ascissa del vertice e cioè in $x=\frac{5}{2}$ cui corrispondono il perimetro massimo $2p_{\max}=\frac{29}{2}$ ed i vertici

$P\left(\frac{5}{2},0\right), Q\left(\frac{9}{2},0\right), N\left(\frac{9}{2},\frac{21}{4}\right), M\left(\frac{5}{2},\frac{21}{4}\right)$.

Alternativamente il perimetro massimo può essere calcolato mediante derivazione.

Le derivate, prima e seconda della funzione perimetro, sono

$$2p'(x) = -4x + 10$$
$$2p''(x) = -4$$

da cui deduciamo che la funzione perimetro è strettamente crescente in $\left(1,\frac{5}{2}\right)$, strettamente decrescente in $\left(\frac{5}{2},6\right)$ e sempre concava verso il basso, per cui $x = \frac{5}{2}$ è l'ascissa di un massimo relativo.

- Senza sfruttare la proprietà per cui i vertici del rettangolo sono simmetrici rispetto alla retta $x = \frac{7}{2}$, si può procedere nel seguente modo. I vertici M ed N hanno ordinata generica $y = k\left(0 < k < \frac{25}{4}\right)$, cui corrispondono le ascisse date dalle soluzioni dell'equazione

$$k = -x^2 + 7x - 6 \Rightarrow x^2 - 7x + k + 6 = 0 \Rightarrow \left\langle \begin{array}{l} x_N = \frac{7+\sqrt{25-4k}}{2} \\ x_M = \frac{7-\sqrt{25-4k}}{2} \end{array} \right. .$$

I vertici del rettangolo risultano allora

$P\left(\frac{7-\sqrt{25-4k}}{2},0\right), Q\left(\frac{7+\sqrt{25-4k}}{2},0\right), N\left(\frac{7+\sqrt{25-4k}}{2},k\right), M\left(\frac{7-\sqrt{25-4k}}{2},k\right)$. Il perimetro è $2p(k) = 2\overline{PQ} + 2\overline{PM} = 2\left(\sqrt{25-4k}\right) + 2(k) = 2\left(\sqrt{25-4k} + k\right)$. Procediamo mediante derivazione per la massimizzazione del perimetro. Le derivate, prima e seconda della funzione perimetro, sono

$$2p'(k) = 2\left(\frac{\sqrt{25-4k} - 2}{\sqrt{25-4k}}\right)$$
$$2p''(k) = -\frac{8}{(25-4k)^{\frac{3}{2}}}$$

Studiando il segno della derivata prima si deduce che:

$$2p'(k)=2\left(\frac{\sqrt{25-4k}-2}{\sqrt{25-4k}}\right)>0 \Rightarrow \sqrt{25-4k}-2>0 \Rightarrow \begin{cases}25-4k>4\\ 0<k<\frac{25}{4}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}k<\frac{21}{4}\\ 0<k<\frac{25}{4}\end{cases} \Rightarrow 0<k<\frac{21}{4}$$

$$2p'(k)=2\left(\frac{\sqrt{25-4k}-2}{\sqrt{25-4k}}\right)<0 \Rightarrow \sqrt{25-4k}-2<0 \Rightarrow \begin{cases}25-4k<4\\ 0<k<\frac{25}{4}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}k>\frac{21}{4}\\ 0<k<\frac{25}{4}\end{cases} \Rightarrow \frac{21}{4}<k<\frac{25}{4}$$

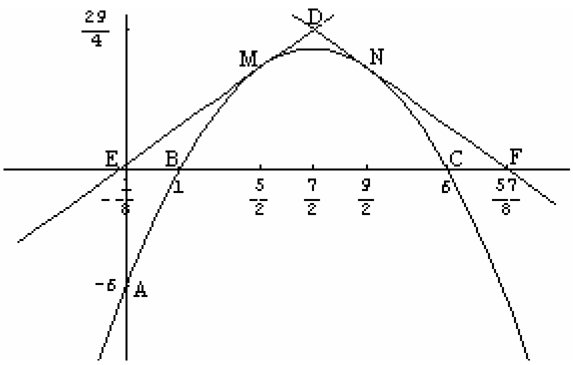
per cui la funzione perimetro è strettamente crescente in $\left(0,\frac{21}{4}\right)$, strettamente decrescente in $\left(\frac{21}{4},\frac{25}{4}\right)$; inoltre $2p''\left(\frac{21}{4}\right)=-1<0$ da cui deduciamo che $k=\frac{21}{4}$ massimizza il perimetro.

I vertici corrispondenti a $k=\frac{21}{4}$ sono gli stessi di quelli trovati precedentemente.

Punto 3

La tangente in $M\left(\frac{5}{2},\frac{21}{4}\right)$ ha equazione $y=m_M\left(x-\frac{5}{2}\right)+\frac{21}{4}$ con $m_M=\left[-2x+7\right]_{x=\frac{5}{2}}=2$ e cioè $y=2x+\frac{1}{4}$; la tangente in $N\left(\frac{9}{2},\frac{21}{4}\right)$ ha equazione $y=m_N\left(x-\frac{9}{2}\right)+\frac{21}{4}$ con $m_N=\left[-2x+7\right]_{x=\frac{9}{2}}=-2$ e cioè $y=-2x+\frac{57}{4}$. Le due tangenti si incontrano in $D\left(\frac{7}{2},\frac{29}{4}\right)$.

La tangente di equazione $y=2x+\frac{1}{4}$ incontra l'asse delle ascisse in $E\left(-\frac{1}{8},0\right)$ mentre la tangente di equazione $y=-2x+\frac{57}{4}$ in $F\left(\frac{57}{8},0\right)$. Si consideri la figura sottostante raffigurante la parabola e le due tangenti:



Il triangolo isoscele DMN ha i lati che misurano:

$$\overline{DM}=\sqrt{\left(\frac{7}{2}-\frac{5}{2}\right)^2+\left(\frac{29}{4}-\frac{21}{4}\right)^2}=\sqrt{5}, \overline{DN}=\sqrt{\left(\frac{9}{2}-\frac{7}{2}\right)^2+\left(\frac{29}{4}-\frac{21}{4}\right)^2}=\sqrt{5}, \overline{MN}=2\ .$$

Per il teorema del coseno $\cos\left(M\hat{D}N\right)=\dfrac{\overline{DM}^2+\overline{DN}^2-\overline{MN}^2}{2\overline{DM}\cdot\overline{DN}}=\dfrac{5+5-4}{2\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}}=\dfrac{3}{5}$ per cui $M\hat{D}N=\arccos\left(\dfrac{3}{5}\right)\cong 53°8'$.

Alternativamente ricordando che la tangente di un angolo acuto α formato tra due rette di coefficienti angolari m ed m_1 è $\tan\alpha=\left|\dfrac{m-m_1}{1+m\cdot m_1}\right|$, si ha

$$\alpha=M\hat{D}N=\arctan\left(\left|\frac{m-m_1}{1+m\cdot m_1}\right|\right)\xrightarrow{m=2,m_1=-2}\alpha=\arctan\left(\left|\frac{2-(-2)}{1-2\cdot(-2)}\right|\right)=\arctan\left(\frac{4}{3}\right)\cong 53°8'.$$

Punto 4

Il volume generato dalla rotazione del segmento parabolico intorno all'asse delle ascisse è

$$V_p=\pi\int_1^6\left(-x^2+7x-6\right)^2dx=\pi\int_1^6\left(x^4-14x^3+61x^2-84x+36\right)dx=$$

$$=\pi\left[\frac{x^5}{5}-\frac{7x^4}{2}+\frac{61x^3}{3}-42x^2+36x\right]_1^6=\frac{625\pi}{6}$$

La rotazione del rettangolo di perimetro massimo dà origine ad un cilindro con area di base $A_b=\pi\cdot\overline{PM}^2=\dfrac{441\pi}{16}$ ed altezza $h=\overline{PQ}=2$ cui corrisponde il volume $V_C=\dfrac{441\pi}{16}\cdot 2=\dfrac{441\pi}{8}$. Il rapporto tra i due volumi è $R=\dfrac{\frac{625\pi}{6}}{\frac{441\pi}{8}}=\dfrac{2500}{1323}$.

PROBLEMA2

Punto 1

Studiamo la funzione $y = \ln \frac{x+1}{x^2+2}$

- *Dominio*: $\frac{x+1}{x^2+2} > 0 \Rightarrow x \in (-1,+\infty)$
- *Intersezioni asse ascisse*: $y = \ln \frac{x+1}{x^2+2} = 0 \Rightarrow \frac{x+1}{x^2+2} = 1 \Rightarrow x^2 - x + 1 = 0$ da cui deduciamo che non esistono intersezioni con l'asse delle ascisse in quanto l'equazione risolvente non ammette radici reali;
- *Intersezioni asse ordinate*: $x = 0 \Rightarrow y = -\ln 2$;
- *Eventuali simmetrie*: la funzione non è né pari né dispari;
- *Positività*: $y = \ln \frac{x+1}{x^2+2} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x+1}{x^2+2} > 1 \\ x \in (-1,+\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2-x+1}{x^2+2} < 0 \\ x \in (-1,+\infty) \end{cases}$. La disequazione $\frac{x^2-x+1}{x^2+2} < 0$ non è mai soddisfatta in quanto sia numeratore che denominatore sono sempre positivi; quindi si deduce che la funzione è sempre negativa nel dominio $(-1,+\infty)$.
- *Asintoti verticali*: $\lim_{x \to -1^+} \ln \frac{x+1}{x^2+2} = \ln 0^+ = -\infty$ per cui la retta $x = -1$ è asintoto verticale;
- *Asintoti orizzontali*: $\lim_{x \to +\infty} \ln \frac{x+1}{x^2+2} = \ln 0 = -\infty$ per cui non esistono asintoti orizzontali;
- *Asintoti obliqui*: nemmeno esistono;
- *Crescenza e decrescenza*: $y' = \frac{\frac{(x^2+2) - 2x(x+1)}{(x^2+2)^2}}{\frac{(x+1)}{(x^2+2)}} = \frac{-x^2 - 2x + 2}{(x^2+2)(x+1)}$ per cui, tenendo conto del dominio $(-1,+\infty)$ si ha

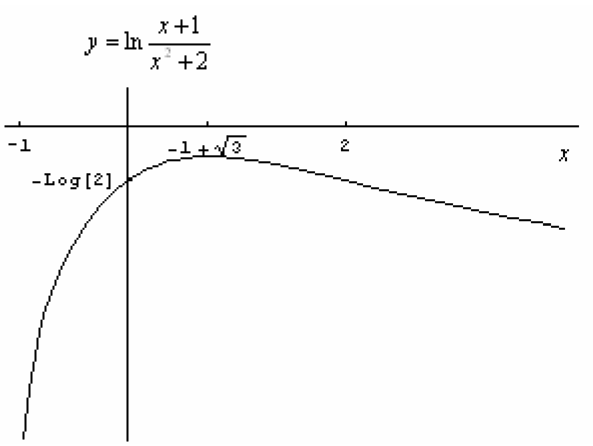
  $y' > 0 \Rightarrow -1 < x < -1 + \sqrt{3}$
  $y' < 0 \Rightarrow x > -1 + \sqrt{3}$
  $y' = 0 \Rightarrow x = -1 + \sqrt{3}$

  Dal segno della derivata prima deduciamo che la funzione presenta un massimo relativo ed assoluto all'ascissa $x = -1 + \sqrt{3}$.

- *Concavità e convessità*: la derivata seconda della funzione è $y''=\frac{(x-2)(x^3+6x^2+6x+4)}{(x^2+2)^2(x+1)^2}$.

  Sicuramente la derivata seconda si annulla in $x=2$ per cui la funzione presenta un flesso a tangente obliqua in $(2,-\ln 2)$. Controlliamo se la derivata seconda si annulla anche in qualche altro punto. Bisogna studiare gli zeri dell'equazione $h(x)=(x^3+6x^2+6x+4)=0$. Il polinomio $h(x)=(x^3+6x^2+6x+4)$ può essere riscritto come $h(x)=(x+2)^3-6x-4$ e ponendo $y=x+2$ esso si riconduce a $h(y)=y^3-6y+8$. Quest'artificio ci è servito per poter applicare il metodo di Cardano all'equazione di terzo grado $h(y)=y^3-6y+8=0$ nella forma $y^3+py+q=0$ con $p=-6, q=8$. Equazioni di terzo grado in questa forma presentano una soluzione reale e due complesse coniugate se $\Delta=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\geq 0$ e tre soluzioni reali se $\Delta=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}<0$. Nel caso dell'equazione $h(y)=y^3-6y+8=0$, si ha $\Delta=\frac{64}{4}-\frac{216}{27}=8>0$ per cui la soluzione reale è unica. In particolare il metodo di Cardano ci dice anche quali siano le soluzioni, e nel caso in esame l'unica soluzione reale è $y=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}=\sqrt[3]{-4+2\sqrt{2}}+\sqrt[3]{-4-2\sqrt{2}}$ cui corrisponde $x=y-2=\sqrt[3]{-4+2\sqrt{2}}+\sqrt[3]{-4-2\sqrt{2}}-2\cong -4{,}95\notin(-1,+\infty)$. Quindi l'altro zero che annulla la derivata seconda non appartiene al dominio di definizione della funzione; in conclusione la funzione presenta un unico flesso a tangente obliqua in $(2,-\ln 2)$.

Il grafico è di seguito presentato:



Punto 2

La retta tangente in $(0,-\ln 2)$ ha equazione $y = mx - \ln 2$ con $m = y'(0) = \left[\frac{-x^2-2x+2}{(x^2+2)(x+1)}\right]_{x=0} = 1$ e cioè $y = x - \ln 2$

Punto 3

La curva $g(x) = e^{f(x)}$ è $g(x) = \frac{x+1}{x^2+2}$. Studiamola.

- *Dominio*: $\frac{x+1}{x^2+2} > 0 \Rightarrow x \in (-1,+\infty)$
- *Intersezioni asse ascisse*: $g(x) = \frac{x+1}{x^2+2} = 0 \Rightarrow x = -1$; tale valore non appartiene al dominio, tuttavia in esso la funzione è prolungabile per continuità; infatti $\lim_{x \to -1^+} \frac{x+1}{x^2+2} = 0$
- *Intersezioni asse ordinate*: $x = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2}$;
- *Eventuali simmetrie*: la funzione non è né pari né dispari;
- *Positività*: $g(x) = \frac{x+1}{x^2+2} > 0 \Rightarrow x \in (-1,+\infty)$.
- *Asintoti verticali*: non ve ne sono in quanto il dominio è $x \in (-1,+\infty)$ ed in $x = -1$ la funzione è prolungabile ed assume valore nullo;
- *Asintoti orizzontali*: $\lim_{x \to +\infty} \frac{x+1}{x^2+2} = 0$ per cui $y = 0$ è asintoto orizzontale destro;
- *Asintoti obliqui*: non esistono in quanto esiste quello orizzontale e per una funzione razionale fratta la presenza dell'uno implica l'assenza dell'altro;
- *Crescenza e decrescenza*: $y' = \frac{(x^2+2)-2x(x+1)}{(x^2+2)^2} = \frac{-x^2-2x+2}{(x^2+2)^2}$ per cui, tenendo conto del dominio $x \in (-1,+\infty)$, si ha

  $y' > 0 \Rightarrow -1 < x < -1+\sqrt{3}$
  $y' < 0 \Rightarrow x > -1+\sqrt{3}$
  $y' = 0 \Rightarrow x = -1+\sqrt{3}$

  Dal segno della derivata prima deduciamo che la funzione presenta un massimo relativo all'ascissa $x = -1+\sqrt{3}$.
- *Concavità e convessità*: la derivata seconda della funzione è $y'' = \frac{2(x^3+3x^2-6x-2)}{(x^2+2)^3}$ il cui

studio possiamo limitarlo a quello del solo numeratore $N(x)=(x^3+3x^2-6x-2)$ in quanto il denominatore è sempre positivo.

Lo studio degli zeri dell'equazione $N(x)=0$ può essere effettuato ancora una volta mediante metodo di Cardano a valle di una opportuna sostituzione per ricondursi alla forma $y^3+py+q=0$ oppure mediante metodo grafico o metodo numerico.

Lo studio grafico comporta la risoluzione grafica del sistema $\begin{cases} y=x^3 \\ y=-3x^2+6x+2 \end{cases}$ in cui la prima curva è una cubica e la seconda una parabola.

Il metodo numerico, invece, permette, una volta trovato l'intervallo in cui lo zero è presente, di trovarne un'approssimazione. I metodi numerici che possono essere sfruttati sono quelli di bisezione, delle tangenti o delle secanti. Per trovare gli intervalli in cui gli zeri sono presenti si può applicare il teorema degli zeri. Applicando il teorema degli zeri nei tre intervalli $(-5,-4),(-1,0),(1,2)$ deduciamo che esistono tre zeri reali dell'equazione $N(x)=0$; infatti $N(-5)\cdot N(-4)<0, N(-1)\cdot N(0)<0, N(1)\cdot N(2)<0$ per cui a norma del teorema degli zeri, gli zeri esistono ed appartengono ai tre intervalli suddetti. Tenendo conto del dominio $x\in(-1,+\infty)$ deduciamo che la funzione presenta due flessi negli intervalli (-1,0) e (1,2).

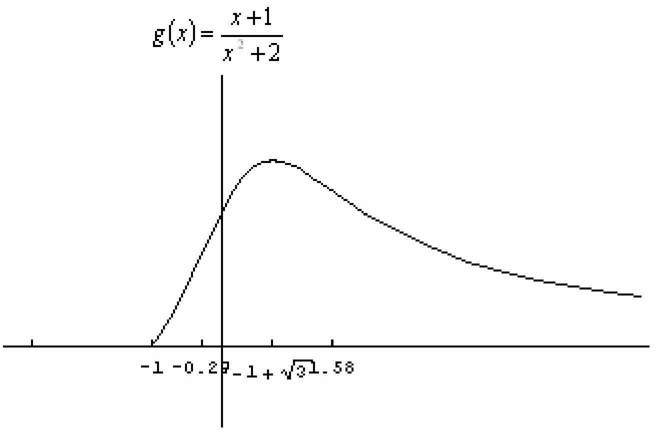
Per trovare l'approssimazione dei tre zeri possiamo applicare il metodo delle tangenti. Lo applicheremo per calcolare lo zero appartenente all'intervallo (1,2), per l' altro è un semplice esercizio che lasciamo al lettore.

Il metodo delle tangenti permette di trovare lo zero cercato mediante formula ricorsiva $x_{n+1}=x_n-\frac{N(x_n)}{N'(x_n)}$ e nel caso in esame $x_{n+1}=x_n-\frac{x_n^3+3x_n^2-6x_n-2}{3x_n^2+6x_n-6}=\frac{2x_n^3+3x_n^2+2}{3x_n^2+6x_n-6}$. Il punto iniziale è $x_0=2$ in quanto in esso sia $N(x)=(x^3+3x^2-6x-2)$ che la sua derivata seconda sono concordi. Lo sviluppo del metodo è di seguito presentato:

1. $x_0=2$
2. $x_1=\frac{2(2)^3+3(2)^2+2}{3(2)^2+6(2)-6}\cong 1.667$
3. $x_2=\frac{2(1.667)^3+3(1.667)^2+2}{3(1.667)^2+6(1.667)-6}\cong 1.588$
4. $x_3=\frac{2(1.588)^3+3(1.588)^2+2}{3(1.588)^2+6(1.588)-6}\cong 1.584$

Con un errore $|x_3 - x_2| \le 0.01$ possiamo concludere che lo zero appartenente all'intervallo (1,2) è $x_1 \cong 1.58$. Analogamente troviamo l'altro zero $x_2 \cong -0.29$.

Il grafico è di seguito presentato:



Punto 4

L'area da calcolare è data dall'integrale definito

$$I = \int_0^{\sqrt{2}} \left(\frac{x+1}{x^2+2} \right) dx = \int_0^{\sqrt{2}} \left(\frac{x}{x^2+2} + \frac{1}{x^2+2} \right) dx =$$

$$= \int_0^{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{2} \frac{2x}{x^2+2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right)^2 + 1} \right) dx = \left[\frac{1}{2} \ln\left(x^2+2\right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right) \right]_0^{\sqrt{2}} =$$

$$= \left[\frac{1}{2} \ln 4 + \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(1) \right] - \left[\frac{1}{2} \ln 2 \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{\pi\sqrt{2}}{8}$$

QUESTIONARIO

Quesito 1

La funzione $f(x)=3\sin x-2\sin^3 x$ può essere riscritta come $f(x)=3\sin x-2\sin x\cdot\left(1-\cos^2 x\right)=\sin x+2\sin x\cdot\cos^2 x$. La famiglia di primitive della funzione $f(x)=3\sin x-2\sin^3 x$ è pertanto $F_k(x)=\int\left(\sin x+2\sin x\cdot\cos^2 x\right)dx=-\cos x-\frac{2}{3}\cos^3 x+k$. Una delle primitive, ad esempio quella per $k=0$, è $F_0(x)=-\cos x-\frac{2}{3}\cos^3 x$. In conclusione affinché $F(x)=a\cos x+b\cos^3 x$ sia una primitiva basta porre $\begin{cases} a=-1 \\ b=-\frac{2}{3} \end{cases}$.

Alternativamente possiamo perseguire la strada inversa. La derivata della primitiva $F(x)=a\cos x+b\cos^3 x$ è $F'(x)=-a\sin x-3b\sin x\cdot\cos^2 x$ che risulta coincidere con la funzione $f(x)=\sin x+2\sin x\cdot\cos^2 x$ se $\begin{cases} a=-1 \\ -3b=2 \end{cases}\rightarrow\begin{cases} a=-1 \\ b=-\frac{2}{3} \end{cases}$.

Quesito 2

La funzione $f(x)=\arctan x-\frac{x}{1+x^2}$ ha come dominio l'insieme dei numeri reali, per cui non presenterà asintoti verticali.

Vediamo se presenta asintoti orizzontali. Si ha:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\arctan x-\frac{x}{1+x^2}\right]=\lim_{x\to+\infty}(\arctan x)-\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{1+x^2}\right)=\frac{\pi}{2}-0=\frac{\pi}{2}$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[\arctan x-\frac{x}{1+x^2}\right]=\lim_{x\to-\infty}(\arctan x)-\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{1+x^2}\right)=-\frac{\pi}{2}-0=-\frac{\pi}{2}$$

per cui le rette $y=\pm\frac{\pi}{2}$ sono due asintoti orizzontali.

Vediamo se esistono asintoti obliqui. Si ha:

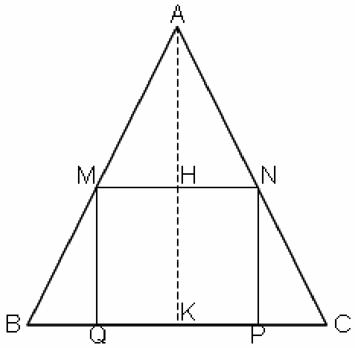
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\arctan x}{x}-\frac{1}{1+x^2}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\arctan x}{x}\right)-\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)=0-0=0$$
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{\arctan x}{x}-\frac{1}{1+x^2}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\arctan x}{x}\right)-\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)=0-0=0$$

per cui non esistono asintoti obliqui.

In conclusione la curva presenta solo due asintoti orizzontali di equazioni $y=\pm\frac{\pi}{2}$.

Quesito 3

Si consideri la figura seguente rappresentante in sezione il cono ed il cilindro in esso inscritto.



Sia $\overline{NP} = x$ con $0 < x < h$. I triangoli AHN e AKC sono simili per cui vale la proporzione tra lati omologhi $\overline{AH} : \overline{HN} = \overline{AK} : \overline{KC}$ e cioè $(h-x) : \overline{HN} = h : r \Rightarrow \overline{HN} = \frac{r(h-x)}{h}$. Il volume del cilindro è allora $V_C(x) = \pi \cdot \overline{HN}^2 \cdot \overline{NP} = \frac{\pi r^2}{h^2}\left[x(h-x)^2\right] = \frac{\pi r^2}{h^2}\left(x^3 - 2hx^2 + h^2 x\right)$. La massimizzazione del volume la effettuiamo mediante derivazione. La derivata prima della funzione volume è $V_C^{'}(x) = \frac{\pi r^2}{h^2}\left(3x^2 - 4hx^2 + h^2\right) = \frac{\pi r^2}{h^2}(3x-h)(x-h)$. Studiando il segno della derivata prima del volume, considerando il limite geometrico $0 < x < h$, si ha:

$V_C^{'}(x) > 0 \Rightarrow 0 < x < \frac{h}{3}$

$V_C^{'}(x) < 0 \Rightarrow \frac{h}{3} < x < h$

$V_C^{'}(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{h}{3} \vee x = h$

Dalle considerazioni sul segno si deduce che il volume assume valore massimo per $x = \frac{h}{3}$ e vale

$$V_{C,\max} = \frac{\pi r^2}{h^2}\left[\frac{h}{3}\left(h - \frac{h}{3}\right)^2\right] = \frac{4\pi r^2 h}{27}.$$

Quesito 4

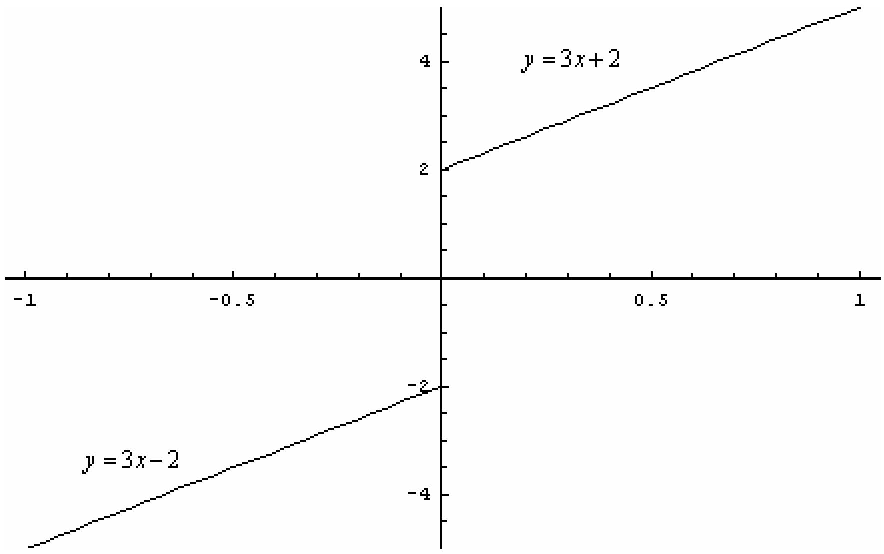
Ricordando che $\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} +x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$, la funzione in esame può essere riscritta come

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 2\frac{|x|}{x} & x \neq 0 \\ 2 & x = 0 \end{cases} = \begin{cases} 3x+2 & x \geq 0 \\ 3x-2 & x < 0 \end{cases}.$$

Valutiamo ora i limiti destro e sinistro in $x = 0$. Si ha:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (3x+2) = 2,$$
$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (3x-2) = -2$$

per cui la funzione non è continua in $x = 0$ in cui presenta una discontinuità di prima specie con salto pari a 4. Il grafico è di seguito presentato.



Quesito 5

La proposizione è falsa in quanto due piani nello spazio si dicono perpendicolari se esiste una retta in uno dei due piani perpendicolare all'altro piano e cioè se la retta è perpendicolare a qualsiasi retta del piano passante per il punto in comune con la retta data. Affinché la suddetta condizione sia soddisfatta, è sufficiente che la retta data sia perpendicolare a due di queste.

Quesito 6

Il valore della derivata della funzione $f(x) = \sin^2 x$ in $x = \frac{\pi}{4}$, applicando la definizione, è:

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \lim_{h\to 0}\frac{f\left(\frac{\pi}{4}+h\right)-f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+h\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(h)+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(h)\right]^2-\frac{1}{2}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{2}\left[\cos(h)+\sin(h)\right]^2-\frac{1}{2}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{2}\left[\overbrace{\cos^2(h)+\sin^2(h)}^{=1}+2\sin(h)\cos(h)\right]-\frac{1}{2}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{2}\left[1+2\sin(h)\cos(h)\right]-\frac{1}{2}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)\cos(h)}{h} = \underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{h}}_{=1}\cdot\underbrace{\lim_{h\to 0}\cos(h)}_{=1} = 1$$

Come controprova calcoliamo la derivata della funzione $f(x)=\sin^2 x$ e valutiamola in $x=\frac{\pi}{4}$. Si ha: $f'(x)=\sin(2x) \Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$ come precedentemente trovato.

Quesito 7

Enunciamo il teorema di Rolle.

Sia $f:[a,b]\to R$. Se

1. f è continua in $[a,b]$
2. f è derivabile in (a,b)
3. $f(a)=f(b)$

allora $\exists c \in (a,b):\ f'(c)=0$.

Geometricamente il teorema di Rolle afferma che nelle ipotesi soprastanti esiste un punto dell'intervallo in cui la funzione presenta una tangente orizzontale e tale punto è detto punto critico o stazionario.

Alla funzione $f(x)=\tan x+\sin x$ con $0\le x\le\pi$ non è applicabile il teorema di Rolle in quanto in $x=\frac{\pi}{2}\in(0,\pi)$ non è né continua né derivabile. Venendo a cadere le ipotesi per l'applicabilità del teorema se ne deduce l'inapplicabilità.

Quesito 8

Il valore medio di una funzione $f(x)$ in un intervallo $[a,b]$ è dato da $V_M=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.

Per il caso in esame si ha $V_M = \frac{1}{1-0}\int_0^1 \left(\frac{x^4+1}{x^2+1}\right)dx = \int_0^1 \left(x^2 - 1 + \frac{2}{x^2+1}\right)dx = \left[\frac{x^3}{3} - x + 2\arctan x\right]_0^1 = \frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}$.

Quesito 9

Il dominio della funzione $f(x) = \ln\left(\sqrt{x^2-2x} - x + 4\right)$ è dato da $D_f : \begin{cases} x^2 - 2x \geq 0 \\ \sqrt{x^2-2x} - x + 4 > 0 \end{cases}$. La disequazione $x^2 - 2x \geq 0$ è verificata per $x \leq 0 \vee x \geq 2$ mentre la disequazione $\sqrt{x^2-2x} > x - 4$ ha come soluzione l'unione delle soluzioni dei seguenti sistemi: $\begin{cases} x^2 - 2x \geq 0 \\ x - 4 < 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x - 4 \geq 0 \\ x^2 - 2x > (x-4)^2 \end{cases}$. Il primo sistema ha come soluzione $x \leq 0 \vee 2 \leq x < 4$ mentre il secondo sistema è riscrivibile come $\begin{cases} x - 4 \geq 0 \\ 6x - 16 > 0 \end{cases}$ la cui soluzione è $x \geq 4$. Quindi la disequazione $\sqrt{x^2-2x} > x - 4$ è verificata per $x \leq 0 \vee x \geq 2$. In conclusione il dominio della funzione è

$$D_f : \begin{cases} x^2 - 2x \geq 0 \\ \sqrt{x^2-2x} - x + 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \vee x \geq 2 \\ x \leq 0 \vee x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0] \cup [2, +\infty).$$

Quesito 10

Il limite $\lim_{x \to 0} \frac{e^{\sin x} - \cos x}{e^{\cos x} - e\ln(x+e)}$ si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$, per cui possiamo applicare il teorema di De L'Hospital.

Si ha:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{\sin x} - \cos x}{e^{\cos x} - e\ln(x+e)} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x \cdot e^{\sin x} + \sin x}{-\sin x \cdot e^{\cos x} - \frac{e}{x+e}} = \frac{1+0}{0-1} = -1.$$