ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO • 2007
Sessione suppletiva

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1

Rispetto a un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy) si consideri il punto $A(2; 0)$.

1. Si scriva l'equazione del luogo dei punti del piano che verificano la condizione:

$$\overline{PO}^2 + 2\overline{PA}^2 = 8,$$

controllando che si tratta di una circonferenza di cui si calcolino le coordinate del centro e il raggio.

2. Si determini l'ampiezza dell'angolo acuto formato dalla retta OB con la tangente alla circonferenza in B, essendo B il punto della curva avente la stessa ascissa di A e ordinata positiva.
3. Si scriva l'equazione della parabola cubica $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ che presenta, nell'origine, un flesso con tangente orizzontale e passa per B; si studi tale funzione e si tracci il suo grafico C.
4. Si calcoli l'area della regione finita di piano limitata dal segmento OB e dall'arco OB della suddetta parabola cubica.

PROBLEMA 2

Si consideri la funzione:

$$f(x) = e^{3x} + 2e^{2x} - 3e^x.$$

1. Si studi tale funzione e si tracci il suo grafico C, su un piano riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy).
2. Si determinino le coordinate del punto A, in cui la curva C incontra la curva C' rappresentativa dell'equazione $y = e^x$.
3. Si scrivano l'equazione della tangente alla curva C nell'origine e l'equazione della tangente alla curva C' nel punto A.
4. Si calcoli l'area della superficie piana, delimitata dalla curva C, dall'asse x e dalla retta di equazione $x = \ln 3$.

QUESTIONARIO

1 Si calcoli il limite della funzione $\dfrac{x^2 \cos x}{x^2 - \operatorname{sen}^2 x}$, quando x tende a 0.

2 Si determini il campo di esistenza della funzione $y = \operatorname{arcsen}(\operatorname{tg} x)$, con $0 \leq x \leq 2\pi$.

3 Si calcoli il valore medio della funzione $y = \operatorname{tg}^2 x$, nell'intervallo $0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{4}$.

4 Si provi che per la funzione $f(x) = x^3 - 8$ nell'intervallo $0 \leq x \leq 2$, sono verificate le condizioni di validità del teorema di Lagrange e si trovi il punto in cui si verifica la tesi del teorema stesso.

5 Fra tutti i triangoli isosceli inscritti in una circonferenza di raggio r, si determini quello per cui è massima la somma dell'altezza e del doppio della base.

6 Si consideri la seguente proposizione: «Il luogo dei punti dello spazio equidistanti da due punti distinti è una retta». Si dica se è vera o falsa e si motivi esaurientemente la risposta.

7 Sia data la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x} & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases}$$

Si dica se essa è continua e derivabile nel punto di ascissa 0.

8 Si determini l'area della regione piana limitata dalla curva di equazione $y = e^x$, dalla curva di equazione $y = x^3$ e dalle rette $x = 0$ e $x = 1$.

9 Si determinino le equazioni degli asintoti della curva $f(x) = \dfrac{2x^2 + 3}{x + 2}$.

10 Si risolva la disequazione $\dbinom{x}{3} > \dfrac{15}{2}\dbinom{x}{2}$.

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

SOLUZIONE DELLA PROVA D'ESAME
CORSO DI ORDINAMENTO • 2007
Sessione suppletiva

PROBLEMA 1

1. Sia $P(x;\ y)$ un generico punto del piano cartesiano Oxy. Utilizzando la formula della distanza tra due punti si ricava:

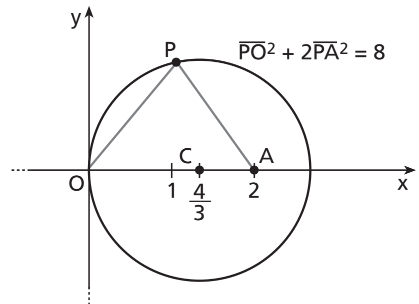
$$\overline{PO}^2 = x^2 + y^2,$$

$$\overline{PA}^2 = (x-2)^2 + y^2 = x^2 + y^2 - 4x + 4,$$

pertanto risulta:

$$\overline{PO}^2 + 2\overline{PA}^2 = 8 \rightarrow x^2 + y^2 + 2(x^2 + y^2 - 4x + 4) = 8 \rightarrow 3x^2 + 3y^2 - 8x = 0 \rightarrow x^2 + y^2 - \frac{8}{3}x = 0.$$

L'equazione è del tipo $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$. Essa rappresenta una circonferenza se $\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c > 0$. Nel nostro caso si ha $\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c = \frac{16}{9} > 0$. Pertanto il luogo trovato è una circonferenza, con centro $C\left(\frac{4}{3};\ 0\right)$ e raggio $r = \sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{4}{3}$ (figura 1).



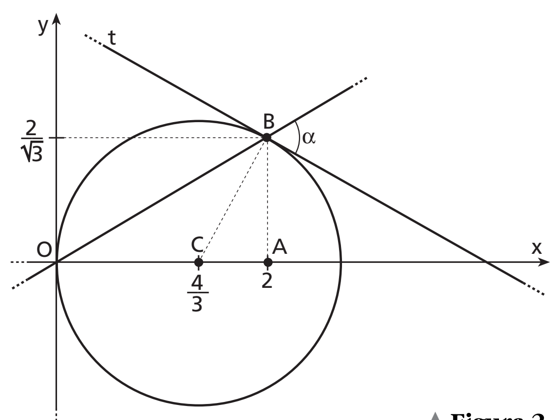
▶ **Figura 1.**

2. Per trovare l'ordinata di B, punto della circonferenza avente la stessa ascissa di A e ordinata positiva, sostituiamo nell'equazione della circonferenza il valore 2 a x. Otteniamo:

$$4 + y^2 - \frac{16}{3} = 0 \rightarrow y^2 = \frac{4}{3} \rightarrow y = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Poiché l'ordinata di B è positiva, il punto ha coordinate $\left(2;\ \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$. Tracciamo la retta t, tangente alla circonferenza nel punto B, e la retta OB (figura 2).

Per calcolare l'ampiezza dell'angolo α rappresentato in figura, determiniamo i coefficienti angolari delle rette OB e t. La retta OB ha coefficiente angolare $m_{OB} = \frac{y_B - y_O}{x_B - x_O} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}} - 0}{2 - 0} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.



▲ **Figura 2.**

Considerata la retta tangente t passante per il punto $B\left(2;\ \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$, il suo coefficiente angolare m_t è l'antireciproco del coefficiente angolare della retta passante per il raggio CB, ovvero:

$$m_{CB} = \frac{y_B - y_C}{x_B - x_C} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}} - 0}{2 - \frac{4}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{3}{2} = \sqrt{3},$$

pertanto $m_t = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

L'angolo acuto α, formato dalla retta OB con la tangente t, ha tangente goniometrica:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{m_{OB} - m_t}{1 + m_{OB} \cdot m_t} \quad \rightarrow \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\dfrac{1}{\sqrt{3}} - \left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)}{1 + \dfrac{1}{\sqrt{3}} \cdot \left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)} = \frac{\dfrac{2}{\sqrt{3}}}{1 - \dfrac{1}{3}} = \sqrt{3}.$$

Risulta allora che $\alpha = 60°$.

3. Affinché il grafico della funzione $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ passi per l'origine e qui presenti un flesso con tangente orizzontale, devono essere verificate le seguenti condizioni:

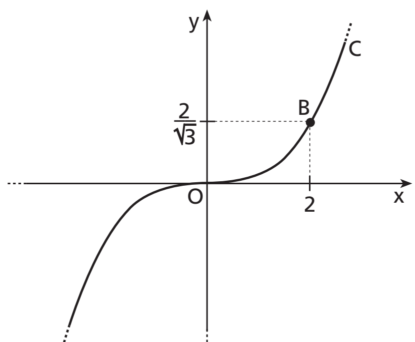
$$f(0) = 0, \qquad f'(0) = 0, \qquad f''(0) = 0.$$

Poiché $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ e $f''(x) = 6ax + 2b$, tali condizioni sono verificate rispettivamente se $d = 0$, $c = 0$, $b = 0$. L'equazione si riduce a $y = ax^3$.
Determiniamo il coefficiente a sostituendo le coordinate di $B\left(2; \dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)$:

$$\frac{2}{\sqrt{3}} = a \cdot 2^3 \quad \rightarrow \quad a = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{4\sqrt{3}}.$$

L'equazione della parabola cubica è quindi $y = \dfrac{1}{4\sqrt{3}} x^3$.

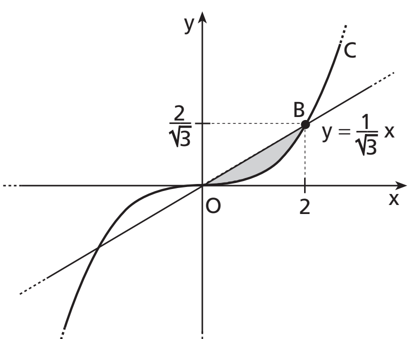
Essa è definita in tutto $\mathbb{R}$, interseca gli assi nell'origine che è anche l'unico punto di flesso. È positiva nell'intervallo $]0; +\infty[$, negativa in $]-\infty; 0[$ e sempre crescente. La concavità è rivolta verso l'alto in $]0; +\infty[$, verso il basso in $]-\infty; 0[$. Il suo grafico C è rappresentato in figura 3.



▲ **Figura 3.**

4. In figura 4 è indicata la regione finita di piano di cui si richiede di calcolare l'area.
La retta OB ha equazione $y = \dfrac{1}{\sqrt{3}} x$, pertanto:

$$\text{Area} = \int_0^2 \left(\frac{1}{\sqrt{3}} x - \frac{1}{4\sqrt{3}} x^3 \right) dx = \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{16} \right]_0^2 = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$



▲ **Figura 4.**

PROBLEMA 2

1. La funzione $f(x) = e^{3x} + 2e^{2x} - 3e^x$ ha campo di esistenza $\mathbb{R}$. Essa può essere scritta come $f(x) = e^x(e^{2x} + 2e^x - 3)$. Le sue intersezioni con gli assi cartesiani si trovano risolvendo i seguenti due sistemi:

$$\begin{cases} y = 0 \\ e^x(e^{2x} + 2e^x - 3) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ e^x = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} y = 0 \\ e^{2x} + 2e^x - 3 = 0 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \nexists x \in \mathbb{R} \end{cases} \vee \begin{cases} y = 0 \\ (e^x + 3)(e^x - 1) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ e^x = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases},$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ e^0(e^{2\cdot 0} + 2e^0 - 3) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}.$$

L'intersezione della funzione con gli assi è $O(0; 0)$.
Studiamo la positività:

$$e^x(e^x + 3)(e^x - 1) > 0 \quad \rightarrow \quad e^x > 1 \quad \rightarrow \quad x > 0,$$

pertanto la funzione è positiva per $x > 0$, è nulla in $x = 0$, è negativa per $x < 0$.
Determiniamo gli eventuali asintoti calcolando i limiti della funzione per $x \rightarrow +\infty$ e $x \rightarrow -\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty}(e^{3x} + 2e^{2x} - 3e^x) = \lim_{x\to+\infty} e^x(e^{2x} + 2e^x - 3) = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x(e^{2x} + 2e^x - 3)}{x} = +\infty,$$

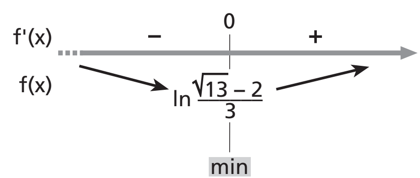
$$\lim_{x\to-\infty} e^x(e^{2x} + 2e^x - 3) = 0.$$

Si deduce che la funzione non ha asintoti obliqui ma ha asintoto orizzontale $y = 0$ nell'intorno di $-\infty$.
Calcoliamo la derivata prima e studiamo il suo segno:

$$f'(x) = 3e^{3x} + 4e^{2x} - 3e^x = e^x(3e^{2x} + 4e^x - 3) = 3e^x\left(e^x + \frac{\sqrt{13}+2}{3}\right)\left(e^x - \frac{\sqrt{13}-2}{3}\right),$$

$$f'(x) > 0 \quad \rightarrow \quad e^x > \frac{\sqrt{13}-2}{3} \quad \rightarrow \quad x > \ln\frac{\sqrt{13}-2}{3}.$$

La relativa tabella del segno è riportata in figura 5.



▲ **Figura 5.**

La funzione ammette un minimo per $x = \ln\frac{\sqrt{13}-2}{3}$, la cui immagine vale:

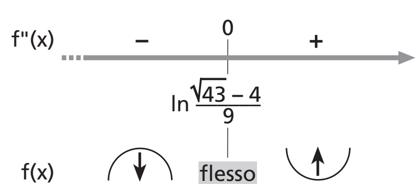
$$f\left(\ln\frac{\sqrt{13}-2}{3}\right) = \left(\frac{\sqrt{13}-2}{3}\right)^3 + 2\left(\frac{\sqrt{13}-2}{3}\right)^2 - 3\cdot\frac{\sqrt{13}-2}{3} = \frac{70 - 26\sqrt{13}}{27}.$$

Studiamo infine la derivata seconda e il suo segno:

$$f''(x) = 9e^{3x} + 8e^{2x} - 3e^x = e^x(9e^{2x} + 8e^x - 3) = 9e^x\left(e^x + \frac{4+\sqrt{43}}{9}\right)\left(e^x - \frac{\sqrt{43}-4}{9}\right),$$

$$f''(x) > 0 \quad \rightarrow \quad e^x - \frac{\sqrt{43}-4}{9} > 0 \quad \rightarrow \quad x > \ln\frac{\sqrt{43}-4}{9}.$$

La derivata seconda si annulla per $x = \ln\frac{\sqrt{43}-4}{9}$, è positiva per $x > \ln\frac{\sqrt{43}-4}{9}$, è negativa per $x < \ln\frac{\sqrt{43}-4}{9}$ (figura 6).
Pertanto la funzione presenta concavità rivolta verso l'alto per $x > \ln\frac{\sqrt{43}-4}{9}$, rivolta verso il basso per $x < \ln\frac{\sqrt{43}-4}{9}$ e un flesso per $x = \ln\frac{\sqrt{43}-4}{9}$, dove $f\left(\ln\frac{\sqrt{43}-4}{9}\right) = \frac{1454 - 296\sqrt{43}}{729}$.



▲ **Figura 6.**

Indicato con M il punto di minimo e con F il punto di flesso rappresentiamo in figura 7 il grafico C della funzione.

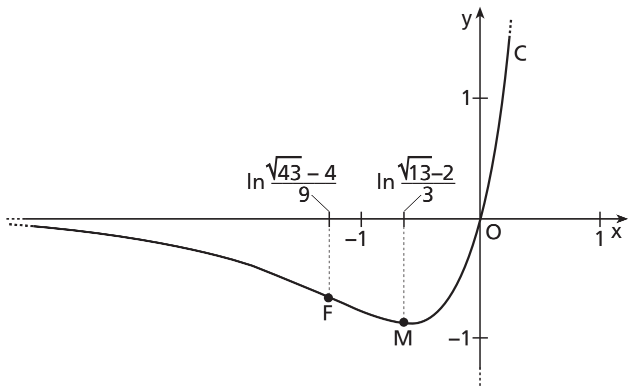


Figura 7.

2. Rappresentiamo in figura 8 la curva C e la curva C' di equazione $y = e^x$.

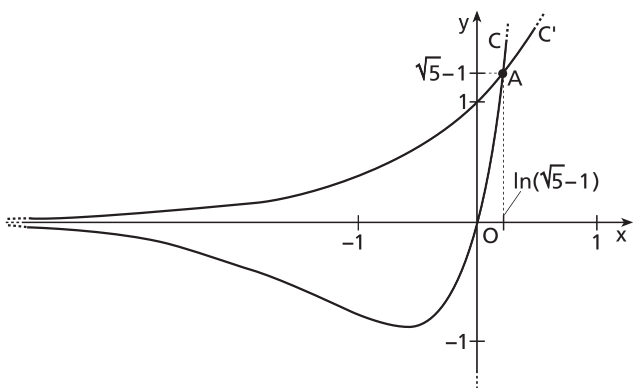


Figura 8.

Calcoliamo le coordinate del punto A risolvendo il seguente sistema:

$$\begin{cases} y = e^{3x} + 2e^{2x} - 3e^x \\ y = e^x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} e^x = e^{3x} + 2e^{2x} - 3e^x \\ y = e^x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} e^x(e^x + 1 + \sqrt{5})(e^x + 1 - \sqrt{5}) = 0 \\ y = e^x \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} e^x = \sqrt{5} - 1 \\ y = e^x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \ln(\sqrt{5} - 1) \\ y = \sqrt{5} - 1 \end{cases}.$$

Il punto A ha coordinate $A(\ln(\sqrt{5} - 1); \sqrt{5} - 1)$.

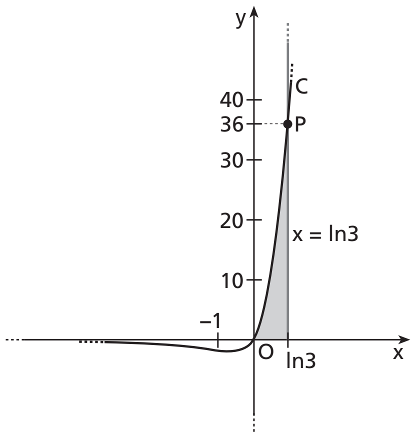
3. La tangente alla curva C di equazione $y = e^{3x} + 2e^{2x} - 3e^x$ nell'origine $O(0; 0)$ ha equazione $y = mx$ con $m = y'(0) = 4$, per cui la tangente ha equazione $y = 4x$.
La tangente alla curva C' di equazione $y = e^x$ in A ha equazione:

$$y = m[x - \ln(\sqrt{5} - 1)] + \sqrt{5} - 1 \text{ con } m = y'(\ln(\sqrt{5} - 1)) = \sqrt{5} - 1.$$

Pertanto la tangente in A alla curva C' ha equazione:

$$y = (\sqrt{5} - 1)[x - \ln(\sqrt{5} - 1)] + \sqrt{5} - 1 \quad \rightarrow \quad y = (\sqrt{5} - 1)x + (\sqrt{5} - 1)[1 - \ln(\sqrt{5} - 1)].$$

4. Nella figura 9 è rappresentata la superficie piana, delimitata dalla curva C, dall'asse x e dalla retta di equazione $x=\ln 3$. Il punto P di ascissa $x=\ln 3$ ha ordinata 36. Si osservi che per motivi di migliore rappresentazione il sistema cartesiano è dimetrico.



◀ **Figura 9.**

Calcoliamo l'area della superficie indicata:

$$\text{Area} = \int_0^{\ln 3} (e^{3x} + 2e^{2x} - 3e^x)\, dx = \left[\frac{e^{3x}}{3} + e^{2x} - 3e^x\right]_0^{\ln 3} = 9 + 9 - 9 - \frac{1}{3} - 1 + 3 = \frac{32}{3}.$$

QUESTIONARIO

1 Il limite $\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \cos x}{x^2 - \operatorname{sen}^2 x}$ si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Raccogliamo x^2 sia al numeratore che al denominatore e semplifichiamo:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \cos x}{x^2 - \operatorname{sen}^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \cos x}{x^2\left(1 - \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1 - \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2} =$$

Applicando il limite notevole $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ si ottiene:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1 - \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2} = \infty$$

Per stabilire il segno di ∞ osserviamo che sia nell'intorno destro sia nell'intorno sinistro di $x=0$ risulta $0 < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < 1$. Pertanto in un intorno completo di 0 vale $\frac{\operatorname{sen} x}{x} < 1$. In particolare risulta allora:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1 - \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2} = +\infty$$

2 La funzione $y=\text{arcsen}(\text{tg}\,x)$, con $0\leq x\leq 2\pi$, è definita quando il suo argomento, in questo caso $(\text{tg}\,x)$ è compreso tra -1 e 1 ovvero $|\text{tg}\,x|\leq 1$. È quindi necessario risolvere la disequazione $|\text{tg}\,x|\leq 1$ nell'insieme $0\leq x\leq 2\pi$. Risulta:

$$|\text{tg}\,x|\leq 1 \quad\to\quad -1\leq \text{tg}\,x\leq 1 \quad\to\quad 0\leq x\leq \frac{\pi}{4} \vee \frac{3}{4}\pi\leq x\leq \frac{5}{4}\pi \vee \frac{7}{4}\pi\leq x\leq 2\pi.$$

3 Per il teorema della media, se $f(x)$ è una funzione continua nell'intervallo $[a;\,b]$, esiste almeno un punto $c\in[a;\,b]$ tale che $f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$. Il valore $f(c)$ si chiama valore medio della funzione nell'intervallo considerato. Se $f(x)=\text{tg}^2\,x$, nell'intervallo $\left[0;\,\frac{\pi}{4}\right]$ risulta:

$$f(c)=\frac{1}{\frac{\pi}{4}-0}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\text{tg}^2\,x dx=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\text{sen}\,x}{\cos x}\right)^2 dx=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\,dx=$$

$$=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx=\frac{4}{\pi}[\text{tg}\,x-x]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{4}{\pi}\left[1-\frac{\pi}{4}\right]=\frac{4}{\pi}-1.$$

4 Una funzione $y=f(x)$ soddisfa le ipotesi del teorema di Lagrange in un intervallo $[a;\,b]$ se è continua in $[a;\,b]$ ed è derivabile nei punti interni dell'intervallo. In tal caso esiste un punto c nell'intervallo $]a;\,b[$ tale che $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Se consideriamo $f(x)=x^3-8$ con $0\leq x\leq 2$, le due ipotesi sono verificate in quanto la funzione, essendo polinomiale, è continua e derivabile in $\mathbb{R}$.
Vale allora il teorema di Lagrange e, poiché $f'(x)=3x^2$, risulta:

$$3c^2=\frac{(2^3-8)-(0^3-8)}{2-0} \quad\to\quad 3c^2=4 \quad\to$$

$$\to\quad c=\pm\frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ di cui solo } c=\frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ accettabile perché interno all'intervallo } [0;\,2].$$

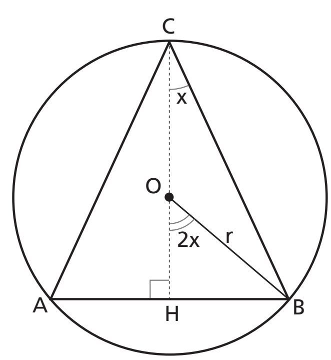
In conclusione, il punto in cui si verifica la tesi del teorema di Lagrange è $x=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

5 Consideriamo un triangolo isoscele ABC di base AB e altezza CH rispetto alla base, inscritto in una circonferenza di raggio r e centro O (figura 10).

Sia x l'angolo $H\hat{C}B$, con limiti geometrici $0<x<\frac{\pi}{2}$. Considerata la funzione $y=\overline{CH}+2\overline{AB}$, esprimiamo i suoi termini in funzione di x:

$$\overline{CH}=\overline{CO}+\overline{OH}=r+r\cos 2x,$$

$$\overline{AB}=2\overline{HB}=2r\,\text{sen}\,2x.$$



▲ **Figura 10.**

Pertanto risulta:

$$y = CH + 2AB \quad \rightarrow \quad y = r + r\cos 2x + 4r\,\mathrm{sen}\,2x, \quad \text{con} \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

Calcoliamo la derivata prima della funzione:

$$y' = -2r\,\mathrm{sen}\,2x + 8r\cos 2x = 2r(-\,\mathrm{sen}\,2x + 4\cos 2x).$$

Studiamo i punti stazionari della funzione:

$y' = 0 \quad \rightarrow \quad 2r(-\,\mathrm{sen}\,2x + 4\cos 2x) = 0$; dividendo per $\cos 2x$ $\left(\text{che in } \left]0; \frac{\pi}{2}\right[\text{ si annulla per } x = \frac{\pi}{4}\right.$ che non è soluzione$\Big)$, si ottiene $\mathrm{tg}\,2x = 4$ e quindi:

$$x = \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,4.$$

Determiniamo la derivata seconda e calcoliamola nel punto stazionario trovato:

$$y'' = 4r(-\cos 2x - 4\,\mathrm{sen}\,2x),$$

$$y''(\mathrm{arctg}\,4) = 4r[-\cos(\mathrm{arctg}\,4) - 4\,\mathrm{sen}(\mathrm{arctg}\,4)] < 0.$$

Per la condizione sufficiente di esistenza di un massimo, la funzione ha massimo per l'angolo

$$x = \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,4 \simeq 38°.$$

6 Considerati due punti A e B nello spazio, si tracci il piano perpendicolare al segmento AB e passante per il suo punto medio M (figura 11).

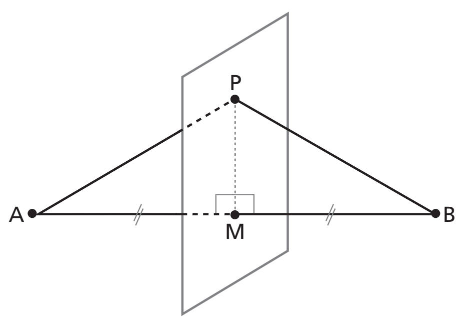


Figura 11.

Preso sul piano un qualsiasi punto P, i triangoli rettangoli AMP e BPM sono congruenti per il primo criterio di congruenza e, in particolare, $AP \cong BP$. Pertanto, nello spazio, il luogo dei punti equidistanti da due punti A e B dati non è una retta ma il piano perpendicolare al segmento che congiunge i punti dati e che passa per il corrispondente punto medio M. La proposizione data è quindi falsa.

7 Considerata la funzione, valutiamo la continuità nel punto $x = 0$ calcolando il limite destro e il limite sinistro in questo punto:

$$\lim_{x \to 0^+} x\,\mathrm{arctg}\frac{1}{x} = 0 \cdot \frac{\pi}{2} = 0, \qquad \lim_{x \to 0^-} x\,\mathrm{arctg}\frac{1}{x} = 0 \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Poiché $f(0) = 0$ e il limite destro e sinistro coincidono con l'immagine della funzione nel punto, la funzione è continua in $x = 0$.

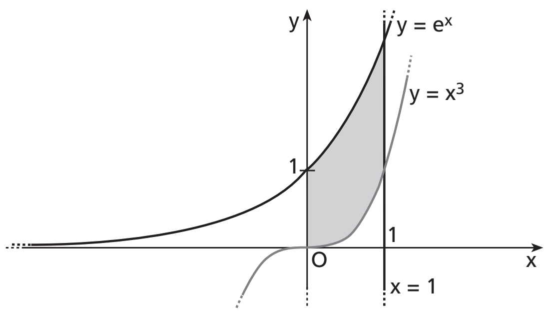
Valutiamo ora la derivabilità nel punto $x=0$ confrontando il limite destro e il limite sinistro della derivata prima, dopo averla calcolata:

$$f'(x)=\operatorname{arctg}\frac{1}{x}+x\frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}=\operatorname{arctg}\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1},$$

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}\right)=\frac{\pi}{2},\qquad \lim_{x\to 0^-}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}\right)=-\frac{\pi}{2}.$$

Essendo i due limiti diversi, la funzione non è derivabile nel punto $x=0$.

8 In figura 12 sono rappresentati i grafici delle funzioni $y=e^x$ e $y=x^3$, ed è evidenziata la regione piana limitata dalle loro curve e dalle rette $x=0$ e $x=1$.



◀ **Figura 12.**

L'area della regione vale:

$$A=\int_0^1 (e^x-x^3)\,dx=\left[e^x-\frac{x^4}{4}\right]_0^1=e-\frac{1}{4}-1=e-\frac{5}{4}.$$

9 La funzione $f(x)=\dfrac{2x^2+3}{x+2}$ ha campo di esistenza $\mathbb{R}-\{-2\}$ e il suo limite per x che tende a -2 risulta:

$$\lim_{x\to -2^+}\frac{2x^2+3}{x+2}=+\infty,\qquad \lim_{x\to -2^-}\frac{2x^2+3}{x+2}=-\infty.$$

La funzione ha pertanto asintoto verticale destro e sinistro $x=-2$.
Determiniamo eventuali asintoti orizzontali o obliqui $y=mx+q$ considerando i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2+3}{x+2}=\pm\infty,$$ quindi non esistono asintoti orizzontali;

$$m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{2x^2+3}{x+2}}{x}=2,$$

$$q=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2x^2+3}{x+2}-2x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-4x+3}{x+2}=-4.$$

La funzione ha asintoto obliquo di equazione $y=2x-4$.
Gli asintoti della funzione sono pertanto $x=-2$ e $y=2x-4$.

10 La disequazione assume significato solo se x è un numero naturale tale che:

$$\begin{cases} x \geq 3 \\ x \geq 2 \end{cases} \quad \rightarrow \quad x \geq 3,\ x \in \mathbb{N}.$$

Risolviamo la disequazione esplicitando i coefficienti binomiali:

$$\binom{x}{3} > \frac{15}{2}\binom{x}{2} \quad \rightarrow \quad \frac{x!}{3!(x-3)!} > \frac{15}{2} \cdot \frac{x!}{2!(x-2)!} \quad \rightarrow \quad \frac{x(x-1)(x-2)}{6} > \frac{15}{2} \cdot \frac{x(x-1)}{2} \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad 2x(x-1)(x-2) > 45x(x-1).$$

Essendo $x \geq 3$, possiamo dividere entrambi membri per $x(x-1)$, essendo, questa, una quantità positiva:

$$2x - 4 > 45 \quad \rightarrow \quad x > \frac{49}{2}.$$

Quindi la disequazione di partenza ammette come soluzioni accettabili solo i numeri naturali maggiori o uguali a 25 ovvero:

$$x \geq 25, \quad x \in \mathbb{N}.$$

Per esercitarti ancora sugli argomenti trattati nel	Svolgi il
Problema 1	• Problema 53 pag. L 368 • Esercizio 226 pag. O 123 • Quesito 9 pag. W 167 • Esercizio 43 pag. V 241 • Esercizio 219 pag. W 118
Problema 2	• Esercizio 107 pag. V 250 • Esercizio 503 pag. V 78 • Esercizio 505 pag. V 78 • Esercizio 464 pag. V 75 (2° parte) • Esercizio 19 pag. W 138 (punti a e b)
Quesito 1	• Esercizio 236 pag. U 172 • Esercizio 245 pag. U 173
Quesito 2	• Esercizio 70 pag. U 25 • Esercizio 88 pag. U 26
Quesito 3	• Esercizio 176 pag. W 114 • Esercizio 177 pag. W 114
Quesito 4	• Esercizio 39 pag. V 117 • Esercizio 51 pag. V 118
Quesito 5	• Esercizio 266 pag. V 202 • Esercizio 267 pag. V 202
Quesito 6	• Esercizio 14 pag. π 71 • Esercizio 18 pag. π 71
Quesito 7	• Esercizio 84 pag. V 50 • Problema 13 pag. V 91 (punti a e b)
Quesito 8	• Esercizio 219 pag. W 118 • Esercizio 221 pag. W 118
Quesito 9	• Esercizio 568 pag. U 193
Quesito 10	• Esercizio 131 pag. α 35 • Esercizio 163 pag. α 37