CORSO DI ORDINAMENTO
Sessione Straordinaria 2007 (mercoledì 12 settembre 2007)

PROBLEMA 1

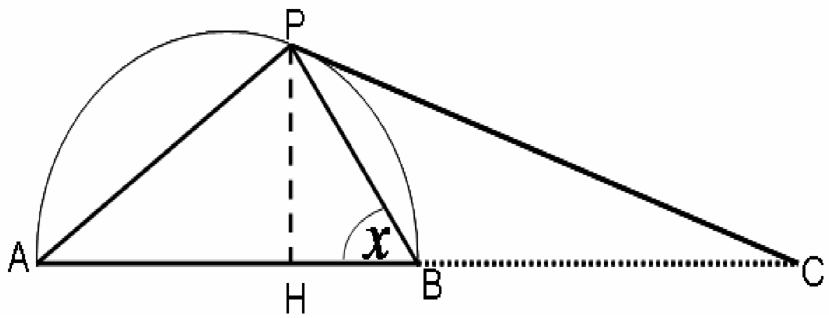
Data una semicirconferenza di diametro AB=2r, si prenda sul prolungamento di AB, dalla parte di B, un punto C tale che sia BC=AB.
Essendo P un punto della semicirconferenza:

1. Si esprima per mezzo di r e dell'ampiezza dell'angolo $x = A\hat{B}P$ il rapporto $y = \frac{CP^2}{AP.PB}$
2. Si studi nell'intervallo [0, 2π] la funzione y=f(x) espressa per mezzo di tgx.
3. Si calcoli in gradi e primi (sessagesimali) il valore di x, nell'intervallo 0<x<π/2 , per cui il rapporto y assume valore minimo.
4. Si calcoli l'area della regione finita di piano delimitata dalla curva rappresentativa della funzione y = f(x) , dall'asse delle ascisse e dalle rette di equazione x=π/4 e x=π/3

Soluzione

1)

Si consideri la figura sottostante, che rappresenta la questione geometrica:



Il triangolo APB, essendo inscritto in una semicirconferenza è rettangolo, per cui $AP = 2r\sin(x), PB = 2r\cos(x)$.

Ora $CP^2 = PH^2 + HC^2$ con $HC = HB + BC = PB\cos(x) + 2r = 2r\left(1+\cos^2(x)\right)$ e $PH = PB\sin(x) = 2r\sin(x)\cos(x)$.

Il rapporto richiesto è

$$y = \frac{CP^2}{AP * PB} = \frac{4r^2\sin^2(x)\cos^2(x) + 4r^2\left(1+\cos^2(x)\right)^2}{4r^2\sin(x)\cos(x)} =$$

$$= \frac{4r^2\left[\sin^2(x)\cos^2(x) + 1 + \cos^4(x) + 2\cos^2(x)\right]}{4r^2\sin(x)\cos(x)} = \frac{\cos^2(x)\left(\cos^2(x)+\sin^2(x)\right) + 1 + 2\cos^2(x)}{\sin(x)\cos(x)} =$$

$$= \frac{1+3\cos^2(x)}{\sin(x)\cos(x)}$$

Ora ricordiamo che $\sin(x)\cos(x)=\frac{\tan(x)}{1+\tan^2(x)}, \cos^2(x)=\frac{1}{1+\tan^2(x)}$, per cui il rapporto può essere così scritto:

$$y=\frac{1+3\cos^2(x)}{\sin(x)\cos(x)}=\frac{1+\frac{3}{1+\tan^2(x)}}{\frac{\tan(x)}{1+\tan^2(x)}}=\frac{\tan^2(x)+4}{\tan(x)}=\tan(x)+\frac{4}{\tan(x)}=\tan(x)+4\cot\tan(x)$$

con la restrizione geometrica $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Si nota come il rapporto richiesto sia indipendente dal raggio ma solo funzione dell'angolo.

2)

Studiamo la funzione $y=\frac{\tan^2(x)+4}{\tan(x)}$ nell'intervallo $[0,2\pi]$:

- Dominio: $\begin{cases}\tan(x)\neq 0\\ x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq k\pi\\ x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\end{cases}\Leftrightarrow x\neq k\frac{\pi}{2}, k\in Z$ e particolareggiando all'intervallo di studio $[0,2\pi]$ il dominio sarà: $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)\cup\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$.
- Intersezioni con gli assi: non ci sono intersezioni con gli assi;
- Eventuali simmetrie: $f(-x)=\frac{\tan^2(-x)+4}{\tan(-x)}=\frac{\tan^2(x)+4}{-\tan(x)}=-\frac{\tan^2(x)+4}{\tan(x)}=-f(x)$ per cui la funzione è dispari;
- Positività: $y=\frac{\tan^2(x)+4}{\tan(x)}>0\Leftrightarrow\begin{cases}\tan(x)>0\\ x\neq k\frac{\pi}{2}, k=0,1,2,3,4\end{cases}\Leftrightarrow x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$;
- Asintoti verticali:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\tan^2(x)+4}{\tan(x)}=\frac{4}{0^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to \pi^+}\frac{\tan^2(x)+4}{\tan(x)}=\frac{4}{0^+}=+\infty, \lim_{x\to \pi^-}\frac{\tan^2(x)+4}{\tan(x)}=\frac{4}{0^-}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 2\pi^-}\frac{\tan^2(x)+4}{\tan(x)}=\frac{4}{0^-}=-\infty$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{\tan^2(x)+4}{\tan(x)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\left[\tan(x)+4\cot\tan(x)\right]=-\infty,$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\tan^2(x)+4}{\tan(x)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\left[\tan(x)+4\cot\tan(x)\right]=+\infty$$

$$\lim_{x\to\frac{3\pi}{2}^+}\frac{\tan^2(x)+4}{\tan(x)} = \lim_{x\to\frac{3\pi}{2}^+}\left[\tan(x)+4\cot\tan(x)\right]=-\infty,$$

$$\lim_{x\to\frac{3\pi}{2}^-}\frac{\tan^2(x)+4}{\tan(x)} = \lim_{x\to\frac{3\pi}{2}^-}\left[\tan(x)+4\cot\tan(x)\right]=+\infty$$

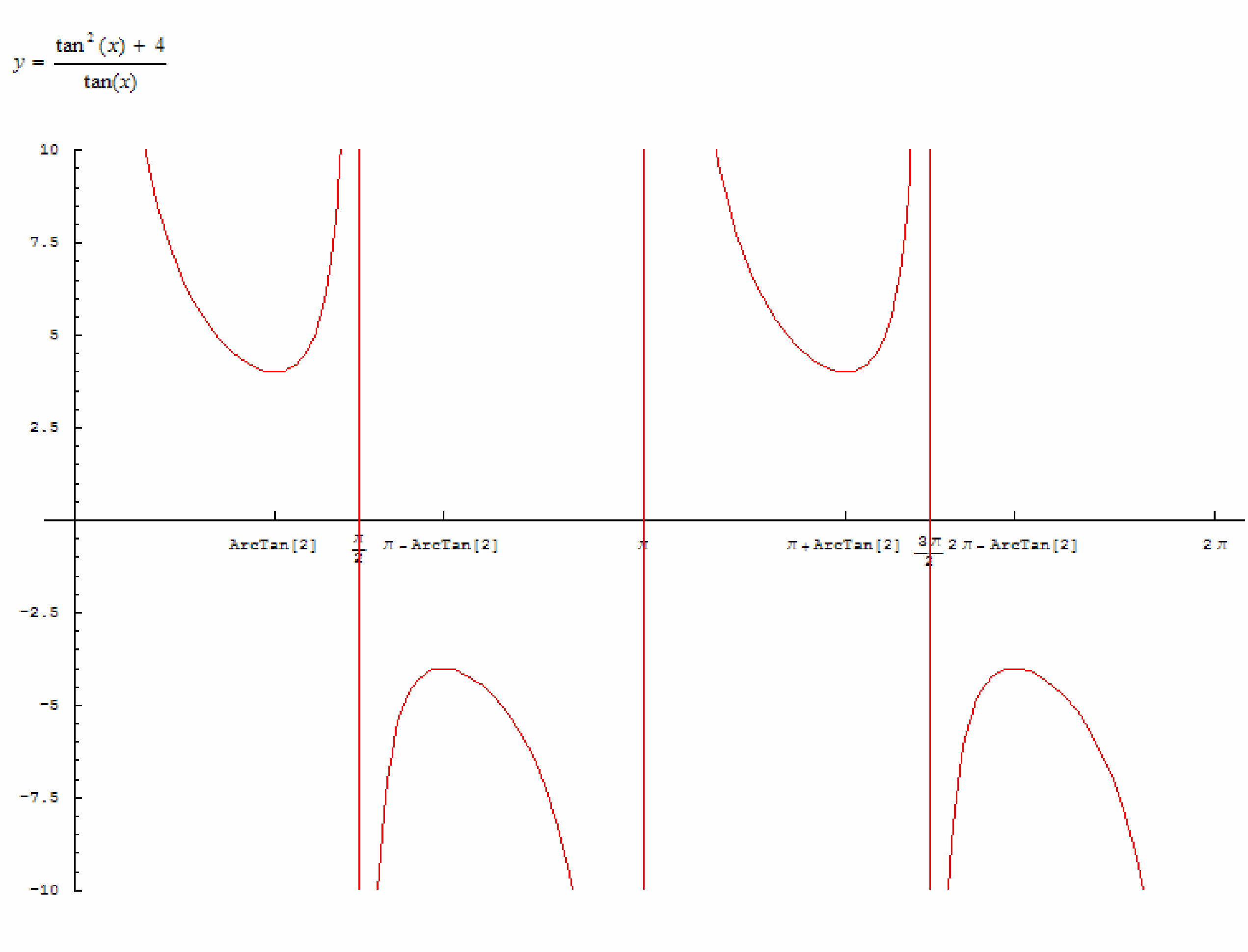
Quindi le rette di equazione $x=0, x=\frac{\pi}{2}, x=\pi, x=\frac{3\pi}{2}, x=2\pi$ sono asintoti verticali;

- Asintoti orizzontali ed obliqui: non ce ne sono;
- Crescenza e decrescenza: $y'(x)=\frac{1}{\cos^2(x)}-\frac{4}{\sin^2(x)}=\frac{\sin^2(x)-4\cos^2(x)}{\sin^2(x)\cos^2(x)}=\frac{\tan^2(x)-4}{\sin^2(x)}$ per cui nel dominio di definizione $y'(x)=\frac{\tan^2(x)-4}{\sin^2(x)}>0 \Rightarrow \tan^2(x)-4>0 \Rightarrow \tan(x)>2 \cup \tan(x)<-2$ le cui soluzioni nell'intervallo $[0,2\pi]$ sono: $\arctan(2)<x<\frac{\pi}{2}\cup\frac{\pi}{2}<x<(\pi-\arctan(2))\cup(\pi+\arctan(2))<x<\frac{3\pi}{2}\cup\frac{3\pi}{2}<x<2\pi-\arctan(2)$

Quindi la funzione presenta i massimi nei punti $(\pi-\arctan(2),-4),(2\pi-\arctan(2),-4)$ ed i minimi nei punti $(\arctan(2),4),(\pi+\arctan(2),4)$;

La derivata seconda è $y''(x)=\frac{2\sin(x)}{\cos^3(x)}+\frac{8\cos(x)}{\sin^3(x)}=\frac{2\sin^4(x)+8\cos^4(x)}{\sin^3(x)\cos^3(x)}$ per cui essa non si annulla mai, cioè la funzione non presenta flessi.

Il grafico è sotto presentato:



3)

Dalla figura soprastante emerge che il rapporto $y = \frac{\tan^2(x) + 4}{\tan(x)}$ nell'intervallo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ assume valore minimo per $x = \arctan(2) \cong 63.4349° = 63°26'$.

4)

L'area richiesta è rappresentata nella figura sottostante con **A**:

Tale area è pari a:

$$A=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\left[\tan(x)+4\cot\tan(x)\right]dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\left[\frac{\sin(x)}{\cos(x)}+4\frac{\cos(x)}{\sin(x)}\right]dx=$$

$$=\left[-\ln\left|\cos(x)\right|+4\ln\left|\sin(x)\right|\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}=\left[\ln\left(\frac{\sin^4(x)}{\left|\cos(x)\right|}\right)\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}=$$

$$=\ln\left(\frac{9}{8}\right)-\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)=\ln\left(\frac{9\sqrt{2}}{4}\right)$$

PROBLEMA 2

Si consideri la funzione $f(x)=\log\sqrt{x^2-4}$

1. Si studi tale funzione e si tracci il suo grafico C su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy.
2. Si scrivano le equazioni delle tangenti a C nei punti in cui essa incontra l'asse x e si calcoli l'area del triangolo formato dalle suddette tangenti e dall'asse x medesimo.
3. Si studi la funzione derivata f '(x) e se ne tracci il grafico C '.
4. Si calcoli l'area della superficie piana, delimitata dalla curva C ', dall'asse x e dalla retta di equazione $x=-\sqrt{3}$

Soluzione

1)

Studiamo la funzione $y=\ln\left(\sqrt{x^2-4}\right)$.

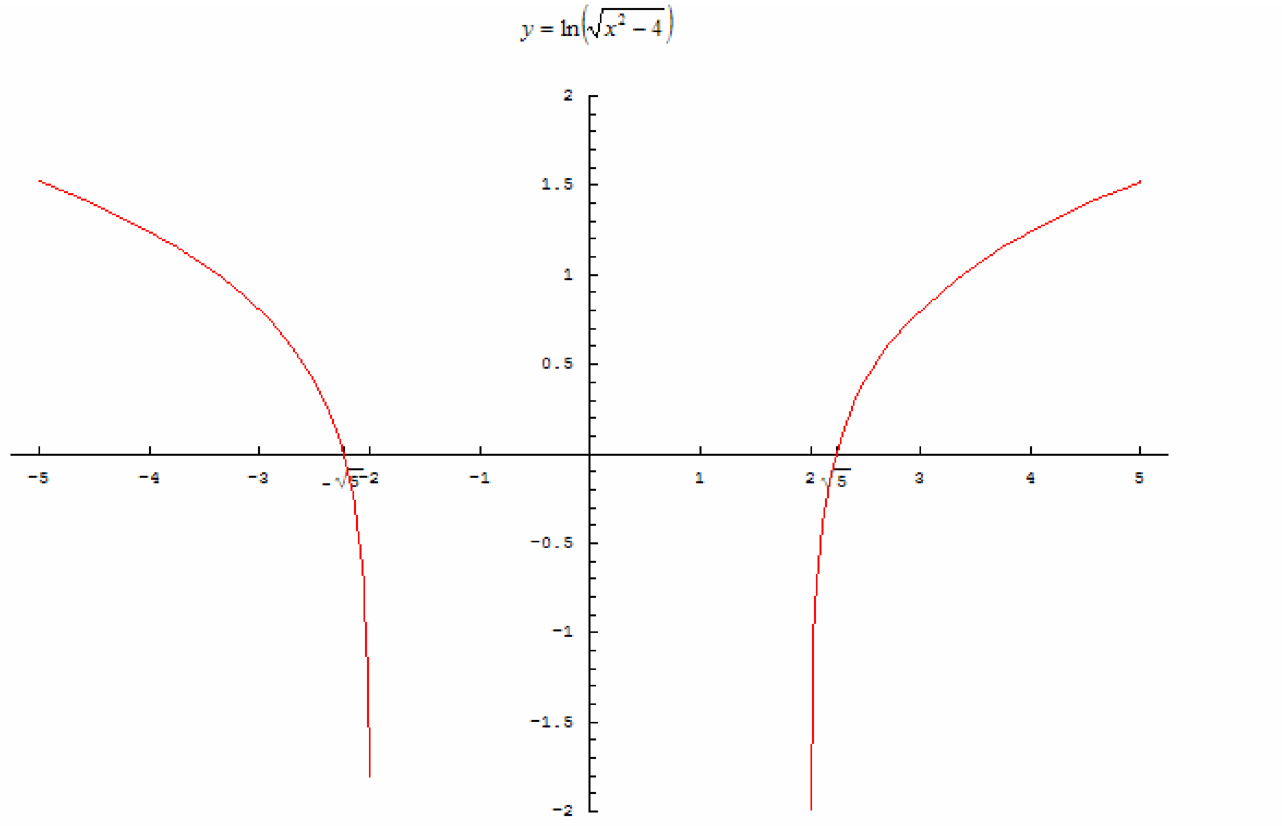
- Dominio: $\begin{cases}\sqrt{x^2-4}>0\\ x^2-4\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow x^2-4>0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$;
- Intersezione asse delle ascisse: $y=\ln\left(\sqrt{x^2-4}\right)=0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-4}=1 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{5}$;
- Intersezione asse delle ordinate: non esistono visto il dominio di definizione;
- Eventuali simmetrie: la funzione è pari visto che $y(-x)=\ln\left(\sqrt{(-x)^2-4}\right)=\ln\left(\sqrt{x^2-4}\right)=f(x)$;
- Positività:

$$y=\ln\left(\sqrt{x^2-4}\right)>0 \Leftrightarrow \begin{cases}x<-2\cup x>2\\ \sqrt{x^2-4}>1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x<-2\cup x>2\\ x<-\sqrt{5}\cup x>\sqrt{5}\end{cases} \Leftrightarrow x<-\sqrt{5}\cup x>\sqrt{5}$$

- Asintoti verticali: $\lim_{x\to 2^+}\ln\left(\sqrt{x^2-4}\right)=\lim_{x\to -2^-}\ln\left(\sqrt{x^2-4}\right)=\ln(0^+)=-\infty$ per cui le rette $x=\pm 2$ sono asintoti verticali;
- Asintoti orizzontali: non ce ne sono; infatti $\lim_{x\to\pm\infty}\ln\left(\sqrt{x^2-4}\right)=+\infty$;
- Asintoti obliqui: non ce ne sono; infatti, se esistessero avrebbero equazione $y=mx+q$, ma nel nostro caso $m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\ln\left(\sqrt{x^2-4}\right)}{x}\overset{H}{=}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x^2-4}=0, q=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\ln\left(\sqrt{x^2-4}\right)\right]=+\infty$;
- Crescenza e decrescenza: la funzione $y=\ln\left(\sqrt{x^2-4}\right)$ nel dominio di definizione può essere scritta come $y=\frac{1}{2}\ln\left(x^2-4\right)$ la cui derivata è $y'(x)=\frac{x}{x^2-4}$, per cui nel dominio di definizione $x\in(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$ la funzione risulta essere sempre crescente; la derivata

seconda è pari a $y''(x)=\frac{x^2-4-2x^2}{\left(x^2-4\right)^2}=\frac{-4-x^2}{\left(x^2-4\right)^2}$ ed essa non si annulla mai, per cui non ci sono flessi.

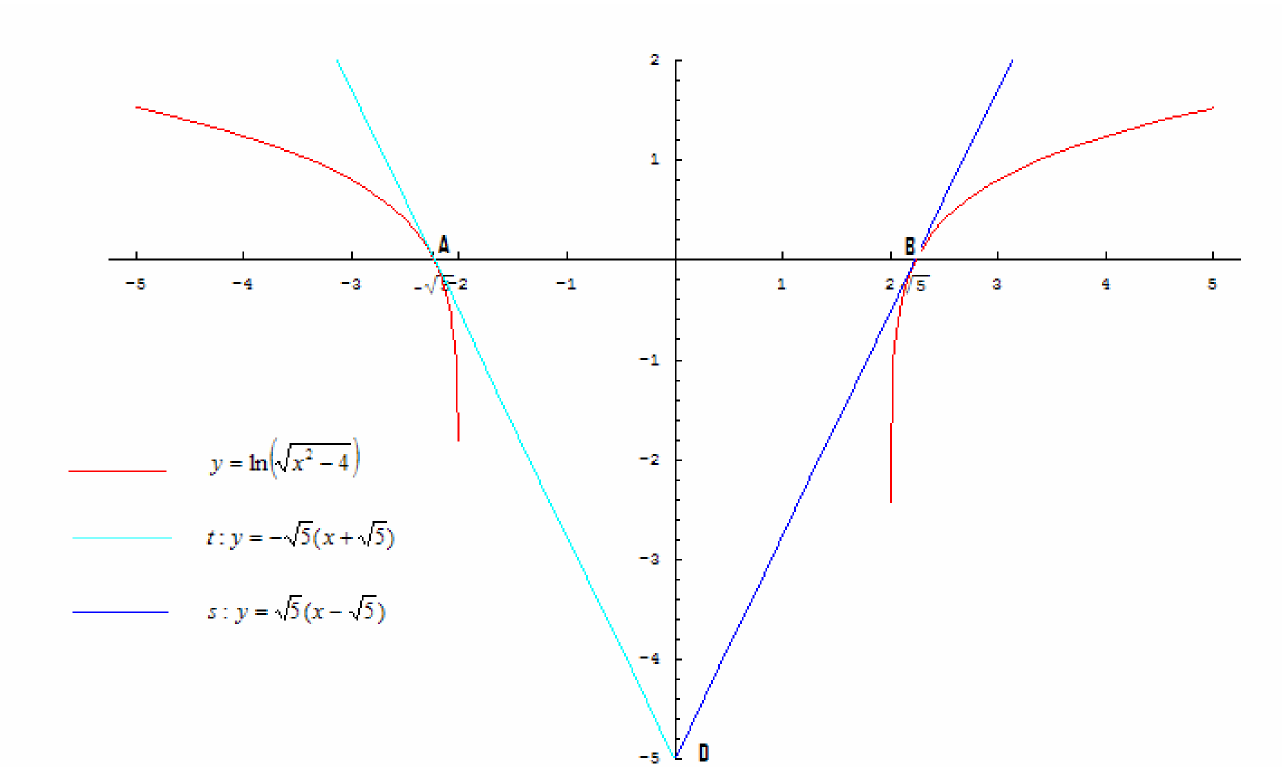
Il grafico è sotto presentato:



2)

Dobbiamo calcolare le tangenti nei punti $B=\left(\sqrt{5},0\right), A=\left(-\sqrt{5},0\right)$.

Le due tangenti avranno equazioni $s: y=f'(\sqrt{5})(x-\sqrt{5})$ e $t: y=f'(-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})$ con $f'\left(\sqrt{5}\right)=\left[\frac{x}{x^2-4}\right]_{x=\sqrt{5}}=\sqrt{5}$, $f'\left(-\sqrt{5}\right)=\left[\frac{x}{x^2-4}\right]_{x=-\sqrt{5}}=-\sqrt{5}$ per cui le tangenti saranno $s: y=\sqrt{5}(x-\sqrt{5})$ e $t: y=-\sqrt{5}(x+\sqrt{5})$ come sotto rappresentato:



Le due tangenti di equazione $s: y = \sqrt{5}(x-\sqrt{5})$ e $t: y = -\sqrt{5}(x+\sqrt{5})$ si intersecano nel punto $D = (0,-5)$ per cui l'area del triangolo ABD sarà: $A_{ABD} = \frac{2\sqrt{5}*5}{2} = 5\sqrt{5}$.

3)

La derivata prima è $y'(x) = g(x) = \frac{x}{x^2-4}$, per cui studiamo la funzione derivata prima.

- Dominio: $x^2-4 \neq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty,-2) \cup (-2,2) \cup (2,+\infty)$;
- Intersezione asse delle ascisse: $g(x) = \frac{x}{x^2-4} = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
- Intersezione asse delle ordinate: $x = 0 \Rightarrow y = 0$;
- Eventuali simmetrie: la funzione è dispari, infatti $g(-x) = \frac{(-x)}{(-x)^2-4} = -\frac{x}{x^2-4} = -g(x)$;
- Positività: $g(x) = \frac{x}{x^2-4} > 0 \Leftrightarrow x \in (-2,0) \cup (2,+\infty)$;
- Asintoti verticali:

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x}{x^2-4} = +\infty, \lim_{x\to 2^-} \frac{x}{x^2-4} = -\infty$$

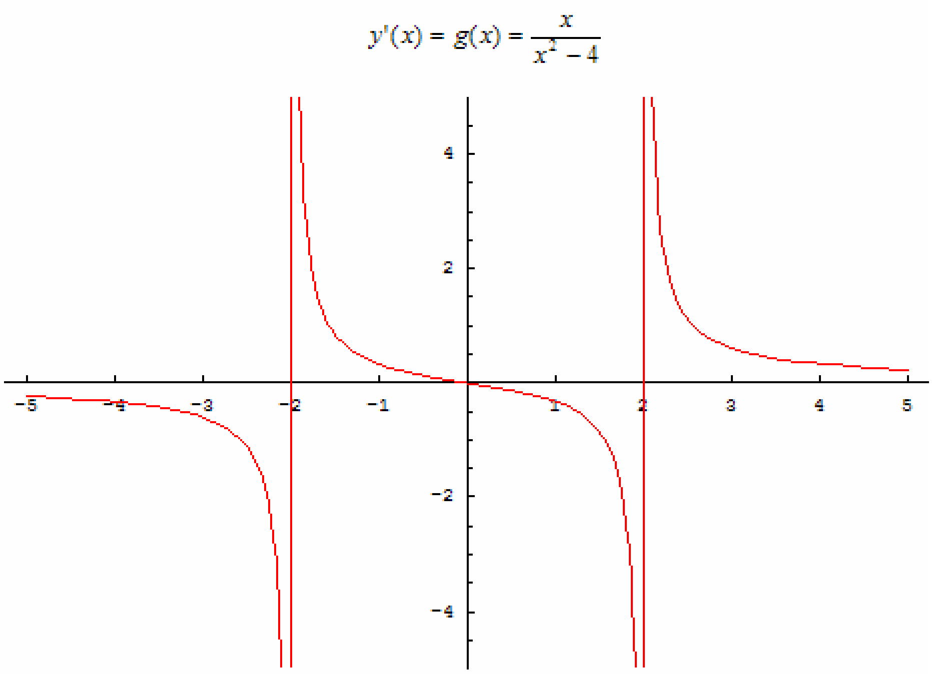
$$\lim_{x\to -2^+} \frac{x}{x^2-4} = +\infty, \lim_{x\to -2^-} \frac{x}{x^2-4} = -\infty$$

per cui le rette $x = \pm 2$ sono asintoti verticali;

- Asintoti orizzontali : $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x^2-4} = 0$ per cui la retta $y = 0$ è asintoto orizzontale;
- Asintoti obliqui: non ce ne sono; infatti, se esistessero avrebbero equazione $y = mx + q$,

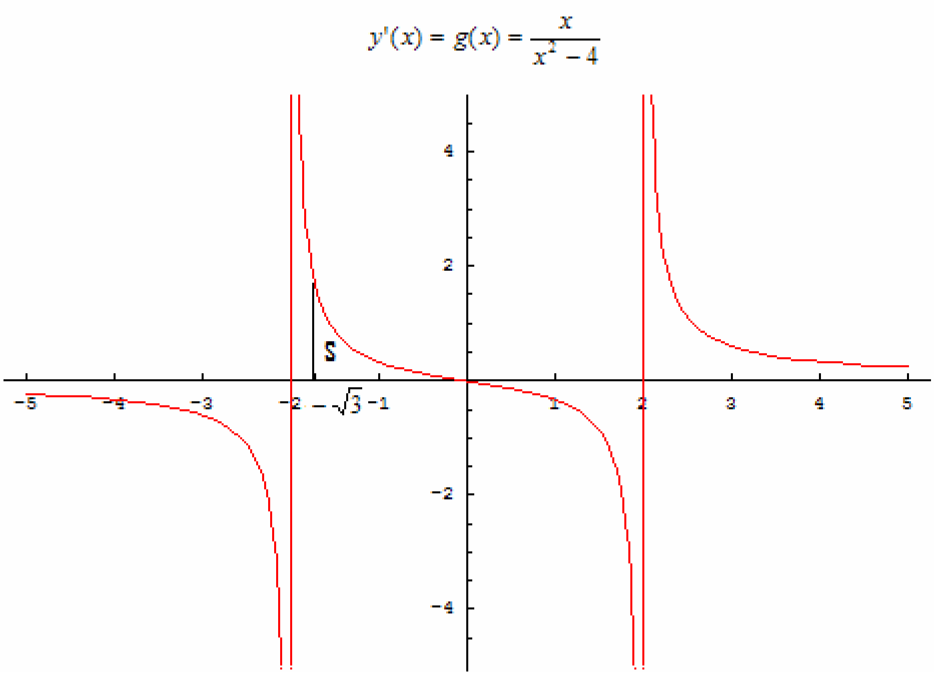
  ma nel nostro caso $m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{x}{x^2-4}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^2-4} = 0$;
- Crescenza e decrescenza: $g'(x) = \frac{x^2-4-2x^2}{(x^2-4)^2} = \frac{-4-x^2}{(x^2-4)^2}$ per cui nel dominio di definizione la funzione $y'(x) = g(x) = \frac{x}{x^2-4}$ è sempre decrescente; la derivata seconda è $g''(x) = \frac{2x(x^2+12)}{(x^2-4)^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0$ per cui (0,0) è un flesso.

Il grafico è di seguito presentato:



4)

L’area da calcolare è sotto rappresentata con S:



Tale area sarà pari a:

$$S = \int_{-\sqrt{3}}^{0} \left(\frac{x}{x^2 - 4} \right) dx = \left[\frac{1}{2} \ln\left| x^2 - 4 \right| \right]_{-\sqrt{3}}^{0} = \frac{1}{2} \ln(4) = \ln(2).$$

QUESTIONARIO

1. Si determini il campo di esistenza della funzione $y = (x^2 - 3x)^{\frac{1}{|x-4|}}$
2. Si calcoli il limite della funzione $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{x+3}-3}{\sqrt{x}-\sqrt{x+3}+1}$ quando x tende a 1
3. Si calcoli, in base alla definizione di derivata, la derivata della funzione $f(x)=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ nel punto x= -1.
4. In un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, si consideri l'ellisse γ d'equazione $x^2+9y^2=9$ e di asse maggiore AB. Fra i trapezi isosceli contenuti nel semipiano $y \geq 0$ inscritti in γ e di cui una base è AB, si determini quello di area massima
5. Si consideri la seguente proposizione: "Dato un triangolo rettangolo, il cerchio che ha per raggio l'ipotenusa è la somma dei cerchi che hanno per raggi i cateti". Si dica se è vera o falsa e si motivi esaurientemente la risposta.
6. Si consideri la funzione:

$$f(x)=\begin{cases} sen^2 x sen\dfrac{1}{x} & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases}$$

   Se ne studi la continuità nel punto x=0
7. Si calcoli il volume del solido generato in una rotazione completa attorno all'asse delle x della regione finita di piano delimitata dalla curva d'equazione $y=\sqrt{senx}$ e dall'asse stesso nell'intervallo $0 \leq x \leq \pi$
8. Si determinino i coefficienti dell'equazione $y=\dfrac{ax^2+6}{bx+3}$ perché la curva rappresentativa ammetta un asintoto obliquo d'equazione y=x+3.
9. Si enunci il teorema di *Lagrange* e se ne fornisca un'interpretazione geometrica.
10. Si determinino le costanti a e b in modo che la funzione F(x)= asen^3 x + bsenx + 2x sia una primitiva della funzione f(x) = cos^{3}x – 3cosx +2

Soluzione

1)

Il dominio della funzione $y=\left(x^2-3x\right)^{\frac{1}{|x-4|}}$ è dato dalla risoluzione del sistema seguente:

$$\begin{cases} x^2-3x>0 \\ |x-4| \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<0 \cup x>3 \\ x \neq 4 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty,0) \cup (3,4) \cup (4,+\infty)$$

In realtà la funzione $y=\left(x^2-3x\right)^{\frac{1}{|x-4|}}$ è prolungabile per continuità da destra in $x=3$ e da sinistra in $x=0$: infatti $\lim_{x\to 3^+}\left(x^2-3x\right)^{\frac{1}{|x-4|}}=0, \lim_{x\to 0^-}\left(x^2-3x\right)^{\frac{1}{|x-4|}}=0$.

2)

Dobbiamo calcolare il limite $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+3}-3}{\sqrt{x}-\sqrt{x+3}+1}$. Esso può essere risolto sia senza applicare il teorema di De L'Hopital che applicandolo. Risolviamolo in ambo i modi:

- Senza applicare de L'Hopital: poniamo $\sqrt{x+3}=t \Rightarrow x=t^2-3$ per cui

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+3}-3}{\sqrt{x}-\sqrt{x+3}+1}=\lim_{t\to 2}\frac{\sqrt{t^2-3}+t-3}{\sqrt{t^2-3}-(t-1)}=$$
$$=\lim_{t\to 2}\frac{\left(\sqrt{t^2-3}+t-3\right)\left(\sqrt{t^2-3}+(t-1)\right)}{\left(\sqrt{t^2-3}-(t-1)\right)\left(\sqrt{t^2-3}+(t-1)\right)}=$$
$$=\lim_{t\to 2}\frac{\left(t^2-3\right)+2t\sqrt{t^2-3}-4\sqrt{t^2-3}+(t-3)(t-1)}{t^2-3-(t-1)^2}=$$
$$=\lim_{t\to 2}\frac{2t^2-4t+2t\sqrt{t^2-3}-4\sqrt{t^2-3}}{2t-4}=$$
$$=\lim_{t\to 2}\frac{t(2t-4)+(2t-4)\sqrt{t^2-3}}{2t-4}==\lim_{t\to 2}\frac{(2t-4)(\sqrt{t^2-3}+t)}{2t-4}=$$
$$=\lim_{t\to 2}(\sqrt{t^2-3}+t)=3$$

- Applichiamo de L'Hopital:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+3}-3}{\sqrt{x}-\sqrt{x+3}+1}\overset{H}{=}\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{x+3}}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2\sqrt{x+3}}}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}=\frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{4}}=3$$

3)

Applichiamo la definizione di derivata nel punto $x=-1$ alla funzione $f(x)=\frac{1-x^2}{1+x^2}$:

$$f'(-1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h-1)-f(-1)}{h}=$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1-(h-1)^2}{1+(h-1)^2}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{2h-h^2}{1+(h-1)^2}}{h}=$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{h(2-h)}{1+(h-1)^2}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(2-h)}{1+(h-1)^2}=1$$

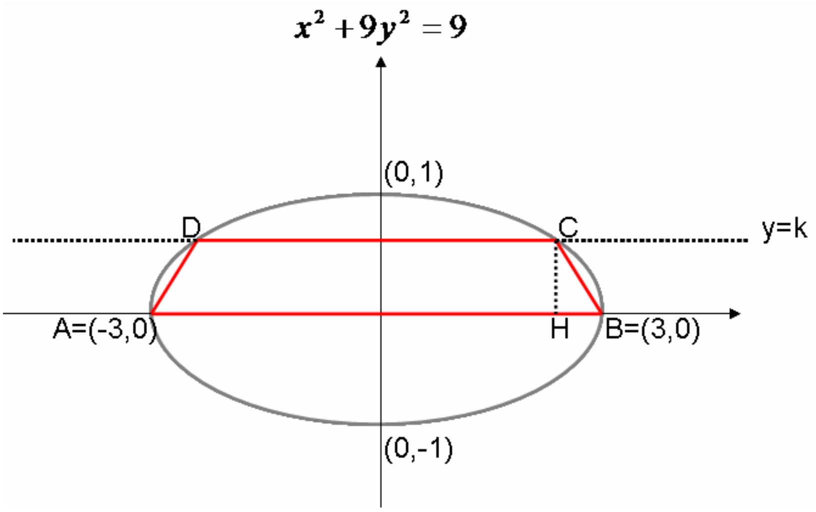
Per vedere se i calcoli effettuati sono giusti possiamo calcolare la derivata direttamente senza passare per il limite del rapporto incrementale:

$$f'(x) = \frac{-2x(1+x^2)-2x(1-x^2)}{(1+x^2)^2} = -\frac{4x}{(1+x^2)^2} \Rightarrow$$

$$f'(-1) = \left[-\frac{4x}{(1+x^2)^2}\right]_{x=-1} = 1$$

4)

Si consideri la figura sottostante:



Calcoliamo i punti C e D dati dall'intersezione dell'ellisse con la retta di equazione $y = k, 0 < k < 1$:

$$C, D: \begin{cases} x^2 + 9y^2 = 9 \\ y = k \end{cases} \Rightarrow x^2 = 9\left(1-k^2\right) \Rightarrow x = \pm 3\sqrt{\left(1-k^2\right)} \Rightarrow$$

$$C = \left(3\sqrt{\left(1-k^2\right)}, k\right), D = \left(-3\sqrt{\left(1-k^2\right)}, k\right)$$

L'area del trapezio isoscele ABCD è : $S = \frac{(AB+CB)*CH}{2}$ dove $AB = 6, CD = 6\sqrt{1-k^2}, CH = k$

per cui l'area sarà: $S(k) = \frac{(AB+CB)*CH}{2} = 3k\left(1+\sqrt{1-k^2}\right), \; 0 < k < 1$.

Per la massimizzazione dell'area calcoliamo la derivata prima:

$$S'(k) = 3\left(1+\sqrt{1-k^2}\right) + 3k\left(-\frac{k}{\sqrt{1-k^2}}\right) = \frac{3\sqrt{1-k^2}+3\left(1-k^2\right)-3k^2}{\sqrt{1-k^2}} = \frac{3\left[\sqrt{1-k^2}+1-2k^2\right]}{\sqrt{1-k^2}}$$

Studiamo la monotonia: sapendo per ipotesi che $0 < k < 1$ allora $S'(k) = \frac{3\left[\sqrt{1-k^2}+1-2k^2\right]}{\sqrt{1-k^2}} > 0 \Rightarrow \sqrt{1-k^2}+1-2k^2 > 0$, per cui va risolta questa disequazione irrazionale $\sqrt{1-k^2} > 2k^2 - 1$. Tale disequazione ha come soluzione l'unione delle soluzioni dei due sistemi seguenti:

$$\begin{cases} 0 < k < 1 \\ 1-k^2 \geq 0 \\ 2k^2 - 1 < 0 \end{cases} \cup \begin{cases} 0 < k < 1 \\ 2k^2 - 1 \geq 0 \\ 1-k^2 > \left(-1+2k^2\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 0 < k < 1 \\ -1 \leq k \leq 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} < k < \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \cup \begin{cases} 0 < k < 1 \\ k \leq -\frac{1}{\sqrt{2}} \cup k \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 4k^4 - 3k^2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 0 < k < 1 \\ -1 \leq k \leq 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} < k < \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \cup \begin{cases} 0 < k < 1 \\ k \leq -\frac{1}{\sqrt{2}} \cup k \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} < k < 0 \cup 0 < k < \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

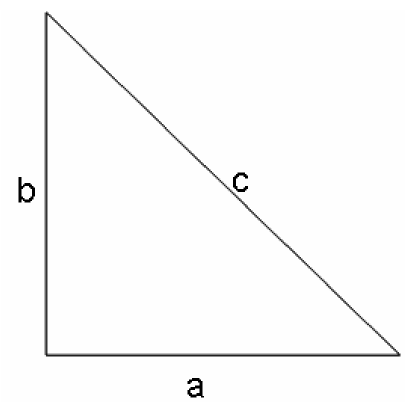
$$0 < k < \frac{1}{\sqrt{2}} \cup \frac{1}{\sqrt{2}} \leq k < \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow$$

$$0 < k < \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Quindi il massimo dell'area lo si ha per $k = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e l'area vale $A\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left[1+\sqrt{1-\frac{3}{4}}\right] = \frac{3\sqrt{3}}{2}\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9\sqrt{3}}{4}$.

5)

Si consideri la figura sottostante:



Per il teorema di Pitagora si ha $a^2 + b^2 = c^2$ per cui moltiplicando ambo i membri per π si ha $\pi a^2 + \pi b^2 = \pi c^2$ cioè la somma delle aree dei cerchi di raggi pari ai cateti è pari all'area del cerchio di raggio pari all'ipotenusa. Per cui la proposizione è vera.

6)

Si vuole studiare la continuità della funzione

$$f(x)=\begin{cases}\sin^2\left(x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

nel punto $x=0$.

Calcoliamo il limite seguente : $\lim_{x\to 0^+}\sin^2\left(x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)\overset{t=\frac{1}{x}}{=}\lim_{t\to+\infty}\sin^2\left(\frac{\sin(t)}{t}\right)$.

Ora , essendo la funzione seno limitata ed in particolare $-1\le\sin(t)\le 1$, allora per $t\to+\infty$ possiamo scrivere $-\frac{1}{t}\le\frac{\sin(t)}{t}\le\frac{1}{t}$ e passando al limite si ha $\lim_{t\to+\infty}\left(-\frac{1}{t}\right)\le\lim_{t\to+\infty}\left[\frac{\sin(t)}{t}\right]\le\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{1}{t}\right)\Rightarrow 0\le\lim_{t\to+\infty}\left[\frac{\sin(t)}{t}\right]\le 0$ e per il teorema del confronto o dei carabinieri si ha $\lim_{t\to+\infty}\left[\frac{\sin(t)}{t}\right]=0$, per cui $\lim_{x\to 0^+}\sin^2\left(x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)\overset{t=\frac{1}{x}}{=}\lim_{t\to+\infty}\sin^2\left(\frac{\sin(t)}{t}\right)=\sin^2(0)=0$.

Analogamente $\lim_{x\to 0^-}\sin^2\left(x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)=0$ per cui la finzione $f(x)$ è continua nel punto $x=0$.

7)

Il volume richiesto, per il teorema di Guldino, è:

$$V=\pi\int_0^{\pi}\left(\sqrt{\sin(x)}\right)^2dx=\pi\int_0^{\pi}\sin(x)dx=\pi[-\cos(x)]_0^{\pi}=2\pi$$

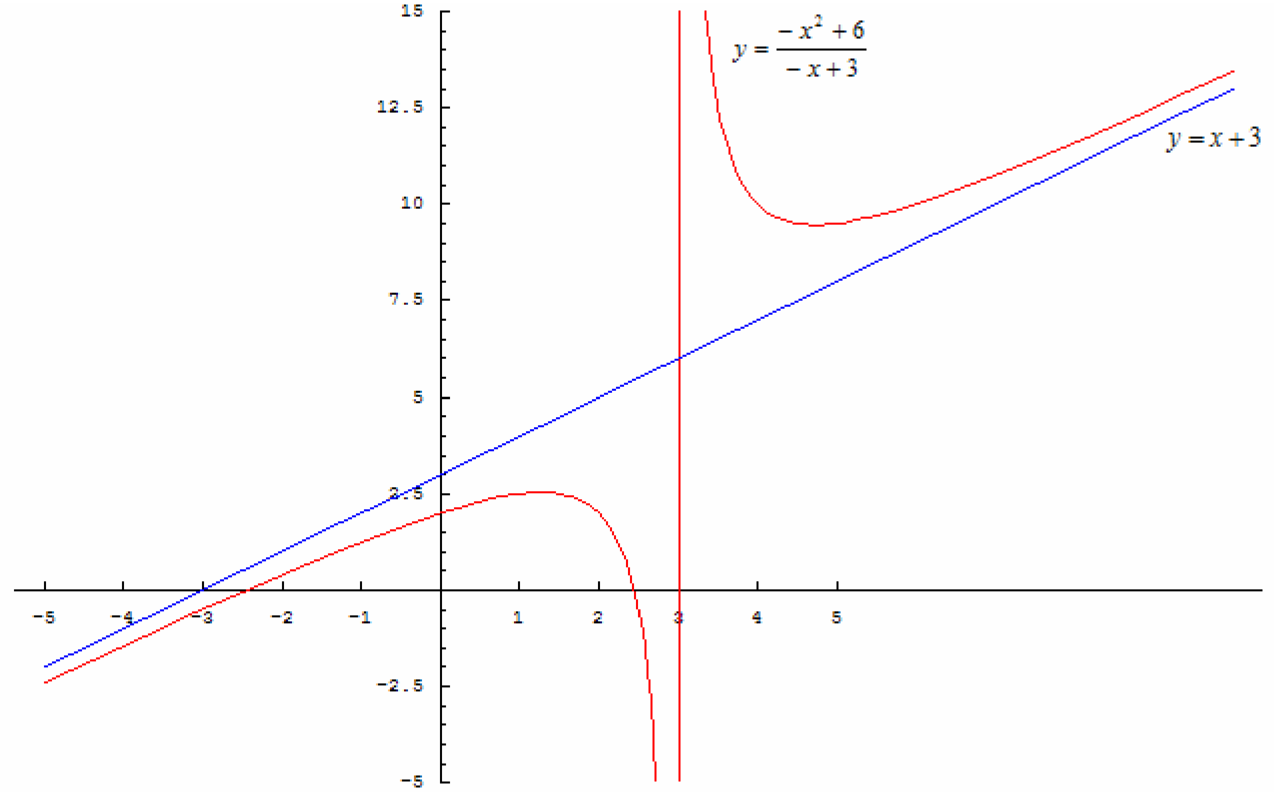
8)

Dobbiamo ricavare i coefficienti *a*,*b* in modo che la funzione $y=\frac{ax^2+6}{bx+3}$ presenti come asintoto la retta $y=x+3$. Si deve imporre:

$$m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{ax^2+6}{bx+3}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{ax^2+6}{bx^2+3x}=\frac{a}{b}=1\Rightarrow a=b$$

$$q=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{ax^2+6}{ax+3}-x\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{-3x+6}{ax+3}\right]=-\frac{3}{a}=3\Rightarrow a=b=-1$$

Per cui la funzione è $y=\frac{-x^2+6}{-x+3}$. Tale funzione presenta come dominio $R-\{3\}$, interseca l'asse delle ascisse in $\left(\pm\sqrt{6},0\right)$, quello delle ordinate in (0,2), è positiva per $-\sqrt{6}<x<\sqrt{6}\cup x>3$, ha come asintoto verticale la retta $x = 3$, come asintoto obliquo la retta $y = x + 3$, ha l'ascissa del massimo in $x = 3 - \sqrt{3}$ e l'ascissa del minimo in $x = 3 + \sqrt{3}$ e non presenta flessi. Il suo grafico è sotto presentato:



9)

Il teorema di Lagrange (o del valor medio) afferma che se una funzione reale di variabile reale è continua in un intervallo [*a*; *b*] e derivabile in (*a*; *b*), esiste almeno un punto interno all'intervallo in cui la tangente al grafico della funzione è parallela alla retta che congiunge i punti del grafico corrispondenti agli estremi dell'intervallo [a;b]. Questa è l'interpretazione geometrica del teorema di Lagrange.

In modo più formale:

- Sia $f : [a,b] \to R$
- continua in [a, b]
- derivabile in (a, b)

allora in queste ipotesi $\exists c \in (a,b) : f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

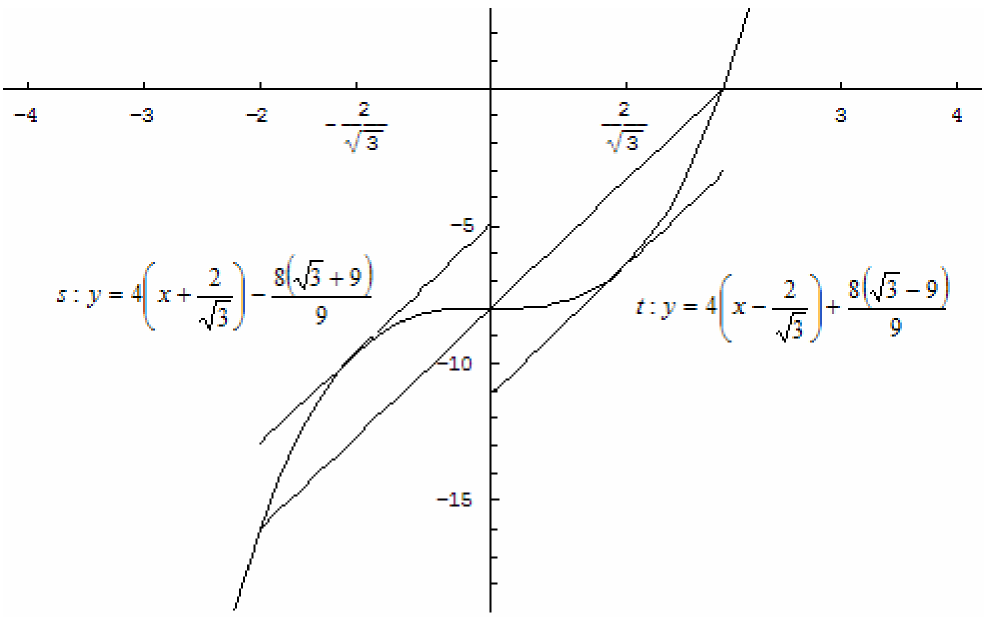
La funzione $y = x^3 - 8, 0 \le x \le 2$ è continua e derivabile in tutto R ed in particolare nell'intervallo [0,2] per cui ad essa è applicabile il teorema di Lagrange, cioè

$$\exists c \in (0,2): f'(c) = \frac{f(2) - f(0)}{2}$$

Ora $f(0) = -8,\ f(2) = 0,\ f'(c) = 3c^2$ per cui si deve risolvere l'equazione $3c^2 = 4 \Rightarrow c = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$ di cui solo $c = \frac{2}{\sqrt{3}}$ è accettabile perché interno all'intervallo [0,2]. In tal caso la tangente alla curva $y = x^3 - 8$ all'ascissa $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$ sarà $t: y = 4\left(x - \frac{2}{\sqrt{3}}\right) + \frac{8(\sqrt{3}-9)}{9}$.

Lo stesso discorso vale se ci mettiamo nell'intervallo [-2,0] in cui il teorema di Lagrange sarà valido per $c = -\frac{2}{\sqrt{3}}$, accettabile perché interno all'intervallo [-2,0]. In tal caso la tangente alla curva $y = x^3 - 8$ all'ascissa $x = -\frac{2}{\sqrt{3}}$ sarà $s: y = 4\left(x + \frac{2}{\sqrt{3}}\right) - \frac{8(\sqrt{3}+9)}{9}$.

In ambo i casi il grafico sotto presentato conferma l'interpretazione geometrica del teorema stesso:



10)

Calcoliamo l'integrale

$$\begin{aligned}
&\int \left[\cos^3(x) - 3\cos(x) + 2\right]dx = \int \cos^3(x)dx - 3\int \cos(x)dx + \int 2dx = \\
&= \int \cos(x)\left(1 - \sin^2(x)\right)dx - 3\int \cos(x)dx + \int 2dx = \\
&= \int \cos(x)dx - \int \cos(x)\sin^2(x)dx - 3\int \cos(x)dx + \int 2dx = \\
&= -\int \cos(x)\sin^2(x)dx - 2\int \cos(x)dx + \int 2dx = \\
&= -\frac{1}{3}\sin^3(x) - 2\sin(x) + 2x + K
\end{aligned}$$

Quindi i coefficienti richiesti per confronto sono $\begin{cases} a = -\dfrac{1}{3} \\ b = -2 \end{cases}$.