ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO • 2006
Sessione straordinaria

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1

È dato il triangolo *ABC* in cui:

$$\overline{AB}=\frac{25}{2},\ \overline{AC}=5\sqrt{5},\ \text{tg}\,\hat{A}=2.$$

Determinare l'altezza del triangolo relativa al lato *AB* e tracciare la circonferenza *k* avente centro in *C* e tangente al lato *AB*.

Dopo aver riferito il piano della figura a un conveniente sistema di assi cartesiani ortogonali, in modo, però, che uno degli assi di riferimento sia parallelo alla retta *AB*:

a) scrivere l'equazione della circonferenza *k*;

b) trovare le coordinate dei vertici del triangolo e del punto *D* in cui la circonferenza *k* interseca il segmento *BC*;

c) determinare l'equazione della parabola *p*, avente l'asse perpendicolare alla retta *AB*, tangente in *D* alla circonferenza *k* e passante per *A*;

d) calcolare le aree delle due regioni in cui la parabola *p* divide il triangolo *ABC*;

e) trovare, infine, le coordinate dei punti comuni alla circonferenza *k* e alla parabola *p*.

PROBLEMA 2

Si considerino i polinomi di 5° grado, nella variabile x, con coefficienti reali, i cui grafici, rappresentati in un piano riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono simmetrici rispetto all'origine O e hanno un massimo relativo nel punto $\left(-2;\ \frac{64}{15}\right)$.

a) Trovare l'equazione $y=f(x)$ dei grafici suddetti.

b) Dimostrare che tali grafici hanno tre punti in comune, in due dei quali hanno anche la stessa tangente.

c) Indicare con γ il grafico avente come tangente inflessionale l'asse x e disegnarne l'andamento.

d) Indicato con $P(x)$ il polinomio rappresentato da γ e chiamati u e v ($u<v$) le ascisse dei punti, distinti da O, in cui γ interseca l'asse x, calcolare:

$$\int_u^v P(x)\,dx.$$

e) Dopo aver controllato che γ ha tre flessi allineati, determinare le ascisse dei punti in cui la retta dei flessi interseca γ.

QUESTIONARIO

1 È assegnato un pentagono regolare di lato lungo L. Recidendo opportunamente, in esso, cinque triangoli congruenti, si ottiene un decagono regolare: calcolarne la lunghezza del lato. (Si lascino indicate le funzioni goniometriche degli angoli coinvolti).

2 Una piramide quadrangolare regolare è tale che la sua altezza è il doppio dello spigolo di base. Calcolare il rapporto fra il volume del cubo inscritto nella piramide e il volume della piramide stessa.

3 Se le funzioni $f(x)$ e $g(x)$, entrambe tendenti a 0, quando $x \to a$, non soddisfano alle condizioni previste dal teorema di De L'Hôpital, non è possibile calcolare il limite di $\frac{g(x)}{f(x)}$ quando $x \to a$. È vero o è falso? Fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

4 Il limite della funzione $f(x) = x - \ln x$, per $x \to +\infty$ è:

A 0. **B** un valore finito diverso da 0. **C** $+\infty$. **D** $-\infty$.

Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta operata.

5 Dimostrare che la derivata, rispetto a x, della funzione $\mathrm{arctg}(x)$ è $\frac{1}{1+x^2}$.

6 Dopo aver enunciato il teorema di Rolle, spiegare in maniera esauriente se può essere applicato alla funzione $f(x) = \sqrt{x^2}$, nell'intervallo $[-1; 1]$.

7 Giustificare, con considerazioni analitiche o mediante un'interpretazione grafica, che la seguente equazione:

$$x^5 + x^3 + 1 = 0$$

ammette una e una sola soluzione reale. Trovare, quindi, l'intervallo $[z; z+1]$ al quale appartiene tale soluzione, essendo z un numero intero.

8 Considerata l'equazione: $x^5 - 2x^3 + 1 = 0$, spiegare, con il metodo preferito ma in maniera esauriente, perché non può ammettere più di una soluzione *razionale*.

9 Considerata l'equazione: $\cos\frac{x}{2}\,\mathrm{sen}(2x) = 12$, spiegare in maniera esauriente se ammette soluzioni reali o se non ne ammette.

10 Una classe è formata da 28 alunni, di cui 16 femmine e 12 maschi. Fra le femmine c'è una sola «Maria» e fra i maschi un solo «Antonio». Si deve formare una delegazione formata da due femmine e due maschi. Quante sono le possibili delegazioni comprendenti «Maria» e «Antonio»?

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

SOLUZIONE DELLA PROVA D'ESAME
CORSO DI ORDINAMENTO • 2006
Sessione straordinaria

PROBLEMA 1

Rappresentiamo in scala il triangolo ABC tenendo conto che

$$\overline{AB}=\frac{25}{2},\ \overline{AC}=5\sqrt{5}\ \text{ e } \operatorname{tg}\hat{A}=2\rightarrow\hat{A}\simeq 63°.$$

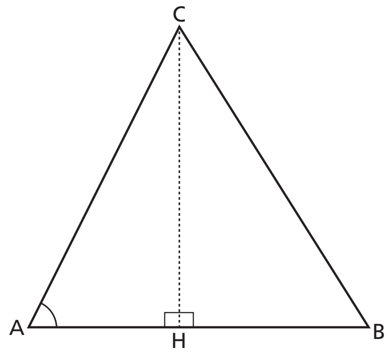
Considerato $\operatorname{tg}\hat{A}$, calcoliamo le altre funzioni goniometriche:

$$\operatorname{sen}\hat{A}=\frac{\operatorname{tg}\hat{A}}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\hat{A}}}\quad\rightarrow\quad\operatorname{sen}\hat{A}=\frac{2\sqrt{5}}{5},$$

$$\cos\hat{A}=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\hat{A}}}\quad\rightarrow\quad\cos\hat{A}=\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

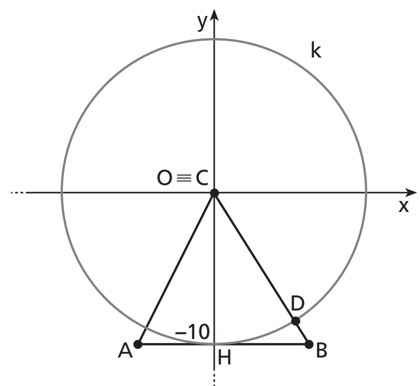
L'altezza CH misura $\overline{CH}=\overline{AC}\cdot\operatorname{sen}\hat{A}$ pertanto:

$$\overline{CH}=5\sqrt{5}\cdot\frac{2\sqrt{5}}{5}=10.$$



▲ **Figura 1.**

Disegniamo la circonferenza k e scegliamo un sistema di riferimento con origine nel centro C della circonferenza e assi come in figura 2.



▲ **Figura 2.**

a) L'equazione di una circonferenza di raggio r e centro $C(0;\,0)$ è del tipo $x^2+y^2=r^2$. Nel nostro caso $r=\overline{CH}=10$, quindi la circonferenza k ha equazione:

$$x^2+y^2=100.$$

b) Poiché $\overline{AH}=\overline{AC}\cdot\cos\hat{A}=5\sqrt{5}\cdot\dfrac{\sqrt{5}}{5}=5$ e

$$\overline{HB}=\overline{AB}-\overline{AH}=\frac{25}{2}-5=\frac{15}{2},$$ ne segue che:

$$A(-5;\,-10),\ B\left(\frac{15}{2};\,-10\right),\ C(0;\,0).$$

Per determinare le coordinate di D calcoliamo l'equazione della retta CB. Tale equazione è del tipo $y=mx$, dove $m=\dfrac{y_B}{x_B}=-\dfrac{4}{3}$. Quindi CB ha equazione $y=-\dfrac{4}{3}x$. Cerchiamo ora i punti di intersezione tra CB e la circonferenza k considerando il seguente sistema:

$$\begin{cases} y=-\dfrac{4}{3}x \\ x^2+y^2=100 \end{cases}\quad\rightarrow\quad\begin{cases} y=-\dfrac{4}{3}x \\ \dfrac{25}{9}x^2=100 \end{cases}\quad\rightarrow\quad\begin{cases} x=6 \\ y=-8 \end{cases}$$

Ne segue che $D(6;\,-8)$.

c) La parabola p ha equazione del tipo $y = ax^2 + bx + c$ con a, b, c coefficienti reali e $a \neq 0$. La tangente a tale parabola nel punto D ha come coefficiente angolare $f'(6)$, dove $f(x) = ax^2 + bx + c$. Pertanto vale:

$$f'(x) = 2ax + b, \text{ quindi } f'(6) = 12a + b.$$

Poiché la retta CB è perpendicolare alla tangente in D e ha coefficiente angolare uguale a $-\frac{4}{3}$, allora il coefficiente angolare della retta tangente in D è $\frac{3}{4}$.

Deve quindi valere la condizione $12a + b = \frac{3}{4}$, cioè $48a + 4b = 3$. Mettiamo tale equazione a sistema con le equazioni che si ottengono sostituendo all'equazione della parabola le coordinate dei punti A e D:

$$\begin{cases} 36a + 6b + c = -8 \\ 25a - 5b + c = -10 \\ 48a + 4b = 3 \end{cases}$$

Risolvendo tale sistema si ottiene:

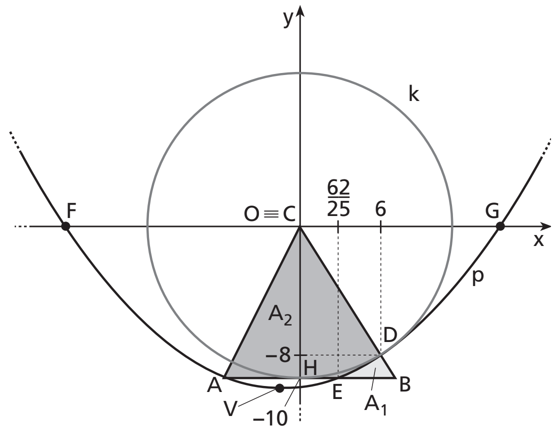
$$a = \frac{25}{484},\ b = \frac{63}{484},\ c = -\frac{2575}{242}.$$

L'equazione della parabola p è perciò:

$$y = \frac{25x^2 + 63x - 5150}{484}.$$

d) Rappresentiamo nel sistema cartesiano precedente la parabola p che ha vertice $V\left(-\frac{63}{50}; -\frac{4289}{400}\right)$ e che interseca l'asse x nei punti $G\left(\frac{-63 + 11\sqrt{4289}}{50}; 0\right)$ e $F\left(\frac{-63 - 11\sqrt{4289}}{50}; 0\right)$.

Evidenziamo le regioni in cui la parabola p divide il triangolo ABC (figura 3).



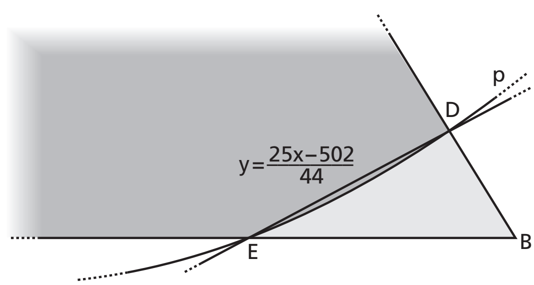
▲ **Figura 3.**

Determiniamo l'ascissa del punto E, intersezione tra il segmento AB e la parabola, ponendo $y = -10$ nell'equazione di p:

$$\frac{25x^2 + 63x - 5150}{484} = -10 \quad \rightarrow \quad 25x^2 + 63x - 310 = 0.$$

Tale equazione ha come soluzioni $x = -5$ e $x = \frac{62}{25}$. Il primo valore è l'ascissa del punto A, mentre il secondo valore è l'ascissa di E, che, quindi, ha coordinate $E\left(\frac{62}{25}; -10\right)$.

Determiniamo ora l'area del segmento parabolico delimitato dal segmento DE, che ha equazione $y = \frac{25x - 502}{44}$, e la parabola p (in figura 4 è rappresentata la regione ingrandita).



▲ **Figura 4.**

Calcoliamo il seguente integrale:

$$\int_{\frac{62}{25}}^{6}\left(\frac{25x-502}{44}-\frac{25x^2+63x-5150}{484}\right)dx=\int_{\frac{62}{25}}^{6}\frac{-25x^2+212x-372}{484}\,dx=$$

$$=\frac{1}{484}\left[-\frac{25}{3}x^3+106x^2-372x\right]_{\frac{62}{25}}^{6}=\frac{704}{1875}.$$

Il triangolo EDB ha altezza rispetto alla base EB che misura 2 e base lunga $\overline{EB}=\frac{251}{50}$. L'area del triangolo EDB vale quindi:

$$A_{EDB}=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{251}{50}=\frac{251}{50}.$$

Se a tale area sottraiamo l'area del segmento parabolico precedentemente trovata, otteniamo l'area della regione di piano delimitata dai segmenti EB, DB e dall'arco di parabola ED, pertanto:

$$A_1=\frac{251}{50}-\frac{704}{1875}=\frac{17\,417}{3750}.$$

L'area del triangolo ABC vale invece $\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{CH}=\frac{125}{2}$. Ne segue che l'area della regione di piano delimitata dai segmenti AE, CD, AC e dall'arco di parabola ED vale:

$$A_2=A_{ABC}-A_1=\frac{125}{2}-\frac{17\,417}{3750}=\frac{108\,479}{1875}.$$

e) Le coordinate dei punti comuni alla circonferenza k e alla parabola p sono tutte e sole le soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} y=\dfrac{25x^2+63x-5150}{484} \\ x^2+y^2=100 \end{cases}$$

Sostituendo l'espressione di y nella seconda equazione si ottiene:

$$x^2+\left(\frac{25x^2+63x-5150}{484}\right)^2=100\ \rightarrow\ 25x^4+126x^3-771x^2-25\,956x+123\,876=0.$$

Sappiamo che D è un punto comune alle due curve. In particolare esse hanno la stessa retta tangente in D. L'ascissa di tale punto è quindi una soluzione doppia di tale equazione. Scomponendo il primo membro dell'equazione otteniamo:

$$(x-6)^2(25x^2+426x+3441)=0$$

Poiché il discriminante dell'equazione $25x^2+426x+3441=0$ è negativo, si può concludere che la circonferenza k e la parabola p hanno in comune solo il punto D.

PROBLEMA 2

a) Affinché il grafico di una funzione $f(x)$ sia simmetrico rispetto all'origine, la funzione deve essere dispari, cioè tale che $f(-x)=-f(x)$. Le uniche funzioni polinomiali dispari di grado 5 sono del tipo:

$f(x)=ax^5+bx^3+cx$, con a, b, c coefficienti reali e $a\neq 0$.

Il grafico di tale funzione passa per il punto $\left(-2;\frac{64}{15}\right)$ se $f(-2)=\frac{64}{15}$, cioè se vale:

$$-32a-8b-2c=\frac{64}{15}\ \rightarrow\ 240a+60b+15c=-32.$$

Tale punto è anche un estremo relativo se $f'(-2)=0$. Poiché $f'(x)=5ax^4+3bx^2+c$, si ha che $f'(-2)=80a+12b+c$. Deve quindi valere $80a+12b+c=0$.
Mettendo a sistema tali condizioni, si ottiene:

$$\begin{cases} 80a+12b+c=0 \\ 240a+60b+15c=-32 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c=-80a-12b \\ 120a+15b-4=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b=\dfrac{4-120a}{15} \\ c=\dfrac{80a-16}{5} \end{cases}$$

Inoltre, il punto $\left(-2; \dfrac{64}{15}\right)$ è in particolare un massimo relativo se $f''(-2)<0$. Poiché $f''(x)=20ax^3+6bx$, si ha che $f''(-2)=-160a-12b$. Sostituendo l'espressione di b trovata in funzione di a si ottiene $f''(-2)=-\dfrac{16}{5}(20a+1)$. Perciò $f''(-2)<0$ solo se $a>-\dfrac{1}{20}$.

L'equazione dei grafici considerati è in conclusione la seguente:

$$y=ax^5+\frac{4-120a}{15}x^3+\frac{80a-16}{5}x, \text{ con } a\in\left]-\frac{1}{20}; 0\right[\cup\left]0; +\infty\right[.$$

b) Riscriviamo l'equazione della curva mettendo in evidenza il parametro a:

$$a(x^5-8x^3+16x)+\frac{4}{15}x^3-\frac{16}{5}x-y=0.$$

Per determinare i punti comuni alle curve consideriamo il seguente sistema:

$$\begin{cases} x^5-8x^3+16x=0 \\ \dfrac{4}{15}x^3-\dfrac{16}{5}x-y=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x(x^2-4)^2=0 \\ y=\dfrac{4}{15}x^3-\dfrac{16}{5}x \end{cases}$$

Le soluzioni della prima equazione sono $x=0 \vee x=\pm 2$, in corrispondenza delle quali troviamo i tre punti $(0; 0)$, $\left(2; -\dfrac{64}{15}\right)$, $\left(-2; \dfrac{64}{15}\right)$.

Il coefficiente angolare della tangente alla curva in un punto di ascissa x è:

$$f'(x)=5ax^4+\frac{4-120a}{5}x^2+\frac{80a-16}{5}.$$

Poiché $f'(2)=f'(-2)=0$, i punti comuni alle curve di ascissa $x=2$ e $x=-2$ hanno tutti, rispettivamente, le rette $y=-\dfrac{64}{15}$ e $y=\dfrac{64}{15}$ come tangenti.

c) Il punto di ascissa $x=c$ è un punto di flesso con tangente inflessionale l'asse x se:
- $f''(c)=0$, poiché c è un punto di flesso;
- $f(c)=0$, poiché il punto di ascissa c deve appartenere all'asse x;
- $f'(c)=0$, poiché il coefficiente angolare della tangente nel punto di ascissa c vale 0.

Osserviamo che $f''(x)=20ax^3+\dfrac{2}{5}(4-120a)x$. In particolare $f''(0)=f(0)=0$. Se, quindi, imponiamo $f'(0)=0$, si può concludere che in $(0; 0)$ vi è un flesso con tangente l'asse x:

$$f'(0)=0 \rightarrow \frac{80a-16}{5}=0 \rightarrow a=\frac{1}{5}.$$

La curva γ è dunque quella che si ottiene per $a=\frac{1}{5}$, cioè:

$$\gamma: y=\frac{1}{5}x^5-\frac{4}{3}x^3.$$

Il campo di esistenza di tale funzione è l'asse reale. La funzione è dispari, interseca gli assi cartesiani nei punti (0; 0), $\left(\pm\frac{2}{3}\sqrt{15};\, 0\right)$ e è positiva solo se $x\in\left]-\frac{2}{3}\sqrt{5};\, 0\right[\cup\left]\frac{2}{3}\sqrt{5};\, +\infty\right[$. Inoltre vale:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1}{5}x^5-\frac{4}{3}x^3\right)=\lim_{x\to\pm\infty}x^5\left(\frac{1}{5}-\frac{4}{3x^2}\right)=\pm\infty,$$

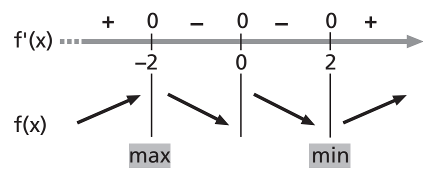
ma anche:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1}{5}x^4-\frac{4}{3}x^2\right)=+\infty.$$

Pertanto non vi sono asintoti obliqui.
La derivata prima risulta:

$$f'(x)=x^4-4x^2=x^2(x^2-4).$$

Essa si annulla in $x=0$ e in $x=\pm 2$ e lo schema di figura 5 ne riassume il segno.
La funzione ammette quindi un minimo relativo per $x=2$, che vale $f(2)=\frac{32}{5}-\frac{32}{3}=-\frac{64}{15}$, e un massimo relativo per $x=-2$, con $f(-2)=\frac{64}{15}$.

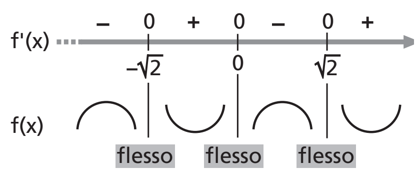


▲ **Figura 5.**

Studiamo ora la derivata seconda:

$$f''(x)=4x^3-8x=4x(x^2-2).$$

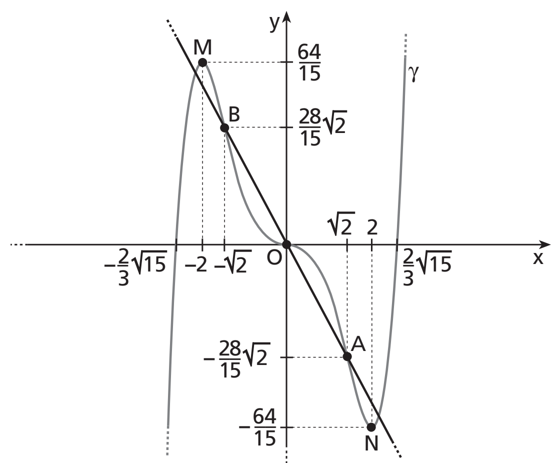
Essa si annulla in $x=0$ e in $x=\pm\sqrt{2}$. In figura 6 è indicato lo schema del segno.



▲ **Figura 6.**

La funzione ha tre flessi nei punti di coordinate (0; 0), $\left(\sqrt{2};\, -\frac{28}{15}\sqrt{2}\right)$, $\left(-\sqrt{2};\, \frac{28}{15}\sqrt{2}\right)$.

Nella figura 7 è rappresentato il grafico della curva γ.



▲ **Figura 7.**

d) Per considerazioni al punto precedente risulta $u=-\frac{2}{3}\sqrt{15}$ e $v=\frac{2}{3}\sqrt{15}$.

Essendo $P(x)=\frac{1}{5}x^5-\frac{4}{3}x^3$ un polinomio dispari e $u=-v$ allora possiamo concludere, senza necessità di calcoli, che $\int_u^v P(x)dx=0$.

e) I tre flessi di γ sono $O(0;\, 0)$, $A\left(\sqrt{2};\, -\frac{28}{15}\sqrt{2}\right)$, $B\left(-\sqrt{2};\, \frac{28}{15}\sqrt{2}\right)$. La retta passante per A e B ha equazione $y=-\frac{28}{15}x$. Poiché tale retta passa per l'origine degli assi possiamo concludere che i tre punti sono allineati.

Troviamo ora le ascisse dei punti di intersezione tra tale retta e la curva γ risolvendo il seguente sistema:

$$\begin{cases} y = -\dfrac{28}{15}x \\ y = \dfrac{1}{5}x^5 - \dfrac{4}{3}x^3 \end{cases} \to -\frac{28}{15}x = \frac{1}{5}x^5 - \frac{4}{3}x^3 \to 3x^5 - 20x^3 + 28x = 0 \to x(3x^4 - 20x^2 + 28) = 0.$$

Per la proprietà dell'annullamento del prodotto risulta:

$x = 0 \vee 3x^4 - 20x^2 + 28 = 0.$

L'equazione biquadratica $3x^4 - 20x^2 + 28 = 0$ ha soluzioni $x = \pm\dfrac{\sqrt{42}}{3}$ e $x = \pm\sqrt{2}$.

In conclusione, le ascisse dei punti in cui la retta passante per i flessi interseca γ sono:

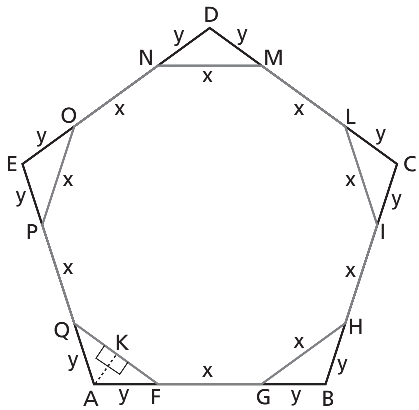
$x = 0$, $x = \pm\dfrac{\sqrt{42}}{3}$ e $x = \pm\sqrt{2}$.

QUESTIONARIO

1 Dato il pentagono regolare *ABCDE*, per ogni vertice si ricavino cinque triangoli isosceli congruenti, di base x e lato obliquo y, in modo da ottenere un decagono regolare di lato x (figura 8).

Si tracci l'altezza *AK* del triangolo isoscele *AFQ*. Poiché l'angolo al vertice di un poligono regolare di n lati vale $\dfrac{n-2}{n}\pi$, nel caso di un pentagono ($n = 5$) risulta $\dfrac{3}{5}\pi$. Pertanto l'angolo alla base del triangolo isoscele *AFQ* vale $A\hat{F}K = \dfrac{\pi - \frac{3}{5}\pi}{2} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2}{5}\pi = \dfrac{\pi}{5}$.

Per la trigonometria, segue che $\dfrac{x}{2} = y\cos\dfrac{\pi}{5}$ e, quindi $y = \dfrac{x}{2\cos\frac{\pi}{5}}$.



▲ **Figura 8.**

Inoltre risulta $L = 2y + x$. Sostituendo l'espressione di y, sopra trovata, si ottiene la seguente equazione in x che risolviamo:

$$L = 2\frac{x}{2\cos\frac{\pi}{5}} + x \to x = \frac{\cos\frac{\pi}{5}}{1 + \cos\frac{\pi}{5}}L.$$

Il lato del decagono è lungo perciò $\dfrac{\cos\frac{\pi}{5}}{1 + \cos\frac{\pi}{5}}L$.

2 È data una piramide quadrangolare di altezza doppia dello spigolo di base, nella quale è inscritto un cubo (figura 9).
Supposto di lunghezza a lo spigolo di base, l'altezza è $\overline{VO} = 2a$ e il volume della piramide risulta:

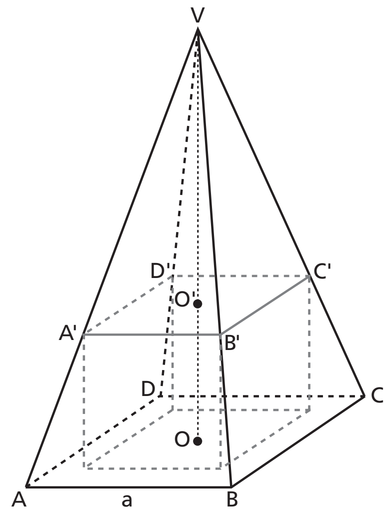
$$V_1 = \frac{1}{3} A_{ABCD} \cdot \overline{VO} = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot 2a = \frac{2}{3} a^3.$$

Determiniamo la lunghezza dello spigolo del cubo inscritto alla piramide. Sia $x = \overline{A'B'} = \overline{O'O}$, dove O' è l'intersezione tra l'altezza VO della piramide e la faccia $A'B'C'D'$ del cubo. Quindi $x \in]0; a[$.
Poiché A, B, O, V sono i corrispondenti di A', B', O', V in un'omotetia di centro V, vale:

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{VO'}}{\overline{VO}}.$$

Ma $\overline{VO'} = \overline{VO} - \overline{O'O} = 2a - x$. Sostituendo, troviamo che:

$$\frac{x}{a} = \frac{2a - x}{2a} \to 2x = 2a - x \to 3x = 2a \to x = \frac{2}{3} a.$$



▲ **Figura 9.**

Quindi lo spigolo del cubo ha lunghezza $\frac{2}{3} a$. Ne segue che il volume del cubo vale:

$$V_2 = \left(\frac{2}{3} a\right)^3 = \frac{8}{27} a^3.$$

Il rapporto richiesto è perciò:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\frac{8}{27} a^3}{\frac{2}{3} a^3} = \frac{8}{27} \cdot \frac{3}{2} = \frac{4}{9}.$$

3 Tale affermazione è falsa. Forniamo un controesempio considerando le seguenti funzioni:

$$f(x) = x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}, \; g(x) = x.$$

Poiché $-x^2 \leq x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} \leq x^2$, possiamo applicare il teorema del confronto e risulta $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$.

Quindi $f(x)$ e $g(x)$ sono entrambe funzioni tendenti a 0 per $x \to 0$.
Esse non soddisfano le condizioni previste dal teorema di De L' Hôpital, in quanto non esiste $\lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Infatti:

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{2x \operatorname{sen} \frac{1}{x} + x^2 \cdot \cos \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{1} = 2x \operatorname{sen} \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}.$$

Per $x \to 0$, il primo termine tende a 0 mentre l'addendo $-\cos \frac{1}{x}$ non ammette limite (essendo una funzione oscillante).

Questo, però, non implica che non si possa calcolare $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$. Infatti risulta:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \to 0} \left(x \operatorname{sen} \frac{1}{x}\right) = 0.$$

4 Il limite $\lim_{x \to +\infty} (x - \ln x)$ porta alla forma indeterminata $\infty - \infty$. Riscriviamolo raccogliendo la x al numeratore:

$$\lim_{x \to +\infty} (x - \ln x) = x\left(1 - \frac{\ln x}{x}\right).$$

Ora, per il teorema di De L' Hôpital risulta:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0,$$

pertanto vale:

$$\lim_{x \to +\infty} (x - \ln x) = +\infty.$$

L'alternativa corretta è C.

5 La funzione $y = f(x) = \operatorname{arctg}(x)$, definita in tutto $\mathbb{R}$, è l'inversa della funzione $x = f^{-1}(x) = \operatorname{tg} y$, con $y \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$. La funzione tangente è derivabile nell'intervallo con derivata non nulla. Per il teorema della derivata della funzione inversa, $y = \operatorname{arctg}(x)$ è derivabile in tutto $\mathbb{R}$ e si ha:

$$\mathrm{D}[\operatorname{arctg} x] = \frac{1}{\mathrm{D}[\operatorname{tg} y]} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

6 Il teorema di Rolle afferma che, data una funzione $f(x)$ continua nell'intervallo $[a; b]$ e derivabile nei suoi punti interni, se $f(a) = f(b)$, allora esiste almeno un punto c, interno all'intervallo $[a; b]$, per il quale risulta $f'(c) = 0$.
La funzione $f(x) = \sqrt{x^2} = |x|$ non è derivabile in $x = 0$. Infatti, calcolando il limite del rapporto incrementale in tale punto si ha che:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{x \to 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{x \to 0^+} \frac{h}{h} = 1,$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{x \to 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{x \to 0^-} -\frac{h}{h} = -1.$$

Quindi non esiste $f'(0)$ e di conseguenza la funzione non soddisfa tutte le ipotesi del teorema di Rolle nell'intervallo $[-1; 1]$.

7 Consideriamo la funzione di equazione:

$$f(x) = x^5 + x^3 + 1.$$

Tale funzione è definita in tutto $\mathbb{R}$ e ivi continua e derivabile, in quanto polinomiale. Inoltre $f(0) = 1 > 0$ e $f(-1) = -1 < 0$. Quindi per il teorema di esistenza degli zeri di una funzione, l'equazione considerata ammette almeno una soluzione reale nell'intervallo $[-1; 0]$.
Poiché $f'(x) = 5x^4 + 3x^2$ è positiva in $\mathbb{R} - \{0\}$ e si annulla solo in $x = 0$, ne segue che la funzione è strettamente crescente e, quindi, iniettiva. In particolare l'equazione ammette un unico zero compreso tra -1e 0.

8 Ricordiamo il seguente teorema:

Se $p(x)$ è un polinomio a coefficienti interi e il numero razionale $\frac{a}{b}$ (ridotto ai minimi termini) è uno zero del polinomio $\left(\text{cioè } p\left(\frac{a}{b}\right) = 0\right)$, allora:

– il numeratore a divide il termine noto del polinomio;
– il denominatore b divide il coefficiente del termine di grado massimo del polinomio.

Dal teorema segue che, per trovare le soluzioni razionali dell'equazione $x^5 - 2x^3 + 1 = 0$, possiamo restringere la nostra attenzione al termine noto 1 e al coefficiente del termine x^5 che è anch'esso 1. Quindi il numeratore e il denominatore della soluzione razionale devono essere interi divisori di 1. Poiché i divisori di 1 sono solamente i numeri 1 e -1, ne segue che le possibili soluzioni razionali dell'equazione $x^5 - 2x^3 + 1 = 0$ sono $x = 1$ oppure $x = -1$. Sostituendo tali valori al polinomio $p(x) = x^5 - 2x^3 + 1$ osserviamo che:

$$p(1) = 1 - 2 + 1 = 0,$$
$$p(-1) = -1 + 2 + 1 \neq 0.$$

Possiamo quindi concludere che $x = 1$ è l'unica soluzione razionale dell'equazione considerata.

9 L'equazione considerata non ha soluzioni reali poiché il prodotto di due numeri minori o uguali di 1 $\left(\operatorname{sen} 2x \leq 1,\ \cos\frac{x}{2} \leq 1\right)$ è ancora un numero minore o uguale di 1 e quindi non può essere uguale a 12.

10 Poiché tra le 16 femmine vi è una sola persona di nome «Maria», le possibili coppie di femmine comprendenti «Maria» sono 15. Analogamente, le possibili coppie di maschi comprendenti «Antonio» sono 11. Le possibili delegazioni comprendenti «Maria» e «Antonio» sono, perciò, $15 \cdot 11$ cioè 165.

Per esercitarti ancora sugli argomenti trattati nel	Svolgi il
Problema 1	• Problema 2 pag. W 174 • Esercizio 64 pag. Q 118 • Esercizio 252 pag. W 121
Problema 2	• Problema 1 pag. W 174 (punti a, b e c) • Problema 2 pag. W 172 • Problema 11 pag. V 283
Quesito 1	• Quesito 6 pag. Q 154
Quesito 2	• Problema 18 pag. π 98 • Esercizio 160 pag. π 93
Quesito 3	• Esercizio 194 pag. V 133 • Esercizio 195 pag. V 133
Quesito 4	• Esercizio 210 pag. V 134 • Esercizio 134 pag. W 128
Quesito 5	• Esercizio 293 pag. V 65
Quesito 6	• Esercizio 12 pag. V 113 • Esercizio 14 pag. V 113
Quesito 7	• Esercizio 2 pag. ι 21 • Esercizio 5 pag. ι 21
Quesito 9	• Esercizio 26 pag. Q 33 • Esercizio 54 pag. Q 35
Quesito 10	• Quesito 11 pag. α 40 • Quesito 12 pag. α 40