ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO • 2005
Sessione suppletiva

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1

Sono dati una piramide triangolare regolare e il prisma retto inscritto in essa in modo che una base sia la sezione della piramide con il piano equidistante dal suo vertice e dalla sua base.

A) Ammesso di conoscere il volume della piramide, dire se è possibile calcolare il volume del prisma e fornire una esauriente spiegazione della risposta.

B) Posto che lo spigolo della base *ABC* della piramide sia lungo 4 cm:
   1) calcolare la misura dello spigolo della base *MNP* del prisma, complanare ad *ABC*;
   2) supposto che gli spigoli *AB* e *MN* siano paralleli, riferire il piano dei triangoli *ABC* e *MNP* a un sistema di assi cartesiani avente l'origine in *A* e l'asse delle ascisse coincidente con la retta *AB* e trovare le coordinate dei vertici di tali triangoli;
   3) determinare quindi l'equazione della parabola avente l'asse perpendicolare alla retta *AB* e passante per i punti *A*, *B*, *M* e verificare che passa pure per *N*;
   4) calcolare le aree delle parti in cui la parabola trovata divide i triangoli *ABC* e *MNP*;
   5) spiegare esaurientemente, col metodo preferito, com'è posizionata la circonferenza circoscritta al triangolo *MNP* rispetto al triangolo *ABC*.

PROBLEMA 2

È assegnata la funzione $f_a(x) = \dfrac{a}{1+x^2}$, dove a è un parametro reale non nullo.

1) Dopo aver fornito la definizione di funzione limitata, spiegare perché la funzione $f_a(x)$ è limitata.
2) Una volta riferito il piano a un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy) e indicato con A il punto di massimo del grafico G della funzione quando $a > 0$, scrivere l'equazione della circonferenza γ di diametro OA.
3) Determinare quanti e quali punti hanno in comune la circonferenza γ e la curva G, quando a varia nell'insieme dei numeri reali positivi.
4) Calcolare il valore $\overline{a}$ di a per il quale la circonferenza γ e la curva G hanno in comune i vertici di un triangolo equilatero.
5) Dopo aver controllato che il valore $\overline{a}$ sopraddetto è 4, indicare con $\overline{\gamma}$ e $\overline{G}$ la circonferenza e la curva corrispondenti a tale valore e calcolare le aree delle regioni piane in cui la curva $\overline{G}$ divide il cerchio delimitato da $\overline{\gamma}$.

QUESTIONARIO

1 È dato un trapezio rettangolo, in cui le bisettrici degli angoli adiacenti al lato obliquo si intersecano in un punto del lato perpendicolare alle basi.
Dimostrare che il triangolo avente per vertici questo punto e gli estremi del lato obliquo è rettangolo e trovare quale relazione lega il lato obliquo alle basi del trapezio.

2 Siano *AB*, *AC*, *AD* tre spigoli di un cubo. Sapendo che uno spigolo è lungo *s*, calcolare la distanza del vertice *A* dal piano dei punti *B*, *C*, *D*.

3 Alberto e Gianna sono chiamati a risolvere la seguente equazione: $\operatorname{sen} x \cos x = \frac{1}{4}$. Alberto ottiene come soluzione gli angoli x tali che: $x = \frac{\pi}{12} + k\pi$ oppure $x = \frac{5}{12}\pi + k\pi$ (k intero qualsiasi); Gianna trova la seguente soluzione: $x = (-1)^k \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}$ (k intero qualsiasi).
È vero o è falso che Alberto ha risolto correttamente e Gianna no? Fornire una risposta esauriente.

4 Si consideri la seguente equazione in x:

$(k-2)x^2 - (2k-1)x + (k+1) = 0$, dove k è un parametro reale diverso da 2.

Indicate con x' e x'' le sue radici, calcolare i limiti di $x' + x''$ quando k tende a 2, a $+\infty$ e a $-\infty$.

5 Il limite della funzione $(1-x)^{\frac{1}{x}}$ per $x \to 0$:
A) è uguale a 1;
B) è uguale $+\infty$;
C) non esiste;
D) è uguale a e;
E) è uguale a $\frac{1}{e}$,

con e la base dei logaritmi naturali.
Una sola risposta è corretta. Individuarla e fornirne una spiegazione esauriente.

6 Fornire un esempio di funzione reale di variabile reale $f(x)$ avente le seguenti caratteristiche:

$f(1) = 1, \quad f'(1) = 0, \quad f''(1) < 0.$

7 In un piano, riferito a un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le rette r ed s di equazioni rispettivamente $2x + my = 1$ e $mx - 2y = 2$, dove m è un parametro reale. Qual è l'equazione del luogo geometrico descritto dal punto di intersezione delle due rette al variare di m?

8 È vero o falso che le due funzioni $\ln(x^2-4)$ e $\ln(x+2) + \ln(x-2)$ hanno lo stesso grafico? Fornire una esauriente spiegazione della risposta.

9 Le parti letterali dei termini dello sviluppo del binomio $(a+b)^{10}$, ordinati secondo le potenze decrescenti di a e crescenti di b, sono rispettivamente:

$a^{10},\ a^9b,\ a^8b^2,\ a^7b^3,\ a^6b^4,\ a^5b^5,\ a^4b^6,\ a^3b^7,\ a^2b^8,\ ab^9,\ b^{10}.$

Elencare i loro coefficienti e giustificare in modo esauriente la risposta.

10 Una classe è formata da 27 alunni: 15 femmine e 12 maschi. Si deve costituire una delegazione di 5 alunni, di cui 3 femmine e 2 maschi. Quante sono le possibili delegazioni?

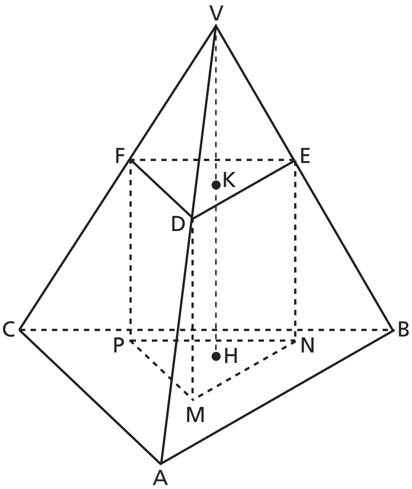
Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

PROBLEMA 1

A) Nella figura 1 sono disegnati la piramide triangolare regolare, di base *ABC* equilatera e altezza *VH*, e il prisma triangolare inscritto nella piramide, di base *DEF* equilatera e altezza $KH = \frac{1}{2} VH$.

La piramide triangolare di vertice *V* e base *DEF* è simile alla piramide di base *ABC* e vertice *V*, con rapporto di similitudine $k = \frac{1}{2}$ per ipotesi, pertanto i volumi delle due piramidi hanno rapporto $k^3 = \frac{1}{8}$:

$$\mathrm{Vol}_{DEFV} = \frac{1}{8} \mathrm{Vol}_{ABCV}.$$



▲ **Figura 1.**

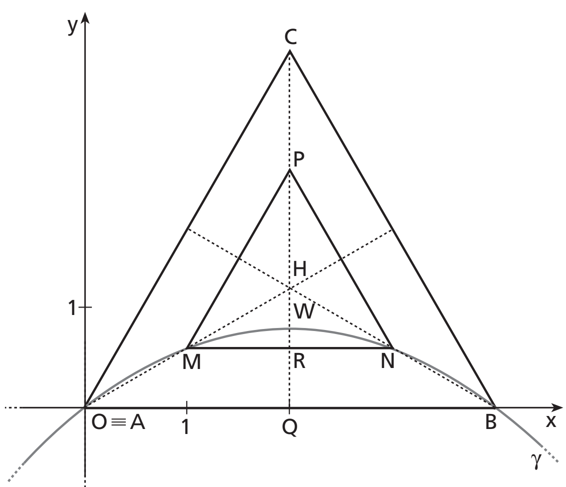
Ora, la piramide *DEFV* ha base e altezza congruenti al prisma inscritto di partenza: essa è quindi equivalente alla terza parte del prisma cioè $\mathrm{Vol}_{DEFV} = \frac{1}{3} \mathrm{Vol}_{\text{prisma}}$. Sostituendo alla relazione precedente si trova:

$$\frac{1}{3} \mathrm{Vol}_{\text{prisma}} = \frac{1}{8} \mathrm{Vol}_{ABCV} \quad \rightarrow \quad \mathrm{Vol}_{\text{prisma}} = \frac{3}{8} \mathrm{Vol}_{ABCV}.$$

In conclusione, il volume del prisma inscritto è $\frac{3}{8}$ del volume della piramide *ABCV*.

B1) Nel punto A) si è osservato che i triangoli equilateri *MNP* e *ABC* sono simili con rapporto di similitudine $k = \frac{1}{2}$. Se il lato di *ABC* misura 4 cm, il lato di *MNP* è lungo 2 cm.

B2) Nella figura 2 sono rappresentati i triangoli *ABC* e *MNP* nel sistema di assi cartesiani come richiesto.



◀ **Figura 2.**

I punti A e B hanno coordinate $A(0;\ 0)$ e $B(4;\ 0)$; il punto C ha ascissa $\dfrac{x_A + x_B}{2} = 2$ e ordinata pari all'altezza del triangolo equilatero ABC, ovvero $2\sqrt{3}$. Pertanto $C(2;\ 2\sqrt{3})$. Il punto H è ortocentro, incentro, baricentro del triangolo equilatero ABC e del triangolo equilatero MNP: esso divide la mediana CQ in due parti, una doppia dell'altra, per cui $H\left(2;\ \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)$. Per il rapporto di similitudine tra i due triangoli, risulta poi che M è punto medio di AH, come N lo è di BH e P di CH. Attraverso la formula del punto medio di un segmento si trova: $M\left(1;\ \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$, $N\left(3;\ \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$ e $P\left(2;\ \dfrac{4}{3}\sqrt{3}\right)$.

B3) Una parabola con asse di simmetria parallelo all'asse y ha equazione generica $y = ax^2 + bx + c$.
Poiché la parabola passa per i punti $A(0;\ 0)$, $B(4;\ 0)$ e $M\left(1;\ \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$, si ottiene il sistema in a, b, c:

$$\begin{cases} c = 0 \\ 16a + 4b + c = 0 \\ a + b + c = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \end{cases} \to \begin{cases} c = 0 \\ 4a + b = 0 \\ a + b = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \end{cases} \to \begin{cases} c = 0 \\ b = -4a \\ -3a = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \end{cases} \to \begin{cases} a = -\dfrac{\sqrt{3}}{9} \\ b = \dfrac{4}{9}\sqrt{3} \\ c = 0 \end{cases}.$$

La parabola ha equazione $y = -\dfrac{\sqrt{3}}{9}x^2 + \dfrac{4}{9}\sqrt{3}x$. Essa passa per il punto N poiché tale punto è simmetrico al punto M della parabola, rispetto all'asse di simmetria. Si può verificare anche algebricamente che le coordinate di N soddisfano l'equazione della parabola:

$$\frac{\sqrt{3}}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{9} \cdot 9 + \frac{4}{9}\sqrt{3} \cdot 3 \to \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Nella figura 2 è rappresentato il grafico della parabola.

B4) Si valuta dapprima l'area della superficie S_1 intercettata dal triangolo MNP sulla parabola che ha vertice $W\left(2;\ \dfrac{4}{9}\sqrt{3}\right)$. Per la formula del segmento parabolico si trova:

$$S_1 = \frac{2}{3}\,\overline{WR} \cdot \overline{MN} = \frac{2}{3}\left(\frac{4}{9}\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cdot 2 = \frac{4}{27}\sqrt{3}.$$

L'area S_2 della parte restante del triangolo MNP si calcola per differenza, tenendo conto che l'area del triangolo vale $S_{MNP} = \dfrac{1}{2} 2 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2 = \sqrt{3}$. Si ottiene:

$$S_2 = \sqrt{3} - \frac{4}{27}\sqrt{3} = \frac{23}{27}\sqrt{3}.$$

In maniera analoga si trovano le aree delle parti in cui la parabola divide il triangolo ABC.
Il segmento parabolico di base AB ha area:

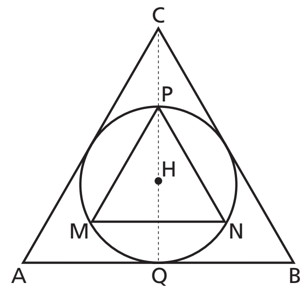
$$S_3 = \frac{2}{3}\,\overline{WQ} \cdot \overline{AB} = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{9}\sqrt{3} \cdot 4 = \frac{32}{27}\sqrt{3}.$$

L'area S_4 della parte restante del triangolo ABC si calcola per differenza, tenendo conto che l'area del triangolo vale $S_{ABC} = 4S_{MNP} = 4\sqrt{3}$. Quindi:

$$S_4 = 4\sqrt{3} - \frac{32}{27}\sqrt{3} = \frac{76}{27}\sqrt{3}.$$

B5) La circonferenza circoscritta al triangolo equilatero MNP ha centro nel circocentro H del triangolo e raggio $r = \overline{HP}$, cioè $r = \frac{2}{3}\sqrt{3}$ (figura 3).

Tale circonferenza coincide con la circonferenza inscritta nel triangolo equilatero ABC. Infatti quest'ultima ha centro in H e ha raggio $r' = \overline{HQ}$, cioè $r' = \frac{2}{3}\sqrt{3}$.



▶ **Figura 3.**

PROBLEMA 2

1) Una funzione $f(x)$ si definisce limitata nel suo insieme di definizione A se esiste un numero reale positivo M tale che $|f(x)| \leq M \ \forall x \in A$.

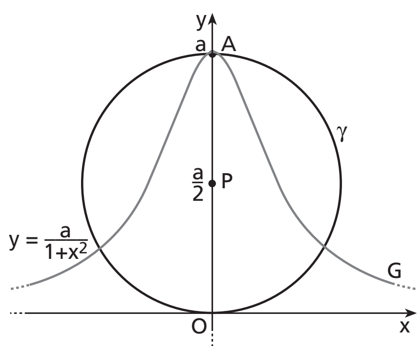
La funzione $f_a(x) = \frac{a}{1+x^2}$ ha come campo di esistenza l'insieme dei numeri reali. Osservando che $1 + x^2 \geq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, si può scrivere $|f_a(x)| = \left|\frac{a}{1+x^2}\right| \leq |a|$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Pertanto la funzione è limitata nel campo reale.

2) Si studia il grafico G della funzione $f_a(x) = \frac{a}{1+x^2}$, con a positivo. Essa ha campo di esistenza $\mathbb{R}$; è simmetrica rispetto all'asse delle y ed è sempre positiva; ha asintoto orizzontale $y = 0$, poiché $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{a}{1+x^2} = 0$; ha derivata $f'_a(x) = \frac{-2ax}{(1+x^2)^2}$, pertanto ha massimo assoluto nel punto $A(0; a)$; ha derivata seconda $f''_a(x) = \frac{-2a(1-3x^2)}{(1+x^2)^3}$, dunque ha flessi nei punti $x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$.

La circonferenza di diametro OA ha centro nel punto $P\left(0; \frac{a}{2}\right)$ e raggio uguale ad $\frac{a}{2}$. La sua equazione è:

$$x^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} \rightarrow x^2 + y^2 - ay = 0.$$

Nella figura 4 è rappresentato il grafico G della funzione f_a per un generico a e il grafico γ della circonferenza.



▲ **Figura 4.**

3) Per determinare le intersezioni delle curve γ e G bisogna risolvere il sistema delle loro equazioni:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - ay = 0 \\ y = \dfrac{a}{1+x^2} \end{cases}.$$

L'equazione risolvente è:

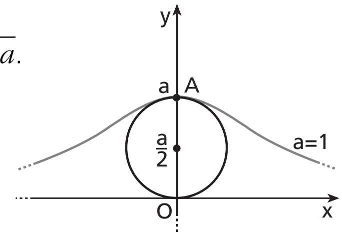
$$x^2 + \frac{a^2}{(1+x^2)^2} - \frac{a^2}{1+x^2} = 0 \rightarrow x^2(1+x^2)^2 + a^2 - a^2(1+x^2) = 0 \rightarrow x^2(1+x^2)^2 - a^2x^2 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2(x^4 + 2x^2 - a^2 + 1) = 0.$$

Per la legge di annullamento del prodotto: $x^2 = 0 \vee x^2 = -1 \pm a$.
Tenendo conto che a è positivo, le soluzioni sono: $x = 0 \vee x = \pm\sqrt{-1+a}$.
In particolare,

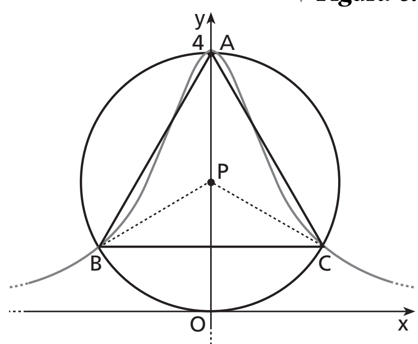
se $a > 1$, le curve si intersecano in tre punti: $(0; a)$, $(-\sqrt{a-1}; 1)$, $(\sqrt{a-1}; 1)$;
se $a \leq 1$, le curve hanno solo il punto $(0; 1)$ in comune.

La figura 4 mostra dunque il caso in cui $a > 1$, mentre la figura 5 rappresenta le due curve per $a = 1$.



▲ **Figura 5.**

▼ **Figura 6.**



4) Indicati con A, B, C i punti di intersezione delle due curve (figura 6), le loro coordinate sono: $A(0; a)$, $B(-\sqrt{a-1}; 1)$, $C(\sqrt{a-1}; 1)$, con $a > 1$.
Sfruttando la simmetria della figura, affinché il triangolo ABC sia equilatero, è sufficiente imporre $\overline{AC} = \overline{BC}$:

$$\sqrt{(\sqrt{a-1})^2 + (1-a)^2} = 2\sqrt{a-1} \rightarrow \sqrt{a-1+1+a^2-2a} =$$
$$= 2\sqrt{a-1} \rightarrow \sqrt{a^2-a} = 2\sqrt{a-1}.$$

Elevando al quadrato e semplificando per $(a-1)$ si ottiene $a = 4$.

5) Per $a = 4$, i punti A, B, C hanno coordinate $A(0; 4)$, $B(-\sqrt{3}; 1)$, $C(\sqrt{3}; 1)$. Osservando la figura 6, la curva $\overline{G}$ divide il cerchio delimitato da $\overline{\gamma}$ in tre parti, di cui due uguali per simmetria. Per determinare l'area della regione mistilinea $ACOB$, è sufficiente calcolare l'area della superficie compresa tra la curva $\overline{G}$ e il segmento BC e sommare a essa l'area del segmento circolare OBC. Mentre il primo addendo si determina con un calcolo integrale, l'area del segmento circolare si trova per differenza tra il settore circolare $BPCO$ di angolo $B\hat{P}C = 120°$ e il triangolo PBC. Pertanto risulta:

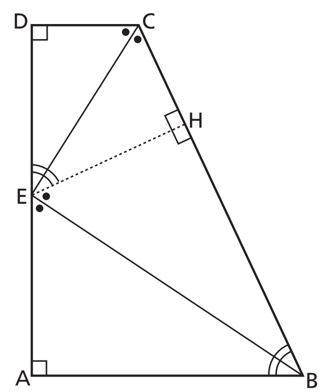
$$S_{ACOB} = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left(\frac{4}{1+x^2} - 1 \right) dx + \left[\frac{120}{360}\pi(2)^2 - \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3}(2-1) \right] =$$
$$= [4 \operatorname{arctg} x - x]_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} + \frac{4}{3}\pi - \sqrt{3} = \frac{8}{3}\pi - 2\sqrt{3} + \frac{4}{3}\pi - \sqrt{3} = 4\pi - 3\sqrt{3}.$$

L'area S di ciascuna delle due restanti regioni, tra loro congruenti, comprese tra la curva $\overline{G}$ e gli archi inferiori AB e AC, si ottiene come metà della differenza tra l'area della circonferenza $\overline{\gamma}$ e l'area S_{ACOB}:

$$S = \frac{\pi(2)^2 - (4\pi - 3\sqrt{3})}{2} = \frac{3}{2}\sqrt{3}.$$

QUESTIONARIO

1 Nel trapezio rettangolo $ABCD$ (figura 7) il segmento EB è bisettrice dell'angolo $A\hat{B}C$ ed EC è bisettrice dell'angolo $B\hat{C}D$. Tali angoli sono supplementari perché angoli coniugati formati dalle parallele AB e DC e dalla trasversale BC. Pertanto gli angoli $E\hat{B}C$ e $B\hat{C}E$, essendo metà di angoli supplementari, sono tra loro complementari.
Il triangolo CEB, avendo due angoli complementari, è quindi retto in E.
Si tracci la perpendicolare EH al lato BC. Risulta:
$D\hat{E}C \cong C\hat{E}H \cong E\hat{B}C$, perché complementari di angoli congruenti;
$E\hat{C}B \cong B\hat{E}H \cong A\hat{E}B$, poiché complementari di angoli congruenti.



▲ **Figura 7.**

Pertanto i triangoli *DEC* e *CEH* sono congruenti per il secondo criterio di congruenza, come pure i triangoli *ABE* e *BEH*. In particolare, $CD \cong CH$ e $AB \cong BH$.
Essendo $BC = CH + BH$ si deduce che $BC = CD + AB$.
In conclusione, la somma delle basi del trapezio rettangolo è uguale al lato obliquo.

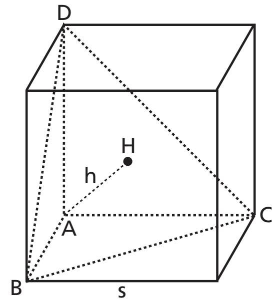
2 Il piano passante per i punti *B*, *C*, *D* delimita la piramide *ABCD* (figura 8).
Lo scopo è quello di determinare l'altezza *h* della piramide rispetto alla base triangolare *BCD*.
Si calcola dapprima il volume *V* della piramide:

$V = \frac{1}{3} S_{BCD} \cdot h$, dove S_{BCD} è l'area della base triangolare *BCD*.

Il triangolo *BCD*, avendo per lati le diagonali di tre facce del cubo, è equilatero e il lato vale $\sqrt{2}s$. Pertanto la sua area risulta:

$$S_{BCD} = \frac{1}{2}\sqrt{2}s \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{2}s = \frac{\sqrt{3}}{2}s^2$$

e il volume della piramide diventa $V = \frac{\sqrt{3}}{6}s^2 h$.



▶ **Figura 8.**

Esso può essere calcolato in altro modo, considerando come base il triangolo *ABC*. In tal caso $V = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot \overline{AD}$ ovvero $V = \frac{1}{6}s^3$. Uguagliando le due espressioni del volume si ottiene:

$\frac{\sqrt{3}}{6}s^2 h = \frac{1}{6}s^3$, da cui $h = \frac{\sqrt{3}}{3}s$.

3 Utilizzando la formula di duplicazione, l'equazione $\operatorname{sen} x \cos x = \frac{1}{4}$ è equivalente all'equazione $\operatorname{sen} 2x = \frac{1}{2}$ che ha soluzioni:

$$2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee 2x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi \quad \rightarrow \quad x = \frac{\pi}{12} + k\pi \vee x = \frac{5}{12}\pi + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$$

La risposta di Alberto è quindi esatta.

Le soluzioni fornite da Gianna, $x = (-1)^k \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}$, possono essere scritte diversamente distinguendo se *k* è pari o dispari, nel seguente modo:

- per *k* pari, cioè $k = 2k' (k' \in \mathbb{Z})$, $x = \frac{\pi}{12} + 2k'\frac{\pi}{2}$ ovvero $x = \frac{\pi}{12} + k'\pi$;
- per *k* dispari, cioè $k = 2k' + 1$ $(k' \in \mathbb{Z})$, $x = -\frac{\pi}{12} + (2k'+1)\frac{\pi}{2}$ ovvero $x = \frac{5}{12}\pi + k'\pi$.

Pertanto la soluzione data da Gianna è esatta ed è equivalente a quella fornita da Alberto.

4 Affinché l'equazione di secondo grado $(k-2)x^2 - (2k-1)x + (k+1) = 0$ ammetta soluzioni reali è necessario che il discriminante sia maggiore o uguale a zero:

$$\Delta = (2k-1)^2 - 4(k-2)(k+1) \geq 0 \quad \rightarrow \quad 4k^2 + 1 - 4k - 4k^2 + 4k + 8 \geq 0 \quad \rightarrow \quad 9 \geq 0.$$

Tale condizione è quindi verificata per qualsiasi $k \in \mathbb{R}$.
Poiché in una equazione di secondo grado, $ax^2 + bx + c = 0$, la somma delle radici vale $x' + x'' = -\frac{b}{a}$, risulta:

$$x' + x'' = \frac{2k-1}{k-2}, \quad k \neq 2.$$

I limiti richiesti valgono: $\lim_{k\to 2^{\pm}} \frac{2k-1}{k-2} = \pm\infty$, e quindi $\lim_{k\to 2} \frac{2k-1}{k-2}$ non esiste, $\lim_{k\to\pm\infty} \frac{2k-1}{k-2} = 2$.

5 Considerato il limite $\lim_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}$, si tratta di una forma indeterminata 1^{∞}. Si pone $y=-\frac{1}{x}$, per cui $x=-\frac{1}{y}$ e per $x\to 0^{\pm}$ risulta $y\to\mp\infty$. Sostituendo nel limite precedente si ottiene:

$$\lim_{x\to 0^{\pm}}(1-x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to\mp\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{-y} = \lim_{y\to\mp\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}}.$$

Applicando il limite notevole $\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$, ne consegue che $\lim_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{e}$.
La risposta esatta è pertanto la E).

6 Le caratteristiche $f(1)=1$, $f'(1)=0$, $f''(1)<0$ sono condizioni sufficienti per affermare che la funzione f ha un massimo nel punto $x=1$ per il teorema delle derivate successive. Un esempio di funzione con tale proprietà è una parabola di vertice $V(1;\ 1)$ e concavità rivolta verso il basso. Imponiamo all'equazione di una generica parabola $f(x) = ax^2 + bx + c$ tali condizioni:

$$\begin{cases} f(1)=1 \\ f'(1)=0 \\ f''(1)<0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a+b+c=1 \\ 2a+b=0 \\ 2a<0 \end{cases}.$$

Posto, per esempio, $a=-1$, il sistema diventa:

$$\begin{cases} c=0 \\ b=2 \\ a=-1 \end{cases}.$$

La funzione cercata ha equazione $f(x) = -x^2 + 2x$.

7 Per determinare l'equazione cartesiana del luogo geometrico si pongono a sistema le equazioni parametriche delle rette r e s:

$$\begin{cases} 2x+my=1 \\ mx-2y=2 \end{cases}.$$

Si ricava il parametro m dalla prima equazione e si sostituisce nella seconda:

$$\begin{cases} m=\frac{1-2x}{y},\ y\neq 0 \\ \frac{1-2x}{y}x-2y=2 \quad\rightarrow\quad x-2x^2-2y^2-2y=0 \quad\rightarrow\quad x^2+y^2-\frac{x}{2}+y=0 \end{cases}.$$

Per $y\neq 0$, il luogo geometrico è la circonferenza di equazione $x^2+y^2-\frac{x}{2}+y=0$. Essa ha centro $C\left(\frac{1}{4};-\frac{1}{2}\right)$, raggio $r=\frac{\sqrt{5}}{4}$ e passa per l'origine $O(0;\ 0)$.
È necessario discutere la condizione $y=0$ per vedere se la circonferenza è privata di qualche punto:

$$\begin{cases} y=0 \\ x^2+y^2-\frac{x}{2}+y=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \vee \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=0 \end{cases}.$$

Il punto (0; 0) non appartiene al luogo $\begin{cases} 2x + my = 1 \\ mx - 2y = 2 \end{cases}$ poiché, sostituendo, si trova il sistema impossibile:

$$\begin{cases} 0 = 1 \\ 0 = 2 \end{cases}.$$

Mentre per $\left(\frac{1}{2}; 0\right)$ si ha $\begin{cases} 1 = 1 \\ \frac{1}{2} m = 2 \end{cases} \quad \rightarrow \quad m = 4$, che è un valore accettabile per il parametro m.

In conclusione il luogo cercato è la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - \frac{x}{2} + y = 0$, privata del punto $O(0; 0)$.

8 La funzione $f(x) = \ln(x^2 - 4)$ è definita per $x^2 - 4 > 0$ cioè il suo campo di esistenza è $x < -2 \vee x > 2$. La funzione $g(x) = \ln(x + 2) + \ln(x - 2)$ è definita per $x + 2 > 0 \wedge x - 2 > 0$ ovvero per $x > 2$. Pertanto le funzioni f e g non possono avere lo stesso grafico perché hanno campi di esistenza differenti.
Si osserva che nella parte comune dei rispettivi campi, cioè per $x > 2$, la funzione g può essere espressa, secondo le proprietà dei logaritmi, come $g(x) = \ln(x + 2)(x - 2) = \ln(x^2 - 4)$.
Dunque le funzioni e i loro grafici non sono uguali nei loro campi di esistenza ma coincidono nell'intervallo $]2; +\infty[$.

9 Lo sviluppo del binomio $(a + b)^{10}$ si ottiene tramite la formula di Newton:

$$(a + b)^{10} = \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} a^{10-k} b^k.$$

I coefficienti delle parti letterali sono i coefficienti binomiali $\binom{10}{k}$ con $k = 0, 1, 2, \ldots, 10$. Pertanto essi risultano ordinatamente:

$$\binom{10}{0}, \binom{10}{1}, \binom{10}{2}, \binom{10}{3}, \binom{10}{4}, \binom{10}{5}, \binom{10}{6}, \binom{10}{7}, \binom{10}{8}, \binom{10}{9}, \binom{10}{10}, \text{ ovvero:}$$

$$1, \quad 10, \quad 45, \quad 120, \quad 210, \quad 252, \quad 210, \quad 120, \quad 45, \quad 10, \quad 1.$$

I coefficienti dello sviluppo si possono ottenere anche attraverso il metodo ricorsivo del triangolo di Tartaglia, sviluppato fino alla decima riga. La caratteristica di tale triangolo, per cui ogni coefficiente è la somma dei due coefficienti della riga precedente a destra e sinistra, è una proprietà dei coefficienti binomiali detta formula di Stifel:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

10 Le femmine sono 15 e devono essere scelte in gruppi di 3. Pertanto i modi di scelta delle ragazze sono le combinazioni di 15 elementi a 3 a 3, cioè $C_{15,3}$. In maniera analoga si stabilisce che le combinazioni per i maschi sono $C_{12,2}$. Il numero delle possibili delegazioni si ottengono moltiplicando $C_{15,3}$ per $C_{12,2}$:

$$C_{15,3} \cdot C_{12,2} = \binom{15}{3} \cdot \binom{12}{2} = 455 \cdot 66 = 30\,030.$$

Per esercitarti ancora sugli argomenti trattati nel	Svolgi il
Problema 1	• Quesito 6 pag. π 96 • Problema 10 pag. L 93 (punto a) • Esercizio 324 pag. L 229 • Esercizio 210 pag. L 215 • Esercizio 183 pag. L 210
Problema 2	• Esercizio 71 pag. V 245 • Esercizio 182 pag. L 138 • Problema 1 pag. W 164 (punti a, b)
Quesito 1	• Problema 2 pag. W 164 (punto a)
Quesito 2	• Quesito 10 pag. π 96 • Problema 17 pag. π 97 (punto b)
Quesito 3	• Test 234 pag. Q 49 • Esercizio 329 pag. Q 55 • Test 1 pag. Q 85
Quesito 4	• Esercizio 56 pag. U 162 • Esercizio 338 pag. U 178
Quesito 5	• Esercizio 266 pag. U 174 • Esercizio 268 pag. U 174
Quesito 6	• Esercizio 215 pag. V 194 • Quesito 4 pag. V 215 • Quesito 7 pag. V 288
Quesito 7	• Quesito 6 pag. L 357 (punto b) • Problema 14 pag. L 423 (punto a) • Quesito 3 pag. L 428
Quesito 8	• Esercizio 360 pag. N 64 • Esercizio 365 pag. N 64 • Quesito 5 pag. N 95
Quesito 9	• Esercizio 105 pag. α 33 • Quesito 4 pag. α 40
Quesito 10	• Esercizio 173 pag. α 37 • Problema 18 pag. α 41 (punto a)