ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO • 2005
Sessione straordinaria

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1

Considerato un triangolo ABC, acutangolo e isoscele sulla base BC, si chiami D il piede della sua altezza condotta per C e si costruisca, dalla stessa parte di A rispetto a BC, il punto E in modo che il triangolo ECD sia simile ad ABC.

a) Dimostrare che:
1) EC è perpendicolare a CB;
2) i triangoli EFC e AFD – dove F è il punto comune ai segmenti ED e AC – sono simili e, di conseguenza, anche i triangoli EFA e CFD sono simili e gli angoli $A\hat{E}F$ e $F\hat{C}D$ sono congruenti;
3) EA è parallela a CB;
4) il quadrilatero $AECD$ è inscrivibile in una circonferenza.

b) Ammesso che le misure di BC e CD, rispetto a un'assegnata unità di misura, siano 6 e $\frac{24}{5}$, dopo aver riferito il piano della figura a un conveniente sistema di assi cartesiani, determinare:
1) le coordinate dei punti A, B, C, D, E;
2) l'equazione della circonferenza circoscritta al quadrilatero $AECD$.

PROBLEMA 2

Nel piano, riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le curve di equazione:

[1] $\quad y = x^4 + ax^3 + bx^2 + c$.

a) Dimostrare che, nel punto in cui secano l'asse y, hanno tangente parallela all'asse x.

b) Trovare quale relazione deve sussistere fra i coefficienti a, b affinché la curva [1] volga la concavità verso le y positive in tutto il suo dominio.

c) Determinare i coefficienti a, b, c in modo che la corrispondente curva [1] abbia, nel punto in cui seca l'asse y, un flesso e la relativa tangente inflessionale la sechi ulteriormente nel punto di coordinate (2; 2).

d) Indicata con K la curva trovata, stabilire com'è situata rispetto all'asse x, fornendo una esauriente spiegazione della risposta.

e) Dopo aver verificato che la curva K presenta un secondo flesso, calcolare l'area della regione finita di piano delimitata da K e dalle due tangenti inflessionali.

QUESTIONARIO

1 Si considerino un tronco di piramide quadrangolare regolare, la cui base maggiore abbia area quadrupla della minore, e un piano α equidistante dalle basi del tronco. Dire se i dati sono sufficienti per calcolare il rapporto fra i volumi dei due tronchi in cui il tronco dato è diviso dal piano α.

2 Sia *ABC* un qualsiasi triangolo. Sui suoi lati ed esternamente a esso si costruiscano i tre quadrati *ABDE*, *BCFG* e *CAHL*. Dimostrare, con il metodo preferito, che i triangoli *AHE*, *BDG* e *CFL* sono equivalenti al triangolo *ABC*.

3 Luca e Claudia devono calcolare il valore di una certa espressione contenente logaritmi. Trovano come risultati rispettivamente: $\log_2 27 + \log_2 12$ e $2 + \log_2 81$.
Ammesso che il risultato ottenuto da Luca sia esatto, si può concludere che quello ottenuto da Claudia è sbagliato? Fornire una risposta esaurientemente motivata.

4 Dimostrare che ogni funzione del tipo $y = a\,\mathrm{sen}^2 x + b\,\mathrm{sen}\,x\cos x + c\cos^2 x$, dove a, b, c sono numeri reali non contemporaneamente nulli, ha di regola per grafico una sinusoide. C'è qualche eccezione?

5 Determinare il più grande valore dell'intero n per cui l'espressione $\sum_{k=0}^{n} 3^k$ non supera 10 000.

6 Dimostrare che il limite di $\cos x$, per x tendente a 0, è 1, esplicitando ciò che si ammette.

7 Determinare il dominio di derivabilità della funzione $f(x) = |x^2 - 1|$

8 Sia $f(x)$ una funzione continua per ogni x reale tale che $\int_0^2 f(x)dx = 4$. Dei seguenti integrali:

$$\int_0^1 f(2x)dx \quad \text{e} \quad \int_0^1 f\left(\frac{x}{2}\right)dx$$

se ne può calcolare uno solo in base alle informazioni fornite. Dire quale e spiegarne la ragione.

9 Dimostrare la seguente formula:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1},$$

dove n, k sono numeri naturali tali che $0 < k < n$. Essa spiega una delle regole sulle quali è basata la costruzione del «triangolo di Tartaglia» (da Niccolò Fontana, detto Tartaglia, 1505 ca. - 1557): enunciarla.

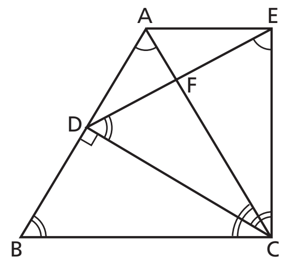
10 Calcolare quante sono le possibili «cinquine» che si possono estrarre da un'urna contenente i numeri naturali da 1 a 90, ognuna delle quali comprenda però i tre numeri 1, 2 e 3.

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

SOLUZIONE DELLA PROVA D'ESAME
CORSO DI ORDINAMENTO • 2005
Sessione straordinaria

PROBLEMA 1

a1. Considerato il triangolo acutangolo isoscele ABC (figura 1), con CD altezza condotta per C, si costruisce il triangolo isoscele ECD di base CD, simile al triangolo ABC. Pertanto i triangoli ABC e ECD hanno gli angoli ordinatamente congruenti.
Nel triangolo rettangolo BCD l'angolo $D\hat{B}C$ è complementare a $B\hat{C}D$. Poiché l'angolo $D\hat{C}E$ è congruente a $D\hat{B}C$ per costruzione, risulta che $D\hat{C}E$ è complementare a $B\hat{C}D$. Pertanto l'angolo $B\hat{C}E$ è retto perché somma di due angoli complementari ed EC è perpendicolare a CB.



▲ **Figura 1.**

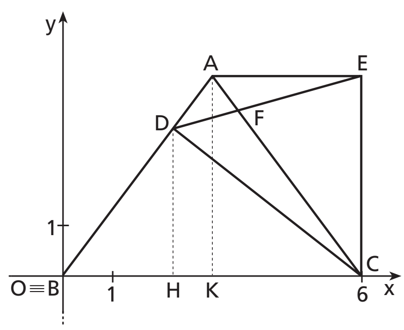
a2. Considerati i triangoli EFC e AFD, essi hanno: $A\hat{F}D \cong E\hat{F}C$ perché angoli opposti al vertice; $D\hat{A}F \cong F\hat{E}C$ per costruzione. I triangoli sono simili per il primo criterio di similitudine e quindi hanno i lati ordinatamente in proporzione. In particolare risulta: $AF : DF = EF : CF$. Ora, i triangoli EFA e CFD hanno due lati ordinatamente proporzionali e gli angoli compresi $A\hat{F}E$ e $D\hat{F}C$ congruenti perché opposti al vertice. Quindi, per il secondo criterio di similitudine i triangoli EFA e CFD sono simili e, in particolare, $A\hat{E}F$ e $F\hat{C}D$ sono congruenti.

a3. I triangoli EFA e CFD sono simili per la dimostrazione precedente, quindi $F\hat{A}E$ è congruente a $F\hat{D}C$. Ma $F\hat{D}C \cong B\hat{C}A$ per costruzione, pertanto, per la proprietà transitiva $F\hat{A}E = B\hat{C}A$. Considerati i segmenti EA e CB, essi formano con la trasversale AC angoli alterni interni congruenti e quindi, per il teorema inverso delle rette parallele, i segmenti EA e CB sono paralleli.

a4. Si osservino gli angoli del quadrilatero $AECD$. Poiché EA è parallelo a CB e $B\hat{C}E$ è retto per dimostrazioni precedenti, l'angolo $A\hat{E}C$ è anch'esso retto per il teorema delle rette parallele. L'angolo $A\hat{D}C$ del quadrilatero, opposto a $A\hat{E}C$, è retto per costruzione, pertanto il quadrilatero $AECD$ ha gli angoli opposti $A\hat{E}C$ e $A\hat{D}C$ supplementari. Tenendo conto che la somma degli angoli interni di un quadrilatero è pari a due angoli piatti, anche i restanti angoli interni e opposti $D\hat{A}E$ e $E\hat{C}D$ del quadrilatero sono supplementari. Per il teorema inverso dei quadrilateri inscritti, il quadrilatero $AECD$ è quindi inscrivibile in una circonferenza.

b1. Si fissa un sistema cartesiano ortogonale centrato nel punto B e tale che il lato BC sia sull'asse positivo delle ascisse (figura 2).

Per ipotesi $\overline{BC} = 6$ e $\overline{CD} = \frac{24}{5}$, quindi le coordinate dei punti B e C sono: $B(0; 0)$ e $C(6; 0)$. Tracciata l'altezza DH del triangolo rettangolo BCD, si applica a esso il primo teorema di Euclide per ricavare HC:



▲ **Figura 2.**

$$\overline{CD}^2 = \overline{BC} \cdot \overline{HC} \quad \rightarrow \overline{HC} = \frac{\overline{CD}^2}{\overline{BC}} \quad \rightarrow \quad \overline{HC} = \frac{\left(\frac{24}{5}\right)^2}{6} = \frac{96}{25}.$$

Pertanto l'ascissa del punto D vale: $x_D = \overline{BH} = \overline{BC} - \overline{HC} \quad \rightarrow \quad x_D = 6 - \frac{96}{25} = \frac{54}{25}$.

Inoltre, per il secondo teorema di Euclide, risulta: $y_D = \overline{DH} = \sqrt{\overline{BH} \cdot \overline{HC}}$ ovvero $y_D = \sqrt{\frac{54}{25} \cdot \frac{96}{25}} = \frac{72}{25}$.
Il punto D ha coordinate $D\left(\frac{54}{25}; \frac{72}{25}\right)$.

Disegnata l'altezza AK del triangolo isoscele ABC, essa è anche mediana della base BC, per cui $x_A = \overline{BK} = 3$. Ora, i triangoli BHD e BKA sono simili per il primo criterio di similitudine e hanno i lati ordinatamente proporzionali. Vale la relazione $\overline{BH} : \overline{BK} = \overline{DH} : \overline{AK}$ e si ricava:

$$\overline{AK} = \frac{\overline{BK} \cdot \overline{DH}}{\overline{BH}} \quad \rightarrow \quad \overline{AK} = \frac{3 \cdot \frac{72}{25}}{\frac{54}{25}} = 4.$$

Poiché $\overline{AK} = y_A$ risulta $y_A = 4$ e il punto A ha coordinate $A(3; 4)$.
Infine, essendo AE parallelo a BC e EC perpendicolare a BC per dimostrazioni precedenti, si deduce che il punto E ha coordinate $E(6; 4)$.

b2. Il quadrilatero $AECD$ ha gli angoli opposti $A\hat{D}C$ e $A\hat{E}C$ entrambi retti, rispettivamente per costruzione e per dimostrazione precedente. Pertanto la sua diagonale AC sarà il diametro della circonferenza a esso circoscritta. Il centro G di tale circonferenza è il punto medio del segmento AC, mentre il raggio r è la metà della lunghezza dello stesso segmento. Risulta:

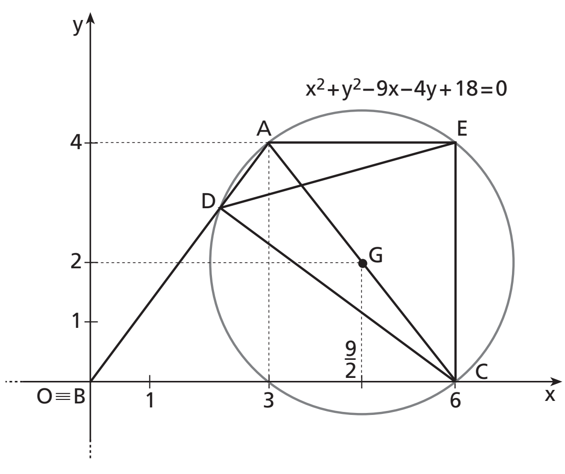
$$G \begin{cases} x = \dfrac{x_A + x_C}{2} & \rightarrow \quad x = \dfrac{9}{2} \\ y = \dfrac{y_A + y_C}{2} & \rightarrow \quad y = 2 \end{cases}$$

$$r = \frac{\overline{AC}}{2} \quad \rightarrow \quad r = \frac{\sqrt{(3-6)^2 + (4-0)^2}}{2} = \frac{5}{2}.$$

Secondo la definizione della circonferenza come luogo geometrico, essa ha equazione:

$$(x - x_G)^2 + (y - y_G)^2 = r^2 \text{ cioè}$$
$$\left(x - \frac{9}{2}\right)^2 + (y-2)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 \quad \rightarrow \quad x^2 + y^2 - 9x - 4y + 18 = 0.$$

Nella figura 3 è tracciata la circonferenza circoscritta al quadrilatero $AECD$.



◀ **Figura 3.**

PROBLEMA 2

a) Le curve di equazione $y = f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + c$ sono funzioni polinomiali continue e derivabili nell'insieme dei numeri reali. Le derivate prime hanno forma: $y' = 4x^3 + 3ax^2 + 2bx$ e, per definizione di derivata, esse si annullano nei punti in cui la tangente è parallela all'asse x. Pertanto, ponendo $y' = 0$, si ottiene $4x^3 + 3ax^2 + 2bx = 0$ che ha soluzioni $x = 0$ e $x = \dfrac{-3a \pm \sqrt{9a^2 - 32b}}{8}$. Si conclude che nel punto $x = 0$, in cui ogni curva seca l'asse y, le curve [1] hanno tangente parallela all'asse x.

b) Data una funzione con derivata prima e seconda continue in un intervallo, condizione sufficiente affinché essa rivolga la concavità verso l'alto in un punto x_0, interno all'intervallo, è che la derivata seconda in quel punto sia positiva. Se $y = x^4 + ax^3 + bx^2 + c$, la derivata prima è $y' = 4x^3 + 3ax^2 + 2bx$ e la derivata seconda ha espressione: $y'' = 12x^2 + 6ax + 2b$. Posto $y'' > 0$, risulta:

$$12x^2 + 6ax + 2b > 0 \quad \rightarrow \quad 6x^2 + 3ax + b > 0\,.$$

L'equazione associata, $6x^2 + 3ax + b = 0$, ammette soluzioni reali $x = \dfrac{-3a \pm \sqrt{9a^2 - 24b}}{12}$, con $\Delta = 9a^2 - 24b \geq 0$.
Pertanto la disequazione è sempre verificata nel campo reale se il discriminante Δ è negativo. La funzione rivolge la concavità verso l'alto su tutto $\mathbb{R}$ se vale la seguente relazione tra a e b:

$$9a^2 - 24b < 0 \quad \rightarrow \quad 3a^2 - 8b < 0\,.$$

La condizione è sufficiente e può non contemplare altri casi in cui la funzione ha concavità verso l'alto su tutto il campo reale. È infatti necessario discutere il segno della derivata prima e della derivata seconda, in relazione al discriminante Δ.
Se $\Delta > 0$, cioè $3a^2 - 8b > 0$, la derivata seconda è negativa in un intervallo. In esso la funzione ha concavità rivolta verso il basso. Pertanto, per $3a^2 - 8b > 0$, la curva non mantiene la concavità verso l'alto nel suo campo di esistenza.
Se $\Delta = 0$, cioè $3a^2 = 8b$, la derivata seconda è positiva per $x \neq -\dfrac{a}{4}$ e nulla per $x = -\dfrac{a}{4}$. La derivata prima, $y' = 4x^3 + 3ax^2 + 2bx$, diventa $y' = x\left(4x^2 + 3ax + \dfrac{3}{4}a^2\right)$: essa è negativa per $x < 0$, nulla per $x = 0$, positiva per $x > 0$. Pertanto la funzione ha un minimo in $x = 0$ e non possiede flessi: essa presenta concavità verso l'alto in $\mathbb{R}$.
In conclusione, la curva $y = x^4 + ax^3 + bx^2 + c$ rivolge la concavità verso l'alto nel suo campo di esistenza $\mathbb{R}$ se a e b soddisfano la relazione: $3a^2 - 8b \leq 0$.

c) Nella soluzione del punto a) si è trovato che la curva parametrica ha tangente orizzontale nel punto $x = 0$, ovvero nel punto del grafico di coordinate $(0; c)$. Affinché vi sia un flesso, è necessario che la derivata seconda $f''(x) = 12x^2 + 6ax + 2b$ si annulli per $x = 0$ cioè $f''(0) = 0$. Risulta quindi:

$$f''(0) = 2b = 0 \quad \rightarrow \quad b = 0.$$

Se la tangente orizzontale inflessionale in $(0; c)$ interseca la curva in un ulteriore punto, $(2; 2)$, si deduce che $c = 2$.
Infine, poiché la curva passa per il punto $(2; 2)$ deve valere $2 = f(2)$, cioè:

$$2 = 2^4 + a \cdot 2^3 + b \cdot 2^2 + c \quad \rightarrow \quad 8a + 4b + c = -14.$$

Si pongono a sistema le relazioni trovate:

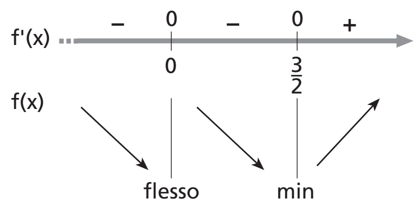
$$\begin{cases} b=0 \\ c=2 \\ 8a+4b+c=-14 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b=0 \\ c=2 \\ a=-2 \end{cases}$$

La curva ha equazione: $y=x^4-2x^3+2$.

d) La curva K ha equazione $f(x)=x^4-2x^3+2$ e si ha: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=+\infty$. Per $x<0$ la funzione è sempre positiva e in questa regione la curva è situata sopra l'asse x. Rimane da valutare l'andamento per $x\geq 0$. La derivata prima è $f'(x)=4x^3-6x^2=2x^2(2x-3)$ e la tabella del suo segno è riportata nella figura 4.

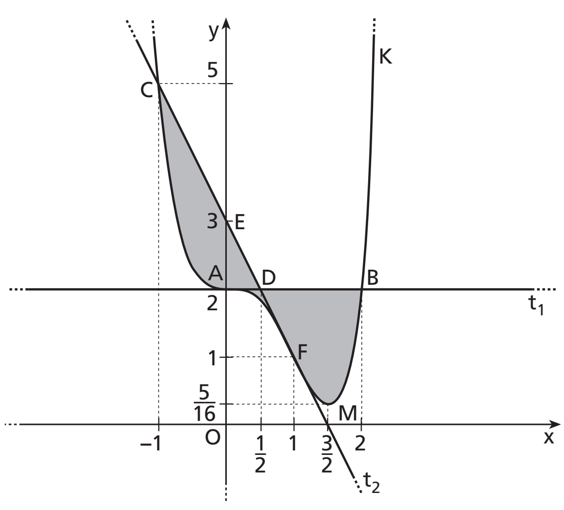
Per $0\leq x<\frac{3}{2}$ la funzione è decrescente, per $x>\frac{3}{2}$ la funzione è crescente e $x=\frac{3}{2}$ è minimo assoluto. Poiché il minimo ha immagine $f\left(\frac{3}{2}\right)=\left(\frac{3}{2}\right)^4-2\left(\frac{3}{2}\right)^3+2=\frac{5}{16}$ positiva, per definizione di crescenza e decrescenza e tenendo conto della continuità, la funzione è positiva nei due intervalli e quindi per $x\geq 0$.

In conclusione il grafico della funzione è situato sopra l'asse delle x.



▲ **Figura 4.**

e) Si studia la curva K di equazione $f(x)=x^4-2x^3+2$ per rappresentarla in un sistema cartesiano. Il campo di esistenza è quello dei numeri reali. Per le dimostrazioni precedenti, essa interseca l'asse y nel punto $A(0; 2)$, dove ha un flesso orizzontale con tangente inflessionale di equazione t_1: $y=2$; è sempre positiva ed ha un minimo di coordinate $M\left(\frac{3}{2}; \frac{5}{16}\right)$. La derivata seconda vale $f''(x)=12x^2-12x$, pertanto la funzione ha un ulteriore flesso nel punto $x=1$, di coordinate $F(1; 1)$. La corrispondente tangente inflessionale ha equazione t_2: $y-1=f'(1)\,(x-1)$ cioè $y=-2x+3$. Essa interseca la curva anche nel punto $C(-1; 5)$. Le rette t_1 e t_2 si intersecano in un punto D di coordinate $D\left(\frac{1}{2}; 2\right)$. Nella figura 5 è tracciata la curva, le tangenti inflessionali e la regione compresa tra esse.



◀ **Figura 5.**

La regione finita di piano è formata dal triangolo ADE e da due figure mistilinee CAE e $AFMB$, di superficie rispettivamente S_{ADE}, S_{CAE} e S_{AFMB}. Esse si calcolano per via geometrica e per via integrale nel modo seguente:

$$S_{ADE} = \frac{1}{2}\overline{AD} \cdot \overline{AE} \quad \rightarrow \quad S_{ADE} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{4};$$

$$S_{CAE} = \int_{-1}^{0} (-2x + 3 - x^4 + 2x^3 - 2)dx = \left[-x^2 + x - \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{2}x^4 \right]_{-1}^{0} = \frac{13}{10};$$

$$S_{AFMB} = \int_{0}^{2} (2 - x^4 + 2x^3 - 2)dx = \left[-\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{2}x^4 \right]_{0}^{2} = \frac{8}{5}.$$

L'area S della regione finita di piano delimitata dalla curva K e dalle tangenti inflessionali vale:

$$S = S_{ADE} + S_{CAE} + S_{AFMB} \quad \rightarrow \quad S = \frac{1}{4} + \frac{13}{10} + \frac{8}{5} = \frac{63}{20}.$$

QUESTIONARIO

1 Nella figura 6 è rappresentato il tronco di piramide quadrangolare regolare la cui base maggiore $ABCD$ ha area S quadrupla della superficie S' della base minore $A'B'C'D'$. Il piano α è equidistante dalle basi del tronco per cui, indicata con $2h$ la misura dell'altezza HH', vale $\overline{HH''} = \overline{H''H'} = h$. Il piano intercetta sul tronco il quadrato $A''B''C''D''$ di area S''.

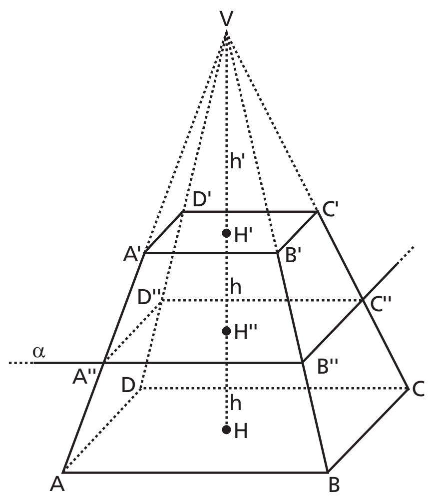


Figura 6.

Prolungati gli spigoli laterali si trova il vertice V della corrispondente piramide di base $ABCD$. Indicata con h' la misura dell'altezza VH', poiché le aree delle superfici di base di due piramidi simili sono proporzionali ai quadrati delle misure delle rispettive altrezze, vale la seguente proporzione:

$$S : (h' + 2h)^2 = S' : h'^2.$$

Essendo $S = 4S'$ per ipotesi, la relazione sopra diventa:

$$4S' : (h' + 2h)^2 = S' : h'^2 \quad \rightarrow \quad \frac{h' + 2h}{h'} = 2 \quad \rightarrow \quad h' = 2h.$$

Utilizzando tale risultato e applicando lo stesso teorema riferito al piano α si trova:

$$S : (4h)^2 = S'' : (3h)^2 \quad \rightarrow \quad S'' = \frac{9}{16}S \quad \rightarrow \quad S'' = \frac{9}{16} \cdot 4S' = \frac{9}{4}S'.$$

Indicati con V_1 e V_2 i volumi dei tronchi di piramide, rispettivamente inferiore e superiore, in cui risulta diviso il tronco di partenza, essi possono essere calcolati con la formula generale del volume del tronco di piramide. In tal caso il loro rapporto ha espressione:

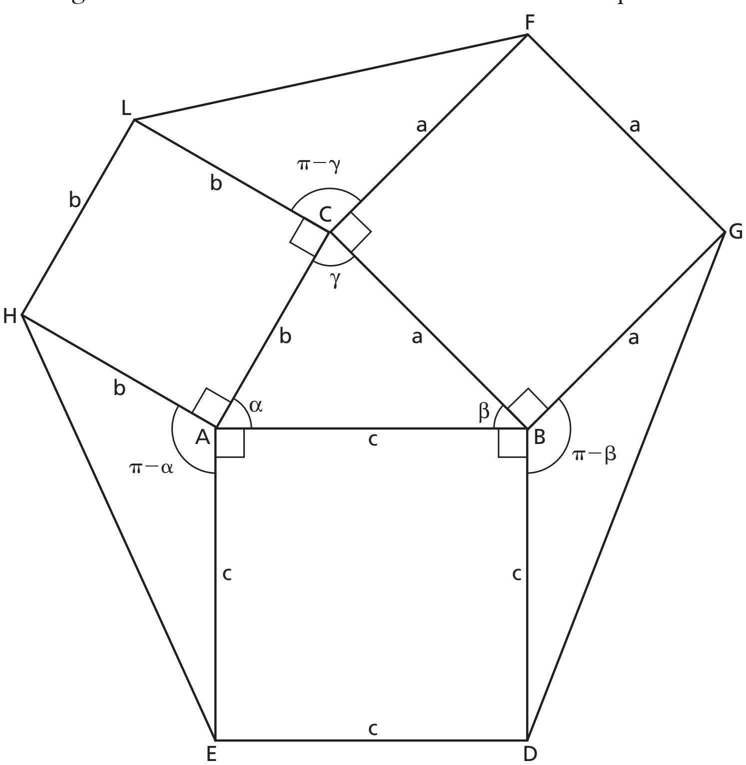
$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{1}{3}h(S + S'' + \sqrt{S \cdot S''})}{\frac{1}{3}h(S' + S'' + \sqrt{S' \cdot S''})}.$$

Per le relazioni trovate in precedenza si può scrivere:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\left(4S' + \frac{9}{4}S' + \sqrt{4S' \cdot \frac{9}{4}S'}\right)}{\left(S' + \frac{9}{4}S' + \sqrt{S' \cdot \frac{9}{4}S'}\right)} = \frac{4 + \frac{9}{4} + 3}{1 + \frac{9}{4} + \frac{3}{2}} = \frac{37}{19}.$$

Pertanto i dati sono sufficienti per calcolare tale rapporto.

2 Il triangolo ABC e la costruzione richiesta dal testo del quesito sono riportati nella figura 7.



◀ **Figura 7.**

Gli angoli $L\hat{C}F$ e $A\hat{C}B$ sono supplementari. Posto $A\hat{C}B = \gamma$, risulta quindi $L\hat{C}F = \pi - \gamma$. Analogamente $H\hat{A}E = \pi - C\hat{A}E = \pi - \alpha$ e $D\hat{B}G = \pi - A\hat{B}C = \pi - \beta$. Calcoliamo le aree dei triangoli mediante la relativa formula trigonometrica:

$$S_{LCF} = \frac{1}{2}ab\,\text{sen}(\pi - \gamma) = \frac{1}{2}ab\,\text{sen}\,\gamma;$$

$$S_{HAE} = \frac{1}{2}\, bc\,\text{sen}(\pi - \alpha) = \frac{1}{2}\, bc\,\text{sen}\,\alpha;$$

$$S_{BDG} = \frac{1}{2}\, ac\,\text{sen}(\pi - \beta) = \frac{1}{2}\, ac\,\text{sen}\,\beta;$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\, bc\,\text{sen}\,\alpha = \frac{1}{2}\, ac\,\text{sen}\,\beta = \frac{1}{2}\, ab\,\text{sen}\,\gamma.$$

Quindi, confrontando, otteniamo:

$$S_{ABC} = S_{LCF} = S_{HAE} = S_{BDG}.$$

3 Si considera il risultato di Claudia: $2 + \log_2 81$. Applicando la definizione di logaritmo e la proprietà del logaritmo di un prodotto si può scrivere:

$$\begin{aligned} 2 + \log_2 81 &= \log_2 4 + \log_2(3 \cdot 27) = \\ &= \log_2 4 + \log_2 3 + \log_2 27 = \log_2(4 \cdot 3) + \log_2 27 = \log_2 12 + \log_2 27. \end{aligned}$$

Pertanto il risultato di Claudia, essendo equivalente a quello di Luca, è esatto.

4 Una funzione sinusoidale ha espressione $y = A\,\text{sen}(\omega x + \varphi)$, con A e $\omega \neq 0$, dove $|A|$ è detta ampiezza, ω pulsazione e φ fase iniziale. Utilizzando le formule goniometriche del seno della somma di due angoli, essa può essere scritta come:

$$y = A\,\text{sen}(\omega x + \varphi) \quad \rightarrow \quad y = A\cos\varphi \cdot \text{sen}\,\omega x + A\,\text{sen}\,\varphi \cdot \cos\omega x.$$

Si consideri ora la funzione $y = a\,\text{sen}^2 x + b\,\text{sen}\,x\cos x + c\cos^2 x$. Si compiano le seguenti sostituzioni, che derivano dalle formule di duplicazione:

$$\text{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \qquad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}, \qquad \text{sen}\,x\cos x = \frac{\text{sen}\,2x}{2}.$$

La funzione diventa:

$$y = a\,\frac{1 - \cos 2x}{2} + \frac{b}{2}\,\text{sen}\,2x + c\,\frac{1 + \cos 2x}{2} \quad \rightarrow \quad y = \frac{b}{2}\,\text{sen}\,2x + \left(\frac{c}{2} - \frac{a}{2}\right) \cdot \cos 2x + \frac{a}{2} + \frac{c}{2}.$$

Se $a = c \neq 0$ e $b = 0$ la funzione è:

$$y = \frac{a + c}{2} = a,$$

quindi il suo grafico è una retta parallela all'asse x e non una sinusoide.
Se $a \neq c$, confrontiamo l'espressione della funzione ottenuta con l'espressione della funzione sinusoidale. Otteniamo:

$$\begin{cases} \dfrac{a}{2} + \dfrac{c}{2} = 0 \\ \dfrac{b}{2} = A\cos\varphi \\ \dfrac{c}{2} - \dfrac{a}{2} = A\,\text{sen}\,\varphi \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} a = -c \\ A\cos\varphi = \dfrac{b}{2}. \\ A\,\text{sen}\,\varphi = c \end{cases}$$

Eleviamo al quadrato ambo i membri della seconda e della terza equazione:

$$A^2\cos^2\varphi = \frac{b^2}{4}$$

$$A^2\operatorname{sen}^2\varphi = c^2$$

Sommiamo membro a membro e raccogliamo A^2:

$$A^2(\operatorname{sen}^2\varphi + \cos^2\varphi) = c^2 + \frac{b^2}{4} \quad \rightarrow \quad A = \pm\sqrt{c^2 + \frac{b^2}{4}}\ .$$

Consideriamo ancora la seconda e terza equazione e dividiamo membro a membro:

$$\frac{\cancel{A}\operatorname{sen}\varphi}{\cancel{A}\cos\varphi} = \frac{2c}{b} \quad \text{con } b \neq 0.$$

Pertanto la funzione di partenza, $y = a\operatorname{sen}^2 x + b\operatorname{sen}x\cos x + c\cos^2 x$, è sinusoidale se $a = -c$, con a, $c \neq 0$, $b \neq 0$ e ha forma $y = A\operatorname{sen}(\omega x + \varphi)$, con ampiezza $|A| = \sqrt{c^2 + \frac{b^2}{4}}$, pulsazione $\omega = 2$ e fase iniziale $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{2c}{b}$.

Se $a = -c \neq 0$, $b = 0$, la funzione si riduce alla forma: $y = c\cos 2x \ \rightarrow \ y = c\operatorname{sen}\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$, con $|A| = |c|$, $\omega = 2$ e $\varphi = \frac{\pi}{2}$ quindi essa è ancora sinusoidale.

Si può allora concludere che per a e c diversi da zero e $a \neq -c$, la funzione non è sinusoidale. Ugualmente,

- per $b = c = 0$ l'equazione si riduce a $y = \operatorname{sen}^2 x$ non sinusoidale;
- per $a = b = 0$ l'equazione si riduce a $y = \cos^2 x$ non sinusoidale.

5 L'espressione $\sum_{k=0}^{n} 3^k$ può essere scritta come $1 + \sum_{k=1}^{n} 3^k$. Il secondo addendo rappresenta la somma S_n dei primi n termini della progressione geometrica di ragione $q = 3$, con primo termine $a_1 = 3$. Per il teorema sulla somma parziale di una progressione geometrica, tale somma vale $S_n = a_1\frac{q^n - 1}{q - 1}$ e quindi si può scrivere:

$$\sum_{k=0}^{n} 3^k = 1 + \sum_{k=1}^{n} 3^k = 1 + 3\frac{3^n - 1}{3 - 1} = 1 + \frac{3}{2}\cdot 3^n - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}\cdot 3^n - \frac{1}{2}.$$

Affinché tale sommatoria non superi 10 000 deve valere:

$$\frac{3}{2}\cdot 3^n - \frac{1}{2} \leq 10\,000 \quad \rightarrow \quad 3^{n+1} \leq 20\,001.$$

Passando ai logaritmi naturali otteniamo:

$$\ln 3^{n+1} \leq \ln 20\,001$$

$$(n+1)\ln 3 \leq \ln 20\,001$$

$$n + 1 \leq \frac{\ln 20\,001}{\ln 3} \simeq 9{,}015$$

$$n \leq 9{,}015 - 1 \quad \rightarrow \quad n \leq 8{,}015$$

Essendo n un numero naturale, si conclude che il valore cercato è $n = 8$.

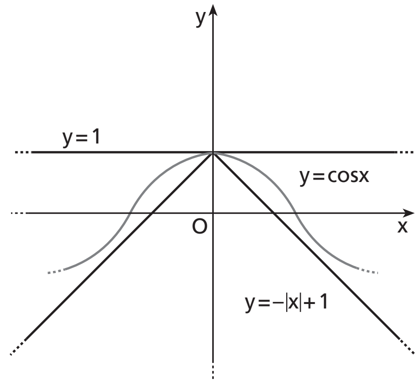
6 Considerata la funzione goniometrica $y = \cos x$, se si ammette che essa è continua su tutto il campo reale, allora vale la definizione di funzione continua e risulta:

$$\lim_{x \to 0} \cos x = \cos(0) = 1.$$

Diversamente, si può dimostrare che $\lim_{x \to 0} \cos x = 1$, confrontando i grafici delle funzioni $y = -|x| + 1$, $y = \cos x$ e $y = 1$, rappresentati nella figura 8.
Da essa si osserva che è verificata la disuguaglianza:

$$-|x| + 1 \leq \cos x \leq 1, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ammesso che $\lim_{x \to 0}(-|x| + 1) = \lim_{x \to 0} 1 = 1$, vale il teorema del confronto, pertanto $\lim_{x \to 0} \cos x = 1$.



▲ **Figura 8.**

7 La funzione $f(x) = |x^2 - 1|$ ha campo di esistenza reale e può essere scritta come:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{per } x \leq -1 \vee x \geq 1 \\ -x^2 + 1 & \text{per } -1 < x < 1 \end{cases}.$$

Essa è continua nei punti $x = -1$ e $x = 1$, poiché $\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^+} f(x) = 0$ e $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = 0$, ed è quindi continua su tutto $\mathbb{R}$.
Si calcola ora la derivata di $f(x)$ per $x \neq \pm 1$ con le regole di derivazione:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{per } x < -1 \vee x > 1 \\ -2x & \text{per } -1 < x < 1 \end{cases}.$$

Si osserva che nei punti $x = -1$ e $x = 1$, i limiti sinistri e destri della funzione $f'(x)$ non coincidono. Infatti:

$$\lim_{x \to -1^-} f'(x) = -2 \qquad \lim_{x \to -1^+} f'(x) = 2;$$

$$\lim_{x \to 1^-} f'(x) = -2 \qquad \lim_{x \to 1^+} f'(x) = 2.$$

Si può allora concludere che la funzione $f(x) = |x^2 - 1|$ è derivabile in $\mathbb{R}$ escluso nei punti $x = -1$ e $x = 1$.

8 Dato l'integrale $\int_0^1 f(2x)dx$, si considera la sostituzione $t = 2x$, ovvero $x = \frac{1}{2}t$, da cui si ricava il differenziale $dx = \frac{1}{2}dt$. Gli estremi di integrazione diventano: $t_1 = 2 \cdot 0 = 0$ e $t_2 = 2 \cdot 1 = 2$.

Sostituendo si trova:

$$\int_0^1 f(2x)dx = \frac{1}{2}\int_0^2 f(t)dt.$$

Utilizzando il dato di partenza, $\int_0^2 f(x)dx = 4$, risulta:

$$\int_0^1 f(2x)dx = \frac{1}{2}\int_0^2 f(t)dt = \frac{4}{2} = 2.$$

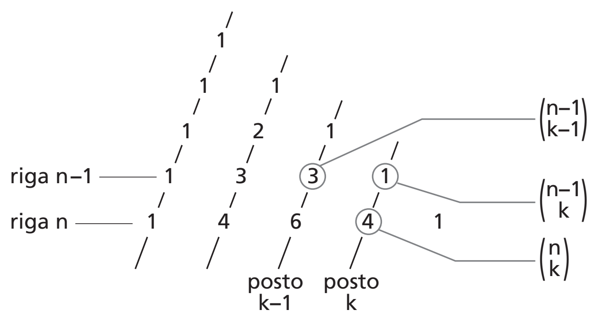
Si osserva che non si può calcolare l'integrale $\int_0^1 f\left(\frac{x}{2}\right)dx$ con le informazioni fornite, poiché se si compie la sostituzione $t=\frac{x}{2}$, con $dx=2dt$, l'integrale diventa: $\int_0^1 f\left(\frac{x}{2}\right)dx = 2\int_0^{\frac{1}{2}} f(t)dt$ e quest'ultimo integrale non è noto.

9 Si tratta della formula di Stifel dei coefficienti binomiali. Tale espressione, assunta come vera, può essere verificata membro a membro utilizzando la legge dei tre fattoriali $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$. Diversamente, essa si dimostra facendo riferimento al significato di $\binom{n}{k}$ come il numero delle combinazioni di classe k i cui elementi sono scelti da un insieme A di n elementi distinti. Indicato con a un elemento di A, le combinazioni di classe k che contengono l'elemento a sono quelle combinazioni di $n-1$ elementi di classe $k-1$, a cui si aggiunge l'elemento a stesso. Il numero di questi sottoinsiemi è $\binom{n-1}{k-1}$.

Le combinazioni di classe k che non contengono l'elemento a sono invece $\binom{n-1}{k}$. Pertanto, sommando le combinazioni che contengono a con quelle che non lo contengono, si ottiene il numero complessivo delle combinazioni di n elementi di classe k cioè:

$$\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}=\binom{n}{k}.$$

Sulla formula di Stifel è basato il metodo ricorsivo per la costruzione del triangolo di Tartaglia, necessario a determinare i coefficienti dello sviluppo della potenza di un binomio secondo la formula di Newton $(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$. Nel triangolo di Tartaglia i lati obliqui del triangolo sono formati da tanti 1, mentre ogni coefficiente interno si ottiene come somma dei due coefficienti della riga precedente che sono alla sua destra e alla sua sinistra.



▲ **Figura 9.**

10 Il numero di «cinquine», ottenute dall'estrazione e contenenti sempre i numeri 1, 2 e 3, coincidono con le combinazioni di 87 elementi a gruppi di due:

$$\text{numero di «cinquine»} = C_{87,2}=\binom{87}{2} = 3741.$$

Per esercitarti ancora sugli argomenti trattati nel	Svolgi il
Problema 1	• Problema 2 pag. W 164 (punto a) • Esercizio 182 pag. L 138 • Esercizio 343 pag. L 157 (prima parte) • Problema 16 pag. L 430 (punto c)
Problema 2	• Esercizio 233 pag. V 196 • Problema 9 pag. V 216 (punto c) • Quesito 5 pag. W 167 • Problema 13 pag. W 138 • Problema 2 pag. W 168 (punti a, b, c, d)
Quesito 1	• Quesito 6 pag. π 96
Quesito 3	• Esercizio 294 pag. N 59 • Quesito 2 pag. W 166
Quesito 4	• Problema 20 pag. Q 91 (punti a, b)
Quesito 5	• Esercizio 343 pag. S 169
Quesito 6	• Esercizio 355 pag. U 108 • Quesito 4 pag. U 110
Quesito 7	• Problema 13 pag. V 91 (punto b) • Quesito 2 pag. W 165 • Quesito 1 pag. W 164
Quesito 8	• Quesito 2 pag. W 136 • Quesito 6 pag. W 136
Quesito 9	• Esercizio 105 pag. α 33 • Esercizio 122 pag. α 34
Quesito 10	• Esercizio 81 pag. α 31 • Esercizio 184 pag. α 37