ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO • 2004
Sessione straordinaria

Il candidato risolva uno dei due problemi a 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1

In un piano è assegnata la parabola p di vertice V e fuoco F tali che, rispetto a una assegnata unità di lunghezza, il segmento VF sia lungo $\frac{1}{2}$. Indicato con E il punto simmetrico di F rispetto a V e riferito il piano a un conveniente sistema di assi cartesiani (Oxy):

a) determinare l'equazione della parabola p e stabilire se esiste un punto A di p tale che il triangolo AEF sia rettangolo in A;

b) chiamato P un generico punto della parabola p, trovare le coordinate del baricentro G del triangolo PEF e determinare l'equazione del luogo geometrico k descritto dal punto G al variare di P su p;

c) indicati con R ed S due punti appartenenti il primo alla parabola p e il secondo al luogo k e situati nel 1° quadrante su una retta r perpendicolare all'asse di simmetria della parabola p, calcolare a quale distanza da V bisogna condurre la retta r affinché l'area della regione finita di piano delimitata dal segmento RS, dall'arco VR della parabola p e dall'arco VS del luogo k sia uguale a $\frac{8}{9}(3-\sqrt{3})$;

d) stabilire se la distanza trovata sopra è espressa da un numero razionale o irrazionale.

PROBLEMA 2

In un piano, riferito a un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le curve di equazione:

$$y=\frac{1+a\,\mathrm{sen}\,x}{\cos x},$$

dove a è un parametro reale.

a) Dimostrare che si tratta di curve periodiche con periodo 2π, che hanno in comune infiniti punti dei quali si chiedono le coordinate.

b) Tra le curve assegnate determinare quelle che hanno come tangente orizzontale la retta di equazione $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

c) Controllato che due curve soddisfano alla condizione precedente, dimostrare che sono l'una simmetrica dell'altra rispetto all'asse y e disegnarle nell'intervallo $-\pi \leq x \leq \pi$, dopo aver spiegato, in particolare, perché nessuna di esse presenta punti di flesso.

QUESTIONARIO

1 Calcolare l'ampiezza dell'angolo diedro formato da due facce consecutive di un ottaedro regolare, espressa in gradi sessagesimali e approssimata al secondo.

2 Dimostrare che, se due piani sono perpendicolari, ogni retta perpendicolare a uno di essi è parallela all'altro o è contenuta in esso.
Si può concludere che ogni retta parallela a uno dei due piani è perpendicolare all'altro? Fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

3 Determinare il dominio della funzione $f(x) = \ln(1 - 2x + \sqrt{x})$.

4 Il limite di tg$x$ per x tendente a $+\infty$:
A) è $+\infty$;
B) è $\frac{\pi}{2}$;
C) non esiste;
D) esiste ma non si riesce a calcolare.

Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire una spiegazione esauriente della scelta operata.

5 Dimostrare il seguente teorema: «Condizione sufficiente ma non necessaria affinché la funzione reale di variabile reale $f(x)$ sia continua nel punto a è che sia derivabile in a».

6 Utilizzando il calcolo integrale, dimostrare la formula che fornisce il volume di una sfera di raggio assegnato.

7 Indicata con S_n la somma di n termini in progressione geometrica, di primo termine $\frac{1}{2}$ e ragione $\frac{1}{2}$, calcolare $\lim_{n \to \infty} \frac{S_n}{n}$.

8 Calcolare il valore della seguente somma:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots 100^2.$$

9 In una classe di 25 alunni bisogna estrarre a sorte una rappresentanza di 3 elementi. Calcolare quante sono le possibili terne di rappresentanti.

10 Alla finale dei 200 m piani partecipano 8 atleti, fra i quali figurano i nostri amici Antonio e Pietro. Calcolare il numero dei possibili ordini di arrivo che registrino i nostri due amici fra i primi tre classificati.

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

SOLUZIONE DELLA PROVA D'ESAME
CORSO DI ORDINAMENTO • 2004
Sessione straordinaria

PROBLEMA 1

a) Posto il vertice V della parabola p nell'origine del sistema cartesiano e il fuoco F sul semiasse positivo delle y, le coordinate di tali punti sono: $V(0;\,0)$ e $F\left(0;\,\frac{1}{2}\right)$. Perciò la parabola p ha equazione del tipo $y=\frac{1}{4f}x^2$, dove f è l'ordinata del fuoco, e ha espressione $y=\frac{1}{2}x^2$. Nella figura 1 è riportato il suo grafico.

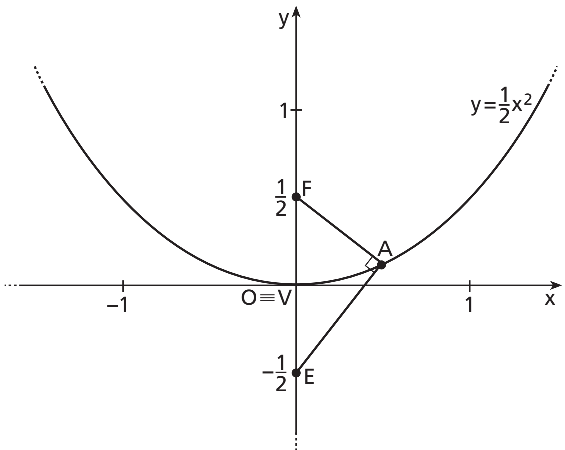


Figura 1.

Indicato con E il punto simmetrico di F rispetto a V, esso ha coordinate $E\left(0;\,-\frac{1}{2}\right)$. Preso un generico punto A appartenente alla parabola, di coordinate $A\left(x;\,\frac{1}{2}x^2\right)$, affinché il triangolo AEF sia rettangolo in A è necessario che i punti E, F e A appartengano a una semicirconferenza di diametro EF e centro V, ossia si abbia $FV \cong VA \cong VE$. Essendo:

$$\overline{VA}^2 = x^2 + \frac{1}{4}x^4$$

otteniamo:

$$\overline{VA}^2 = \overline{VF}^2 \quad \rightarrow \quad x^2 + \frac{1}{4}x^4 = \frac{1}{4} \quad \rightarrow \quad x^4 + 4x^2 - 1 = 0.$$

L'equazione biquadratica ha come soluzioni $x = \pm\sqrt{\sqrt{5}-2}$.
Pertanto esistono due punti della parabola, di coordinate

$$A_1\left(\sqrt{\sqrt{5}-2};\,\frac{\sqrt{5}-2}{2}\right) \quad \text{e} \quad A_2\left(-\sqrt{\sqrt{5}-2};\,\frac{\sqrt{5}-2}{2}\right)$$

per cui i triangoli A_1EF e A_2EF sono retti in A_1 e A_2.

b) Un generico punto della parabola p ha coordinate $P\left(x; \frac{1}{2}x^2\right)$. I restanti vertici del triangolo PEF sono $E\left(0; -\frac{1}{2}\right)$ e $F\left(0; \frac{1}{2}\right)$. Applicando le formule delle coordinate del baricentro di un triangolo, $x_G = \frac{x_P + x_E + x_F}{3}$ e $y_G = \frac{y_P + y_E + y_F}{3}$, si ottiene:

$$G\begin{cases} x_G = \dfrac{x}{3} \\ y_G = \dfrac{\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{3} = \dfrac{1}{6}x^2. \end{cases}$$

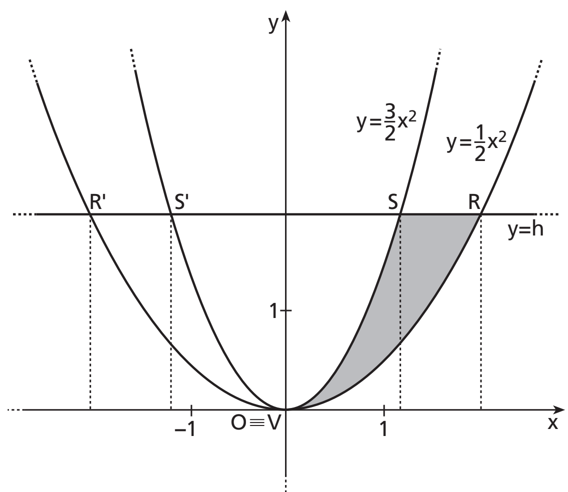
Le equazioni trovate sono parametriche in x e rappresentano il luogo geometrico k descritto dal punto G al variare di P su p. L'equazione cartesiana del luogo si determina ricavando dalla prima equazione x e andando a sostituire la sua espressione nella seconda equazione.

$$\begin{cases} x = 3x_G \\ y_G = \dfrac{1}{6}(3x_G)^2 = \dfrac{3}{2}x_G^2 \end{cases}.$$

Pertanto il luogo geometrico k descritto dal punto G al variare di P su p è la parabola di equazione

$$y = \frac{3}{2}x^2.$$

c) Si tracciano nel sistema cartesiano i grafici dei luoghi p e k, di equazione rispettivamente $y = \frac{1}{2}x^2$ e $y = \frac{3}{2}x^2$, e una retta generica r di equazione $y = h$, con $h > 0$, perpendicolare all'asse di simmetria della parabola p che interseca i luoghi nel primo quadrante nei punti R e S. Essi hanno coordinate $R(\sqrt{2h}; h)$ e $S\left(\sqrt{\frac{2}{3}h}; h\right)$ (figura 2).



▶ **Figura 2.**

Individuata sul grafico la figura mistilinea VRS, la sua superficie A si ottiene come la metà della differenza dei segmenti parabolici $S_{VRR'}$ e $S_{VSS'}$

$$A = \frac{1}{2}(S_{VRR'} - S_{VSS'}).$$

Si calcolano le superfici al secondo membro, ricordando che l'area del segmento parabolico è uguale a $\frac{2}{3}$ dell'area del relativo rettangolo:

$$S_{VRR'} = \frac{2}{3}(2\sqrt{2h} \cdot h) = \frac{4\sqrt{2}}{3}h\sqrt{h},$$

$$S_{VSS'} = \frac{2}{3}\left(2\sqrt{\frac{2}{3}h} \cdot h\right) = \frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}h\sqrt{h}.$$

Sostituendo, la superficie A diventa:

$$A=\frac{1}{2}\left(\frac{4\sqrt{2}}{3}b\sqrt{b}-\frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}b\sqrt{b}\right)=\frac{2\sqrt{2}}{3}\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)b\sqrt{b}.$$

Si ponga per ipotesi tale area uguale a $\frac{8}{9}(3-\sqrt{3})$:

$$\frac{2\sqrt{2}}{3}\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)b\sqrt{b}=\frac{8}{9}(3-\sqrt{3}) \quad\rightarrow\quad \frac{2\sqrt{2}}{3}\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}\right)b\sqrt{b}=\frac{8}{9}\sqrt{3}(\sqrt{3}-1) \quad\rightarrow$$

$$\rightarrow\quad b\sqrt{b}=\frac{4}{\sqrt{2}} \quad\rightarrow\quad b^{\frac{3}{2}}=2^{\frac{3}{2}} \quad\rightarrow\quad b=2.$$

La retta r ha equazione $y=2$ e ha distanza dal vertice V, coincidente con l'origine del sistema cartesiano, pari a 2.

d) La distanza trovata $b=2$ è espressa da un numero razionale.

PROBLEMA 2

a) Posto $f_a(x)=\frac{1+a\,\mathrm{sen}\,x}{\cos x}$, essa può essere scritta come $f_a(x)=\frac{1}{\cos x}+a\,\mathrm{tg}\,x$. La periodicità della funzione coseno è 2π, cosicché $\frac{1}{\cos x}$ è periodica di periodo $T_1=2\pi$; $\mathrm{tg}\,x$ ha periodicità π per cui il periodo di $a\,\mathrm{tg}\,x$ è $T_2=\pi$. La funzione f_a è somma di funzioni periodiche: essa è allora periodica di periodo $T=$ m.c.m. $(T_1,\ T_2)$ cioè $T=2\pi$.

Presi due valori arbitrari di a, a_1 e a_2 con $a_1\neq a_2$, e le corrispondenti funzioni f_{a_1} e f_{a_2}, i loro punti comuni soddisfano l'equazione $f_{a_1}(x)=f_{a_2}(x)$, cioè:

$$\frac{1}{\cos x}+a_1\,\mathrm{tg}\,x=\frac{1}{\cos x}+a_2\,\mathrm{tg}\,x \quad\rightarrow\quad (a_1-a_2)\,\mathrm{tg}\,x=0 \quad\rightarrow\quad \mathrm{tg}\,x=0 \quad\rightarrow\quad x=k\pi,\ \text{con } k\in\mathbb{Z}.$$

Le coordinate di tali punti sono: $(2k\pi;1)$ e $((2k+1)\pi;-1)$.

Vista l'arbitrarietà di a_1 e a_2 si può concludere che le curve $f_a(x)=\frac{1+a\,\mathrm{sen}\,x}{\cos x}$ hanno in comune infiniti punti di coordinate $(2k\pi;\ 1)$ e $((2k+1)\pi;-1)$.

b) La funzione $y=\frac{1+a\,\mathrm{sen}\,x}{\cos x}$ ha campo di esistenza C.E.: $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ con $k\in\mathbb{Z}$ e derivata prima:

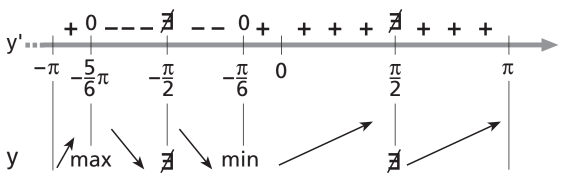
$y'=\frac{a\cos^2 x+\mathrm{sen}\,x(1+a\,\mathrm{sen}\,x)}{\cos^2 x}=\frac{\mathrm{sen}\,x+a}{\cos^2 x}$. La curva ha tangente orizzontale nei punti in cui la derivata prima si annulla, ossia per $\mathrm{sen}\,x=-a$. Condizione necessaria per l'esistenza di tali punti è quindi: $|a|<1$. La loro ordinata si trova sostituendo $\mathrm{sen}\,x=-a$ nell'equazione della funzione e perciò vale: $y=\frac{1-a^2}{\pm\sqrt{1-a^2}}$. Imponendo per ipotesi $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$ e tenendo conto che $|a|<1$, risulta:

$$\frac{1-a^2}{\sqrt{1-a^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2} \quad\rightarrow\quad \sqrt{1-a^2}=\frac{\sqrt{3}}{2} \quad\rightarrow\quad 1-a^2=\frac{3}{4} \quad\rightarrow\quad a=\pm\frac{1}{2}.$$

Tali valori sono entrambi accettabili; pertanto le curve che hanno come tangente orizzontale la retta di equazione $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$ sono: $y=\frac{1+\frac{1}{2}\mathrm{sen}\,x}{\cos x}$, cioè $y=\frac{2+\mathrm{sen}\,x}{2\cos x}$, e $y=\frac{1-\frac{1}{2}\mathrm{sen}\,x}{\cos x}$, ovvero $y=\frac{2-\mathrm{sen}\,x}{2\cos x}$.

c) Considerata la funzione $y=\dfrac{2+\operatorname{sen}x}{2\cos x}$, si applica la simmetria rispetto all'asse y: $\begin{cases} X=-x \\ Y=y \end{cases}$. La funzione trasformata è $Y=\dfrac{2+\operatorname{sen}(-X)}{2\cos(-X)}$ ovvero $Y=\dfrac{2-\operatorname{sen}X}{2\cos X}$. Essa coincide con la funzione $y=\dfrac{2-\operatorname{sen}x}{2\cos x}$ nello stesso sistema di assi cartesiani. Pertanto si conclude che le funzioni $y=\dfrac{2+\operatorname{sen}x}{2\cos x}$ e $y=\dfrac{2-\operatorname{sen}x}{2\cos x}$ sono l'una simmetrica dell'altra rispetto all'asse delle ordinate.

Per rappresentare i loro grafici nell'intervallo $-\pi\leq x\leq\pi$, è sufficiente compiere lo studio di una sola di esse, per esempio $y=\dfrac{2+\operatorname{sen}x}{2\cos x}$. Il suo campo di esistenza è C.E.: $x\neq\pm\dfrac{\pi}{2}$. Essa non è né pari né dispari. Non ha intersezioni con l'asse x poiché il numeratore della funzione, $2+\operatorname{sen}x$, non si può mai annullare ed è sempre positivo; l'intersezione con l'asse y è $(0;\,1)$. La funzione è positiva per $\cos x>0$ cioè per $-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}$; è negativa per $-\pi\leq x<-\dfrac{\pi}{2}\vee\dfrac{\pi}{2}<x\leq\pi$. I limiti agli estremi del campo di esistenza sono: $\displaystyle\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^{\pm}}\frac{2+\operatorname{sen}x}{2\cos x}=\pm\infty$ $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^{\pm}}\frac{2+\operatorname{sen}x}{2\cos x}=\mp\infty$; pertanto la curva ha asintoti verticali $x=-\dfrac{\pi}{2}$ e $x=\dfrac{\pi}{2}$. Nei punti $x=-\pi$ e $x=\pi$ il grafico ha coordinate $A(-\pi;\,-1)$ e $B(\pi;\,-1)$. La funzione derivata è $y'=\dfrac{2\operatorname{sen}x+1}{2\cos^2 x}$. Essa si annulla nei punti $x=-\dfrac{5}{6}\pi$ e $x=-\dfrac{\pi}{6}$. Nella figura 3 è riportata la tabella del suo segno.



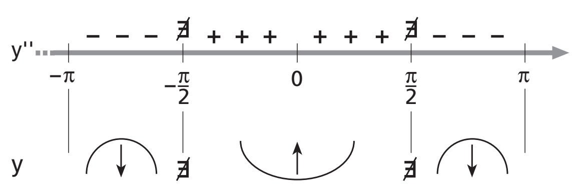
◀ **Figura 3.**

La funzione y ha un massimo nel punto $x=-\dfrac{5}{6}\pi$ e un minimo per $x=-\dfrac{\pi}{6}$. Le corrispondenti coordinate sul grafico valgono $M\left(-\dfrac{5}{6}\pi;\,-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ e $N\left(-\dfrac{\pi}{6};\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

La derivata seconda della funzione è

$$y''=\frac{\operatorname{sen}^2 x+\operatorname{sen}x+1}{\cos^3 x}.$$

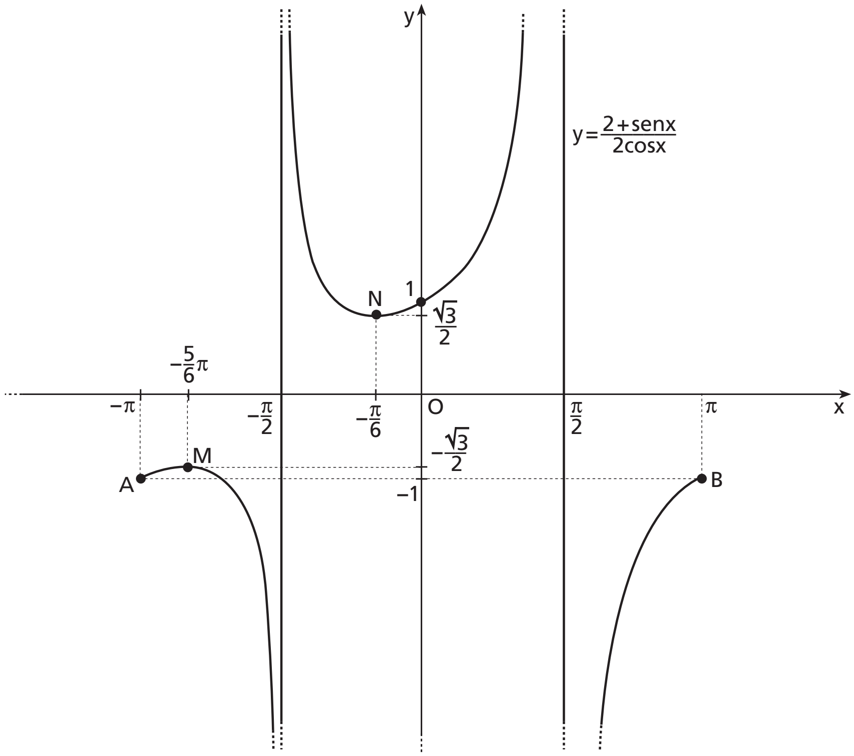
La tabella del suo segno è indicata nella figura 4.



▶ **Figura 4.**

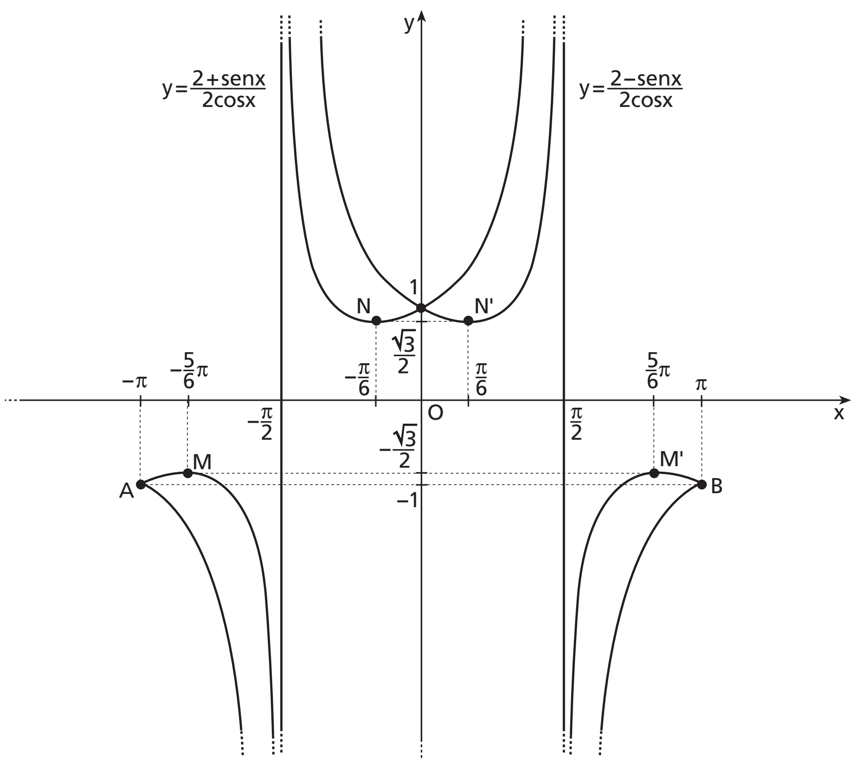
Si osserva che la derivata seconda non si annulla mai: non è quindi soddisfatta la condizione necessaria per l'esistenza di punti di flesso.

Il grafico della funzione $y=\dfrac{2+\operatorname{sen}x}{2\cos x}$ è rappresentato nella figura 5.



◀ **Figura 5.**

Sfruttando la proprietà di simmetria tra le funzioni $y=\dfrac{2+\operatorname{sen}x}{2\cos x}$ e $y=\dfrac{2-\operatorname{sen}x}{2\cos x}$ rispetto all'asse y, è quindi ora possibile tracciare il grafico della seconda funzione (figura 6).



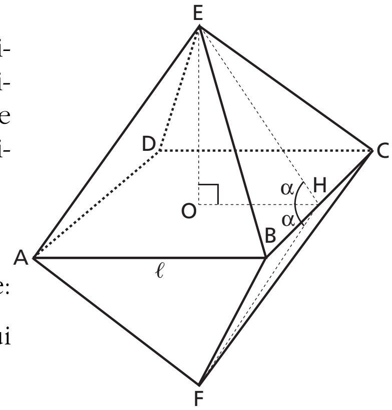
◀ **Figura 6.**

QUESTIONARIO

1 Nella figura 7 è rappresentato un ottaedro regolare $ABCDEF$ di lato l. Si prendano le due facce consecutive BCF e BCE e si sezioni perpendicolarmente il diedro da esse formato con un piano passante per il vertice E. Tale piano intercetta il triangolo rettangolo EOH, dove O è il piede della perpendicolare da E al piano $ABCD$ e H è il punto medio dello spigolo BC del diedro. Indicato con α l'angolo $O\hat{H}E$, l'ampiezza del diedro è 2α. Per il teorema dei triangoli rettangoli vale $\cos\alpha = \frac{\overline{OH}}{\overline{EH}}$.

Poiché il segmento OH è pari a metà del lato del quadrato $ABCD$, vale: $\overline{OH} = \frac{l}{2}$. Inoltre EH è l'altezza del triangolo equilatero BCE, per cui

$\overline{EH} = \frac{\sqrt{3}}{2} l$. Risulta allora: $\cos\alpha = \frac{\overline{OH}}{\overline{EH}} = \frac{\frac{l}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2} l} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.



▲ **Figura 7.**

Essendo $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$, ricaviamo:

$$\cos 2\alpha = 2 \cdot \frac{1}{3} - 1 = -\frac{1}{3}$$

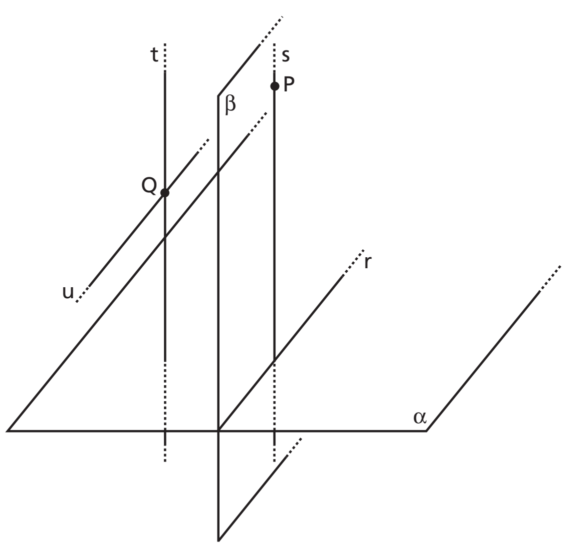
$$2\alpha = \arccos\left(-\frac{1}{3}\right) \simeq 109{,}4712° \simeq 109°28'16''.$$

2 Nella figura 8 sono rappresentati due piani α e β perpendicolari tra loro. Sia r la loro intersezione.

Preso un punto P appartenente a β, si mandi la retta s, perpendicolare al piano α. Si vuole dimostrare che tale retta appartiene al piano β. Infatti, se non giacesse su β, mandando da P su β la perpendicolare alla retta r, essa risulterebbe perpendicolare al piano α e allora dal punto P si potrebbero condurre due rette perpendicolari allo stesso piano α e ciò è assurdo.

Considerato il punto Q esterno al piano β, si tracci da esso la retta t perpendicolare al piano α. Si vuole dimostrare che tale retta è parallela a β. Si considerino le rette s e t: esse sono perpendicolari allo stesso piano α, pertanto, per un noto teorema, sono tra loro parallele. Ora, preso il piano passante per le rette parallele s e t, esso taglia il piano β lungo la retta s stessa; se la retta t non fosse parallela a β, lo dovrebbe quindi incontrare in un punto della retta s, ma ciò va contro al parallelismo delle rette r e s, pertanto la retta t è parallela al piano β, come volevasi dimostrare.

▼ **Figura 8.**



Viceversa, non si può dire che ogni retta parallela a uno dei due piani è perpendicolare all'altro. Infatti, si prenda, per esempio, la retta u passante per Q e parallela alla retta r; essa è parallela al piano β e risulta anche parallela al piano α, pertanto non può essere perpendicolare a quest'ultimo.

3 Considerata $f(x) = \ln(1 - 2x + \sqrt{x})$, si tratta di una funzione logaritmica. Per l'esistenza della radice, deve essere $x \geq 0$. Inoltre, la condizione di esistenza del logaritmo impone che il suo argomento sia positivo, ovvero che $1 - 2x + \sqrt{x} > 0$. È necessario quindi risolvere la disequazione irrazionale $\sqrt{x} > 2x - 1$. Essa è equivalente all'unione dei seguenti sistemi:

$$\begin{cases} 2x - 1 < 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 2x - 1 \geq 0 \\ x > (2x - 1)^2 \end{cases}.$$

Risolvendoli, si trova:

$$\text{I sistema: } \begin{cases} x < \dfrac{1}{2} \\ x \geq 0 \end{cases} \quad \to \quad 0 \leq x < \frac{1}{2};$$

$$\text{II sistema: } \begin{cases} x \geq \dfrac{1}{2} \\ x > 4x^2 + 1 - 4x \end{cases} \quad \to \quad \begin{cases} x \geq \dfrac{1}{2} \\ 4x^2 - 5x + 1 < 0 \end{cases} \quad \to \quad \begin{cases} x \geq \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{4} < x < 1 \end{cases} \quad \to \quad \frac{1}{2} \leq x < 1.$$

L'insieme delle soluzioni della disequazione è l'unione dei due intervalli, perciò $0 \leq x < 1$.
Il campo di esistenza della funzione $f(x) = \ln(1 - 2x + \sqrt{x})$ è C.E.: $0 \leq x < 1$.

4 Data una funzione $f(x)$, condizione necessaria e sufficiente affinché essa ammetta limite l, finito o infinito, è che per ogni successione x_n, per la quale $\lim_{n \to +\infty} x_n = +\infty$, si abbia $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = l$. Considerata la funzione $f(x) = \operatorname{tg} x$, si prendano le seguenti successioni: $a_n = \dfrac{\pi}{4} + \pi n$ e $b_n = -\dfrac{\pi}{4} + \pi n$. I limiti per n tendente a $+\infty$ valgono: $\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty$ e $\lim_{n \to +\infty} b_n = +\infty$, mentre i limiti delle successioni $f(a_n)$ e $f(b_n)$ risultano:

$$\lim_{n \to +\infty} f(a_n) = \lim_{n \to +\infty} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + n\pi\right) = \lim_{n \to +\infty} 1 = 1,$$

$$\lim_{n \to +\infty} f(b_n) = \lim_{n \to +\infty} \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4} + n\pi\right) = \lim_{n \to +\infty} (-1) = -1,$$

Poiché i due limiti non coincidono, non è soddisfatta la condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza del limite $\lim_{x \to +\infty} \operatorname{tg} x$ poc'anzi enunciata. Pertanto il limite $\lim_{x \to +\infty} \operatorname{tg} x$ non esiste e la risposta esatta è C.

5 Si vuole dimostrare che, data una funzione reale di variabile reale $f(x)$, se essa è derivabile nel punto $x = a$, allora è in esso continua. Per definizione di derivata di una funzione nel punto $x = a$, esiste ed è finito il limite del rapporto incrementale: $\lim_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(h)}{h} = f'(a)$. Si consideri l'identità $f(a+h) = f(a) + \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} \cdot h$. Si calcoli il limite per $h \to 0$ del secondo membro:

$$\lim_{h \to 0} \left[f(a) + \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \cdot h \right] = \lim_{h \to 0} f(a) + \lim_{h \to 0} \left[\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \cdot h \right] = f(a) + f'(a) \cdot 0 = f(a).$$

Poiché i membri dell'identità sono uguali, si può dedurre che esiste il limite $\lim_{h \to 0} f(a+h)$ e vale:

$$\lim_{h \to 0} f(a+h) = f(a).$$

Posto $a + h = x$, se $h \to 0$ si ha che $x \to a$.

Sostituendo nella precedente espressione:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a),$$

pertanto la funzione è continua nel punto $x = a$.
In generale non vale il viceversa, cioè non è detto che una funzione continua in un punto è in esso derivabile. Per esempio, la funzione $f(x) = |x|$ è continua nel punto $x = 0$ ma non è derivabile; infatti $\lim_{x \to 0} |x| = |0| = 0$ ma $f'_-(0) = -1$, mentre $f'_+(0) = 1$.

6 Si consideri la sfera come il solido ottenuto dalla rotazione di un semicerchio intorno al suo diametro $2r$. Posto il centro del semicerchio nell'origine di un sistema di assi cartesiani e il diametro sull'asse x (figura 9a), l'equazione della semicirconferenza corrispondente è $y = \sqrt{r^2 - x^2}$. Compiendo una rotazione intorno all'asse delle ascisse (figura 9b), per il calcolo integrale il volume della sfera ottenuta vale:

$$V = \pi \int_{-r}^{r} (\sqrt{r^2 - x^2})^2 \, dx = \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2) \, dx = \pi \left[r^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right]_{-r}^{r} = \pi \left(r^3 - \frac{1}{3} r^3 + r^3 - \frac{1}{3} r^3 \right) = \frac{4}{3} \pi r^3.$$

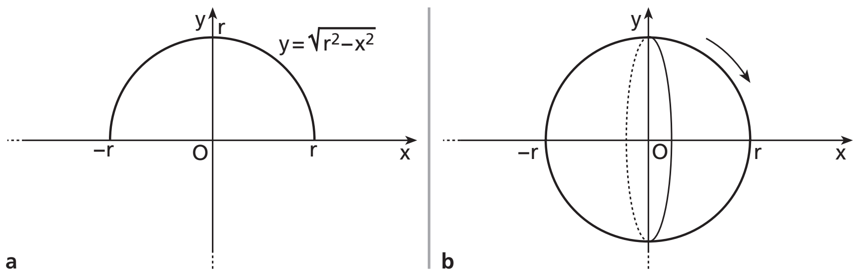


Figura 9.

7 Data la progressione geometrica, di primo termine $a_1 = \frac{1}{2}$ e ragione $q = \frac{1}{2}$, la somma S_n dei primi n termini è data dalla formula $S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$ ossia $S_n = \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{\frac{1}{2} - 1} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Il limite $\lim_{n \to \infty} \frac{S_n}{n}$ risulta:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{S_n}{n} = \lim_{n \to \infty} \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{n},$$

e poiché $\lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$, vale:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{S_n}{n} = 0.$$

8 Considerata la successione $a_n = n^2$, si dimostra per induzione che la somma dei primi n termini vale:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1).$$

Infatti, per $n = 1$, $S_1 = 1^2 = 1$ e $\frac{1}{6}(1+1)(2+1) = 1$, pertanto l'espressione sopra è vera; ora, posto $S_n = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$, è necessario dimostrare che $S_{n+1} = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)[2(n+1)+1]$.

Considerati i primi termini della successione:

$S_1 = 1$

$S_2 = S_1 + 2 \cdot 2 = S_1 + 2^2$

$S_3 = S_2 + 3 \cdot 3 = S_2 + 3^2$

...

ricaviamo che:

$S_{n+1} = S_n + (n+1)^2.$

$$S_{n+1} = S_n + (n+1)^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2 = \frac{1}{6}(n+1)(2n^2 + n + 6n + 6) =$$

$$= \frac{1}{6}(n+1)(2n^2 + 3n + 4n + 6) = \frac{1}{6}(n+1)[n(2n+3) + 2(2n+3)] = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3) =$$

$$= \frac{1}{6}(n+1)(n+2)[2(n+1)+1]$$

come volevasi dimostrare.
La somma $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots 100^2$ è uguale a S_{100} e quindi:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots 100^2 = \frac{1}{6} \cdot 100 \cdot 101 \cdot 201 = 338\,350.$$

9 Le possibili terne di rappresentanti che si possono estrarre a sorte in una classe di 25 alunni sono le combinazioni di 25 elementi a gruppi di tre: $C_{25,3} = \binom{25}{3} = \frac{25!}{3! \cdot 22!} = 2300.$

10 Assunto che Antonio e Pietro si trovano nel gruppo dei primi tre classificati, il numero dei possibili ordini di arrivo dei due amici e di un terzo atleta, appartenente all'insieme dei sei sportivi rimanenti, è dato dalle permutazioni di tre elementi cioè $P_3 = 3! = 6$. Al variare del terzo atleta nella rosa dei sei sportivi rimanenti, il numero N dei possibili ordini di arrivo dei due amici risulta $N = 6 \cdot P_3 = 36$.

Per esercitarti ancora sugli argomenti trattati nel	Svolgi il
Problema 1	• Esercizio 10 pag. L 195 • Esercizio 94 pag. L 50 • Esercizio 94 pag. L 50 • Esercizio 145 pag. L 54 • Esercizio 331 pag. L 230 (punto b) • Esercizio 346 pag. L 232 • Esercizio 53 pag. L 368 (punto a)
Problema 2	• Esercizio 482 pag. O 140 • Esercizio 518 pag. V 79 • Esercizio 140 pag. V 256 • Esercizio 174 pag. J_1 69 • Esercizio 154 pag. U 32
Quesito 1	• Quesito 8 pag. W 167
Quesito 2	• Esercizio 14 pag. π 71 • Quesito 7 pag. π 96
Quesito 3	• Esercizio 41 pag. U 23 • Esercizio 76 pag. U 26
Quesito 4	• Esercizio 6 pag. U 207 • Quesito 9 pag. W 169
Quesito 5	• Quesito 2 pag. V 90 • Problema 13 pag. V 91 (punto a)
Quesito 6	• Esercizio 271 pag. W 124
Quesito 7	• Quesito 4 pag. U 240 • Quesito 6 pag. U 240
Quesito 8	• Esercizio 218 pag. S 159 • Esercizio 253 pag. S 161
Quesito 9	• Esercizio 89 pag. α 31 • Quesito 11 pag. α 40
Quesito 10	• Esercizio 176 pag. α 37 • Quesito 12 pag. α 40