

**ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO • 2004**

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

■ **PROBLEMA 1**

Sia f la funzione definita da: $f(x) = 2x - 3x^3$

1. Disegnate il grafico G di f .
2. Nel primo quadrante degli assi cartesiani, considerate la retta $y = c$ che interseca G in due punti distinti e le regioni finite di piano R e S che essa delimita con G . Precisamente: R delimitata dall'asse y , da G e dalla retta $y = c$ e S delimitata da G e dalla retta $y = c$.
3. Determinate c in modo che R e S siano equivalenti e determinate le corrispondenti ascisse dei punti di intersezione di G con la retta $y = c$.
4. Determinate la funzione g il cui grafico è simmetrico di G rispetto alla retta $y = \frac{4}{9}$.

■ **PROBLEMA 2**

ABC è un triangolo rettangolo di ipotenusa BC .

1. Dimostrate che la mediana relativa a BC è congruente alla metà di BC .
2. Esprimete le misure dei cateti di ABC in funzione delle misure, supposte assegnate, dell'ipotenusa e dell'altezza ad essa relativa.
3. Con $BC = \sqrt{3}$ metri, determinate il cono K di volume massimo che si può ottenere dalla rotazione completa del triangolo attorno ad uno dei suoi cateti e la capacità in litri di K .
4. Determinate la misura approssimata, in radianti ed in gradi sessagesimali, dell'angolo del settore circolare che risulta dallo sviluppo piano della superficie laterale del cono K .

QUESTIONARIO

- 1 Trovate due numeri reali a e b , $a \neq b$, che hanno somma e prodotto uguali.
- 2 Provate che la superficie totale di un cilindro equilatero sta alla superficie della sfera ad esso circoscritta come 3 sta a 4.
- 3 Date un esempio di funzione $f(x)$ con un massimo relativo in $(1, 3)$ e un minimo relativo in $(-1, 2)$.
- 4 Dimostrate che l'equazione $e^x + 3x = 0$ ammette una e una sola soluzione reale.
- 5 Di una funzione $g(x)$, non costante, si sa che: $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 3$ e $g(2) = 4$. Trovate una espressione di $g(x)$.
- 6 Verificate che le due funzioni $f(x) = 3 \log x$ e $g(x) = \log(2x)^3$ hanno la stessa derivata. Quale giustificazione ne date?
- 7 Un triangolo ha due lati e l'angolo da essi compreso che misurano rispettivamente a , b e γ . Quale è il valore di γ che massimizza l'area del triangolo?
- 8 La misura degli angoli viene fatta adottando una opportuna unità di misura. Le più comuni sono i gradi *sessagesimali*, i *radiani*, i gradi *centesimali*. Quali ne sono le definizioni?
- 9 Calcolate: $\int_0^1 \arcsen x \, dx$.
- 10 Considerate gli insiemi $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{a, b, c\}$; quante sono le applicazioni (le funzioni) di A in B ?

Durata massima della prova: 6 ore

È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.

Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

SOLUZIONE DELLA PROVA D'ESAME CORSO DI ORDINAMENTO • 2004

■ PROBLEMA 1

1) Il dominio della funzione f , come tutte le funzioni polinomiali, è l'intero asse reale; f è continua e derivabile e, poiché è somma di soli termini con esponenti dispari, si ha che $f(-x) = -f(x)$, ovvero f è simmetrica rispetto all'origine degli assi.

Poiché f non presenta punti di discontinuità gli unici limiti che ha senso considerare sono quelli per x che tende a $+\infty$ e $-\infty$.

Come per tutte le parabole cubiche il risultato di tali limiti non può che essere ∞ , di cui si deve determinare il segno; esso dipende dal segno del termine di grado massimo che in questo caso vale -3 ; pertanto c'è un'inversione del segno dell'infinito a cui tende la x con quello a cui tende la funzione; ovvero:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

La f interseca l'asse delle ascisse in $x = 0$, come tutte le funzioni simmetriche rispetto all'origine, e

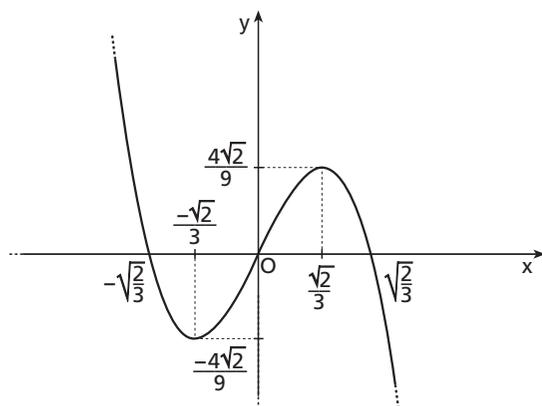
in $x = \pm \sqrt{\frac{2}{3}}$ e risulta positiva per $x < -\sqrt{\frac{2}{3}}$ o $0 < x < \sqrt{\frac{2}{3}}$.

La derivata prima, $f'(x) = 2 - 9x^2$, è positiva per $-\frac{\sqrt{2}}{3} < x < \frac{\sqrt{2}}{3}$ e pertanto la f è crescente in

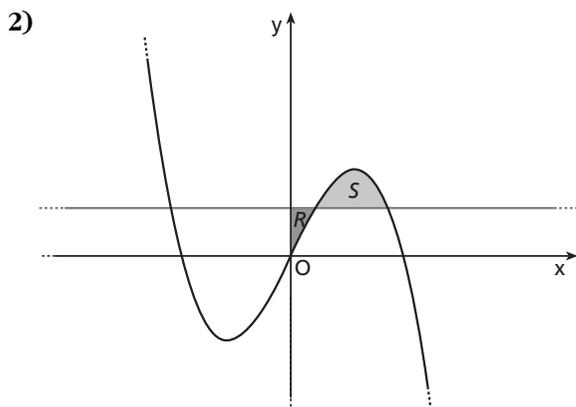
tale intervallo con un minimo relativo in $\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}; -\frac{4\sqrt{2}}{9}\right)$ e un massimo relativo in $\left(\frac{\sqrt{2}}{3}; \frac{4\sqrt{2}}{9}\right)$.

La derivata seconda $f''(x) = -18x$ è positiva per ogni $x < 0$ e pertanto la f ha la concavità verso l'alto in tale intervallo, con un punto di flesso nell'origine; per un disegno accurato del grafico di f è utile calcolare l'inclinazione della tangente nel punto di flesso sostituendo l'ascissa del punto di flesso nella $f'(x)$; si ottiene così $f'(0) = 2$.

Con queste informazioni è possibile disegnare il grafico di f (figura 1).



◀ Figura 1.



◀ Figura 2.

- 3) Siano x_1 e x_2 le ascisse dei punti di intersezione della $f(x)$ con la retta $y = c$; tali valori sono due delle soluzioni dell'equazione $2x - 3x^3 = c$ quando c è compresa tra 0 e la y del punto di massimo relativo; poiché questa equazione letterale di terzo grado non è risolvibile per via algebrica occorre determinare x_1 , x_2 e c ponendo a sistema le informazioni note, ovvero che $f(x_1) = c$, $f(x_2) = c$, e che l'area R , l'integrale della differenza tra la retta e la $f(x)$ calcolato tra 0 e x_1 , è uguale all'area S , l'integrale della differenza tra la $f(x)$ e la retta calcolato tra x_1 e x_2 , e cioè:

$$\int_0^{x_1} (c - 2x + 3x^3) dx = \int_{x_1}^{x_2} (2x - 3x^3 - c) dx$$

Dopo semplici passaggi si arriva all'equazione: $x_2 \cdot \left(x_2 - \frac{3}{4}x_2^3 - c\right) = 0$ da cui, uguagliando il secondo fattore a zero, si arriva all'equazione da porre nel sistema:

$$\begin{cases} x_2 - \frac{3}{4}x_2^3 - c = 0 & (1) \\ 2x_2 - 3x_2^3 = c & (2) \\ 2x_1 - 3x_1^3 = c & (3) \end{cases}$$

Ricavando c dalla (1) e sostituendo nella (2) si ottiene un'equazione nella sola incognita x_2 , che dopo un raccoglimento diventa un'equazione di secondo grado con due soluzioni $\pm \frac{2}{3}$. A noi interessa solo quella positiva poiché le intersezioni cercate si trovano nel 1° quadrante.

Trovato $x_2 = \frac{2}{3}$ lo si sostituisce nella (1) o nella (2) e si trova $c = \frac{4}{9}$; posto quest'ultimo valore nella (3) si ha un'equazione di terzo grado nell'incognita x_1 , che possiamo abbassare di grado dividendo per il binomio $\left(x - \frac{2}{3}\right)$ poiché sappiamo già che $x_2 = \frac{2}{3}$ è soluzione di tale equazione.

Si ottiene così l'equazione: $3x_1^2 + 2x_1 - \frac{2}{3} = 0$ che ha due soluzioni: $\frac{-1 \pm \sqrt{3}}{3}$ di cui ci interessa solo quella positiva: $x_1 = \frac{\sqrt{3} - 1}{3}$.

4) Per determinare la funzione $g(x)$, simmetrica della $f(x)$ rispetto alla retta $y = \frac{4}{9}$, poiché sappiamo che la funzione simmetrica rispetto all'asse delle ascisse si ottiene cambiando il segno alla funzione, occorre

- riferire la $f(x)$ ad un sistema con asse delle ascisse $y = \frac{4}{9}$, ovvero: $f(x) - \frac{4}{9}$
- considerare la funzione opposta: $-\left(f(x) - \frac{4}{9}\right)$
- ritornare a riferire il tutto al sistema di riferimento originale, sommando $\frac{4}{9}$, ovvero:

$$g(x) = -\left(f(x) - \frac{4}{9}\right) + \frac{4}{9} = 3x^3 - 2x + \frac{8}{9}$$

PROBLEMA 2

1) Poiché ABC è un triangolo rettangolo è inscrivibile in una semicirconferenza con l'ipotenusa come diametro; pertanto la mediana relativa all'ipotenusa sarà un raggio della semicirconferenza e come tale metà del diametro, ovvero dell'ipotenusa.

2) Indicati, per brevità con i l'ipotenusa BC , con h l'altezza relativa all'ipotenusa si può scrivere la seguente uguaglianza:

il prodotto dei cateti è uguale al prodotto dell'ipotenusa per l'altezza ad essa relativa; inoltre vale il teorema di Pitagora; ponendo a sistema le due uguaglianze si ottiene il seguente sistema simmetrico:

$$\begin{cases} AB \cdot AC = h \cdot i & (1) \\ AB^2 + AC^2 = i^2 & (2) \end{cases}$$

La (2) può essere riscritta come $(AB + AC)^2 - 2AB \cdot AC = i^2$ in cui si può sostituire ad $AB \cdot AC$ il valore fornito dalla (1), portare tale termine al secondo membro, estrarre la radice quadrata di entrambi i membri e considerare la sola radice positiva, in quanto la somma di segmenti è positiva; il sistema pertanto diventa:

$$\begin{cases} AB \cdot AC = hi & (1) \\ AB + AC = \sqrt{i^2 + 2hi} & (2) \end{cases}$$

Come per tutti i sistemi simmetrici le soluzioni sono rappresentate dalle radici dell'equazione: $t^2 - st + p = 0$, con s somma delle incognite e p prodotto; in questo caso diventa:

$t^2 - t\sqrt{i^2 + 2hi} + hi = 0$; indicato con AC il cateto maggiore le soluzioni saranno:

$$AC = \frac{\sqrt{i^2 + 2hi} + \sqrt{i^2 - 2hi}}{2} \quad \text{e} \quad AB = \frac{\sqrt{i^2 + 2hi} - \sqrt{i^2 - 2hi}}{2}$$

3) Se si indica con x uno dei due cateti, ad esempio AB l'altro sarà $AC = \sqrt{3 - x^2}$; poiché il volume del cono dipende dal quadrato del raggio della base sarà conveniente usare AC come raggio e AB come altezza del cono; il volume di K pertanto sarà:

$$V_K = \frac{\pi \cdot AC^2 \cdot AB}{3} = \frac{\pi \cdot (3 - x^2) \cdot x}{3} = \frac{\pi}{3} (3x - x^3) \text{ m}^3$$

Per cercare il cono di volume massimo occorre uguagliare a zero la derivata prima del volume rispetto alla variabile x ; si ottengono così due valori: $x = -1$ e $x = 1$, dove, essendo x la misura di un segmento, solo la soluzione positiva ha significato geometrico.

Se $AB = 1$ allora $AC = \sqrt{2}$ e $V_K = \frac{2}{3} \pi \text{ m}^3$; ma un litro corrisponde ad un dm^3 e pertanto:

$$V_K = \frac{2 \cdot 10^3}{3} \pi \text{ litri}$$

4) La misura di un angolo in radianti è pari al rapporto tra la lunghezza dell'arco e il raggio; lo sviluppo piano della superficie laterale del cono K origina un settore circolare compreso tra un arco, la cui misura è pari alla misura della circonferenza della base di K ($2\sqrt{2}\pi$), e due raggi che misurano quanto l'apotema del cono K , ovvero $\sqrt{3}$. Pertanto l'angolo α sarà:

$$\alpha = \frac{2\sqrt{2}\pi}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{6\pi} \approx 5,1 \text{ radianti o, in gradi sessagesimali, } \alpha_g = \frac{2}{3}\sqrt{6} \cdot 180^\circ \approx 293^\circ 56' 19''$$

QUESTIONARIO

1 Indicato con m sia la somma dei due numeri cercati sia il loro prodotto, tali numeri saranno le radici dell'equazione:

$$x^2 - mx + m = 0 \quad \text{ovvero: } a = \frac{m - \sqrt{m^2 - 4m}}{2} \quad \text{e} \quad b = \frac{m + \sqrt{m^2 - 4m}}{2}$$

con la condizione, dovendo essere a e b numeri reali diversi tra loro, che il discriminante sia positivo, ovvero: $m < 0$ v $m > 4$.

2 La superficie totale di un cilindro equilatero, avente cioè l'altezza uguale al diametro $2r$ della base, è: $6\pi r^2$ mentre il volume della sfera circoscritta al cilindro, ovvero una sfera di raggio $r\sqrt{2}$, ha una superficie pari a $8\pi r^2$; il rapporto tra le due superficie è, quindi, $\frac{3}{4}$.

3 La funzione più semplice è da ricercare all'interno delle funzioni polinomiali; una funzione con un minimo relativo per $x = -1$ e un massimo relativo per $x = 1$ è crescente per valori interni a tale intervallo e, pertanto, la derivata prima contiene il fattore $(1 - x^2)$; la presenza di un fattore costante non altera il risultato e pertanto la derivata prima può essere:

$$f'(x) = a(1 - x^2) \quad \text{che integrata fornisce: } f(x) = ax - \frac{a}{3}x^3 + c$$

Imponendo il passaggio della funzione per i punti forniti dal quesito si ottiene il sistema:

$$\begin{cases} 3 = +\frac{2}{3}a + c \\ 2 = -\frac{2}{3}a + c \end{cases} \quad \text{che ha soluzione: } \begin{cases} a = \frac{3}{4} \\ c = \frac{5}{2} \end{cases} \quad \text{da cui: } f(x) = -\frac{x^3}{4} + \frac{3}{4}x + \frac{5}{2}$$

4 Le soluzioni dell'equazione: $e^x + 3x = 0$ sono rappresentate dalle intersezioni della funzione $f(x) = e^x + 3x$ con l'asse delle ascisse; tale funzione ha derivata prima: $f'(x) = e^x + 3$, positiva per qualunque x reale, e pertanto $f(x)$ risulta essere monotona crescente e, come tale, assume una e una sola volta tutti i valori del suo codominio; essendo il codominio $]-\infty, +\infty[$ la $f(x)$ assumerà una e una sola volta il valore $y = 0$, intersecando quindi una e una sola volta l'asse delle ascisse.

5 Le funzioni che soddisfano le condizioni indicate dal quesito sono infinite ma tutte devono presentare un punto di discontinuità di terza specie in $x = 2$; un esempio di $g(x)$ è il seguente:

$$g(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{per } x \neq 2 \\ 4 & \text{per } x = 2 \end{cases}$$

6 In base alle proprietà dei logaritmi si può trasformare $g(x)$ come segue:

$$g(x) = \log(2x)^3 = 3 \log(2x) = 3 \log 2 + 3 \log x = 3 \log 2 + f(x)$$

Pertanto $g(x)$ e $f(x)$ differiscono solamente per la costante $3 \log 2$ e avranno quindi la stessa derivata:

$$g'(x) = f'(x) = \frac{3}{x}.$$

7 L'area di un triangolo qualunque è uguale alla metà del prodotto di due lati per il seno dell'angolo tra essi compreso, ovvero $A = \frac{1}{2} ab \sin \delta$; tale area sarà massima quando $\sin \delta = 1$ e cioè quando

$$\delta = \frac{\pi}{2}.$$

8 Il grado sessagesimale è la 360^{a} parte dell'angolo giro; il radiante è l'angolo al centro del cerchio goniometrico che insiste su un arco di lunghezza unitaria; il grado centesimale è la 400^{a} parte dell'angolo giro.

9 Questo integrale può essere calcolato con la formula di integrazione per parti prendendo come fattore finito $\arcsen x$ e come fattore differenziale $1 \cdot dx$; si ottiene così:

$$[x \cdot \arcsen x + \sqrt{1-x^2}]_0^1 = \frac{\pi}{2} - 1$$

10 Dovendo associare a ciascuno dei quattro elementi di A uno dei tre elementi di B si ottengono 3^4 diverse applicazioni, ovvero tutte le possibili disposizioni con ripetizione di 3 elementi presi a gruppi di 4.

Per esercitarti ancora sugli argomenti affrontati nel	Svolgi
Problema 1	<ul style="list-style-type: none"> • Esercizio 29 pag. V 241 • Esercizio 31 pag. V 241 • Esercizio 33 pag. V 241 • Esercizio 35 pag. V 241 • Esercizio 41 pag. V 241 • Esercizio 252 pag. W 121 • Esercizio 261 pag. W 122 • Esercizio 153 pag. U 32 • Esercizio 154 pag. U 32
Problema 2	<ul style="list-style-type: none"> • Problema 266 pag. V 278 • Problema 270 pag. V 278 • Problema 276 pag. V 278 • Problema 277 pag. V 278 • Problema 305 pag. V 210 • Problema 309 pag. V 210 • Problema 317 pag. V 211 • Problema 319 pag. V 211 • Problema 320 pag. V 211 • Problema 321 pag. V 211 • Problema 16 pag. V 217
Quesito 3	<ul style="list-style-type: none"> • Esercizio 221 pag. V 194 • Esercizio 222 pag. V 194
Quesito 6	<ul style="list-style-type: none"> • Quesito 4 pag. V 282
Quesito 9	<ul style="list-style-type: none"> • Esercizio 109 pag. W 112 • Esercizio 110 pag. W 112 • Esercizio 119 pag. W 112 • Esercizio 121 pag. W 112 • Esercizio 132 pag. W 112 • Esercizio 136 pag. W 112
Quesito 10	<ul style="list-style-type: none"> • Esercizio 26 pag. α 25 • Esercizio 190 pag. α 38