ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO • 2003
Sessione straordinaria

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1

È assegnata la seguente equazione in x:

$$x^3 + 2x - 50 = 0.$$

a) Dimostrare che ammette una e una sola soluzione $\overline{x}$ nel campo reale.
b) Determinare il numero intero z tale che risulti: $z < \overline{x} < z + 1$.
c) Dopo aver riferito il piano a un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), determinare, se esistono, i valori del parametro reale k ($k \neq -1$) per cui la curva C_k di equazione:

$$y = (x^3 + 2x - 50) + k(x^3 + 2x - 75)$$

ammette un massimo e un minimo relativi.
d) Stabilire se esiste un valore $\overline{k}$ di k per cui la curva $C_{\overline{k}}$ è simmetrica rispetto all'origine O.
e) Stabilire se fra le rette di equazione $y = 5x + m$, dove m è un parametro reale, ve ne sono di tangenti alla curva C_0 ottenuta per $k = 0$.

PROBLEMA 2

La base minore, la base maggiore e il perimetro di un trapezio isoscele misurano nell'ordine:

6 cm, 10 cm, $4(4 + \sqrt{5})$ cm.

a) Dire, giustificando la risposta, se il trapezio è circoscrittibile a una circonferenza.
b) Spiegare perché il trapezio è inscrittibile in una circonferenza k.
c) Dopo aver riferito il piano del trapezio a un conveniente sistema di assi cartesiani ortogonali, trovare l'equazione di k.
d) Trovare l'equazione della parabola p passante per gli estremi della base minore del trapezio e avente l'asse perpendicolare a tale base e il vertice nel centro di k.
e) Calcolare le aree delle regioni piane in cui la parabola p divide il trapezio.
f) Calcolare le aree delle regioni piane in cui la parabola p divide il cerchio delimitato da k.

QUESTIONARIO

1 Nell'insieme delle rette dello spazio si consideri la relazione così definita: «due rette si dicono parallele se sono complanari e non hanno punti comuni». Dire se è vero o falso che gode della proprietà transitiva e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

2 In un piano, riferito a un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è assegnato il luogo geometrico dei punti che soddisfano alla seguente equazione:

$$8x^2+8y^2-4kx+8y-3k=0,$$

dove k è un parametro reale. Calcolare per quali valori di k il luogo è costituito da:

1) un punto; 2) due punti; 3) infiniti punti; 4) nessun punto.

3 Dimostrare che condizione necessaria e sufficiente affinché un trapezio rettangolo abbia le diagonali perpendicolari è che le misure della base minore, dell'altezza e della base maggiore, prese nell'ordine e considerate rispetto alla stessa unità di misura, siano numeri in progressione geometrica.

4 Dire se è vero che risulta: $\sqrt{x^2+2x\sqrt{3}+3}=x+\sqrt{3}$ per ogni x reale e giustificare la risposta.

5 Si consideri la funzione polinomiale in x:

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n.$$

Dimostrare che il suo grafico, rappresentato in un piano cartesiano, ha come tangente nel punto di ascissa 0 la retta di equazione $y=a_0+a_1x$.

6 Si consideri la successione di termine generale a_n tale che:

$$a_n=\begin{cases}1 & \text{se } n=1\\ a_{n-1}+n & \text{se } n>1\end{cases}.$$

Calcolare a_{100}.

7 Considerata la successione di termine generale:

$$a_n=\frac{2}{3^n},$$

calcolare $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

8 Considerata la funzione $f(x)$ tale che:

$$f(x)=\int_0^x(1-\ln t)\,dt,\ \text{ con } x>0,$$

determinare i suoi zeri e gli intervalli in cui cresce o decresce.

9 Come si sa, la parte di sfera compresa fra due piani paralleli che la secano si chiama *segmento sferico a due basi*. Indicati con r_1 ed r_2 i raggi delle due basi del segmento sferico e con h la sua altezza (distanza tra le basi), dimostrare che il volume V del segmento sferico considerato è dato dalla seguente formula:

$$V = \frac{1}{6}\pi h(h^2 + 3r_1^2 + 3r_2^2).$$

Qualunque sia il metodo seguito per la dimostrazione, esplicitare ciò che si ammette.

10 Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x (1 - e^{-t})\,dt}{\operatorname{sen}^2 x}$$

essendo e la base dei logaritmi naturali.

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

SOLUZIONE DELLA PROVA D'ESAME
CORSO DI ORDINAMENTO • 2003
Sessione straordinaria

PROBLEMA 1

a) Posto $f(x) = x^3 + 2x - 50$, la funzione f è continua in $\mathbb{R}$, i limiti agli estremi del campo di esistenza valgono $\lim\limits_{x \to \pm\infty} (x^3 + 2x - 50) = \pm\infty$ e la derivata prima $f'(x) = 3x^2 + 2$ è sempre positiva in $\mathbb{R}$. Per il teorema di unicità dello zero, la funzione f ha uno e un solo punto in cui si annulla e quindi l'equazione $x^3 + 2x - 50 = 0$ ammette una e una sola soluzione reale $\bar{x}$.

b) Si considera l'immagine della funzione $f(x) = x^3 + 2x - 50$ per alcuni valori interi di x:

$$f(2) = -38, \quad f(3) = -17, \quad f(4) = 22.$$

Si osserva che nell'intervallo [3; 4] la funzione cambia di segno, pertanto lo zero $\bar{x}$ della funzione è localizzato in tale intervallo, ovvero $z < \bar{x} < z + 1$, con $z = 3$.

c) Considerata la funzione parametrica $f_k(x) = (x^3 + 2x - 50) + k(x^3 + 2x - 75)$, con $k \neq -1$, si può scrivere $f_k(x) = (k+1)x^3 + 2(k+1)x - 25(2 + 3k)$. Essa è continua e ha derivata prima:

$$f'_k(x) = 3(k+1)x^2 + 2(k+1).$$

Si studia il segno di quest'ultima ponendo $3(k+1)x^2 + 2(k+1) > 0$:

- se $k > -1$, $3(k+1)x^2 + 2(k+1) > 0 \quad \rightarrow \quad 3x^2 + 2 > 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$;
- se $k < -1$, $3(k+1)x^2 + 2(k+1) > 0 \quad \rightarrow \quad 3x^2 + 2 < 0 \Rightarrow \nexists x \in \mathbb{R}$.

Poiché per $k > -1$ si ha $f'_k(x) > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$, la funzione $f_k(x)$ è crescente, mentre per $k < -1$ è $f'_k(x) < 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ e quindi la funzione $f_k(x)$ è decrescente.

In conclusione non esistono valori di k per cui la funzione f_k ammette un massimo e un minimo relativi.

d) La funzione $f_k(x) = (k+1)x^3 + 2(k+1)x - 25(2 + 3k)$ è simmetrica rispetto all'origine O se vale che $f_k(-x) = -f_k(x)$, ovvero se è verificata l'uguaglianza:

$$(k+1)(-x)^3 + 2(k+1)(-x) - 25(2+3k) = -(k+1)x^3 - 2(k+1)x + 25(2+3k), \text{ cioè}$$
$$-(k+1)x^3 - 2(k+1)x - 25(2+3k) = -(k+1)x^3 - 2(k+1)x + 25(2+3k)$$

Confrontando i due membri dell'uguaglianza, deve essere:

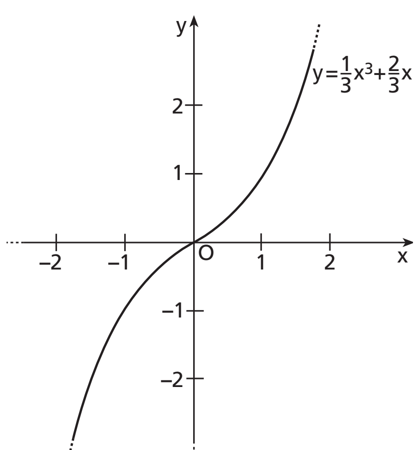
$$-25(2+3k) = 25(2+3k) \quad \Rightarrow \quad k = -\frac{2}{3}.$$

Pertanto la curva $C_{\bar{k}}$, con $\bar{k} = -\dfrac{2}{3}$, di equazione:

$$f_{-\frac{2}{3}}(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{3}x$$

è simmetrica rispetto all'origine del sistema di riferimento cartesiano.

Il suo grafico è rappresentato nella figura 1.

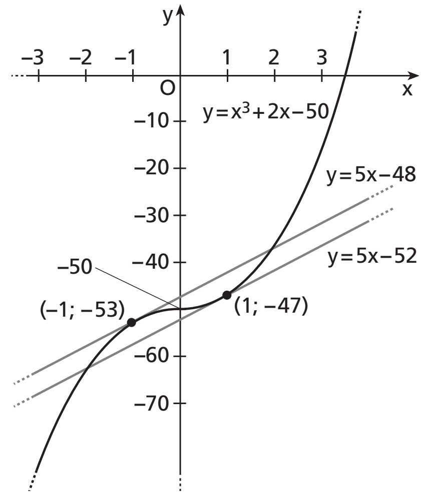


▶ **Figura 1.**

e) La curva C_0 ha equazione $f(x) = x^3 + 2x - 50$. La sua derivata prima, $f'(x) = 3x^2 + 2$, rappresenta il coefficiente angolare della retta tangente nel generico punto $(x; f(x))$. Considerate le rette di equazione $y = 5x + m$, di coefficiente angolare uguale a 5, si impone l'uguaglianza $f'(x) = 5$ cioè $3x^2 + 2 = 5 \rightarrow x = \pm 1$. Pertanto i punti della curva C_0 di coordinate $(-1; -53)$, $(1; -47)$ hanno tangenti di equazione $y = 5x + m$. Si impone a tali rette il passaggio per i punti suddetti per ricavare i valori di m:

$$\text{per } (-1; -53),\ -53 = 5(-1) + m \quad \rightarrow \quad m = -48;$$
$$\text{per } (1; -47),\ -47 = 5(1) + m \quad \rightarrow \quad m = -52.$$

Concludendo, le rette $y = 5x - 48$ e $y = 5x - 52$ sono tangenti alla curva C_0. Nella figura 2 è riportato il grafico di C_0 e delle due rette tangenti.



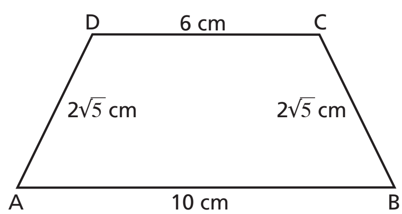
▲ **Figura 2.**

PROBLEMA 2

a) Sia $ABCD$ il trapezio isoscele di base minore, base maggiore e perimetro rispettivamente 6 cm, 10 cm, $4(4 + \sqrt{5})$ cm (figura 3). Da qui si omette per comodità l'indicazione dell'unità di misura.
I lati obliqui AD e BC misurano:

$$\overline{AD} = \overline{BC} = \frac{1}{2}(2p - \overline{AB} - \overline{CD}) \quad \rightarrow \quad \overline{AD} = \overline{BC} = \frac{1}{2}[4(4 + \sqrt{5}) - 10 - 6] = 2\sqrt{5}.$$

▼ **Figura 3.**



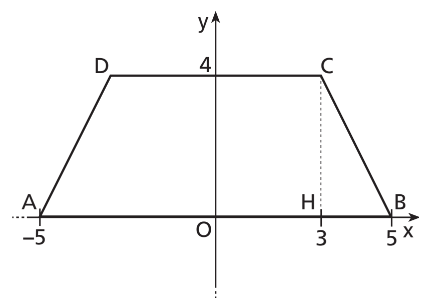
Dalla geometria euclidea è noto che la condizione necessaria e sufficiente affinché un quadrilatero sia circoscrivibile a una circonferenza è che la somma di due lati opposti sia congruente alla somma degli altri due. Poiché $\overline{AD} + \overline{BC} = 4\sqrt{5}$ e, $\overline{AB} + \overline{CD} = 16$, risulta $\overline{AD} + \overline{BC} \neq \overline{AB} + \overline{CD}$ e pertanto il trapezio $ABCD$ non è circoscrivibile a una circonferenza.

b) Nel trapezio $ABCD$ (figura 3) gli angoli adiacenti alle basi sono congruenti per ipotesi, trattandosi di un trapezio isoscele, ossia $D\hat{A}B \cong A\hat{B}C$ e $A\hat{D}C \cong D\hat{C}B$. Inoltre $D\hat{A}B$ è supplementare ad $A\hat{D}C$ e $A\hat{B}C$ è supplementare a $D\hat{C}B$, perché angoli coniugati interni. Risulta allora che gli angoli opposti $A\hat{B}C$ e $A\hat{D}C$ del trapezio sono tra loro supplementari e, alla stessa maniera, gli angoli opposti $D\hat{A}B$ e $D\hat{C}B$ sono anch'essi supplementari. È quindi soddisfatta la condizione necessaria e sufficiente affinché il quadrilatero sia inscrivibile in una circonferenza k.

c) Si pone un sistema di assi cartesiani ortogonali con l'origine O nel punto medio della base maggiore AB, in modo che tale base poggi sull'asse delle ascisse (figura 4). In questa maniera, detto E il centro della circonferenza k, dovendo equidistare dai quattro vertici del trapezio, si troverà sull'asse delle ordinate.

Tracciata l'altezza CH, risulta $\overline{HB} = \frac{1}{2}(\overline{AB} - \overline{CD}) = 2$ e, applicando il teorema di Pitagora al triangolo BCH, si trova

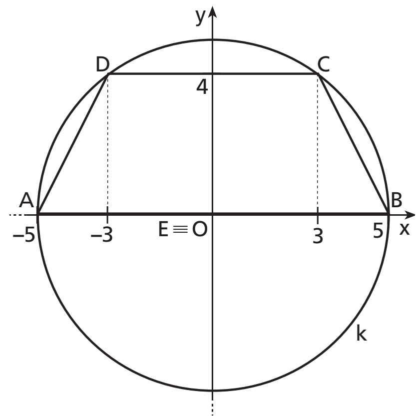
$$\overline{CH} = \sqrt{\overline{CB}^2 - \overline{BH}^2} = \sqrt{20 - 4} = 4.$$



▲ **Figura 4.**

I vertici del trapezio sono quindi: $A(-5; 0)$, $B(5; 0)$, $C(3; 4)$, $D(-3; 4)$.

▼ **Figura 5.**



Considerate le coordinate del centro $E(0; e)$ della circonferenza k, con e reale, esse devono soddisfare la relazione $\overline{EC} = \overline{EB}$:

$$\sqrt{(0-3)^2 + (e-4)^2} = \sqrt{(0-5)^2 + (e-0)^2},$$

ed elevando al quadrato,

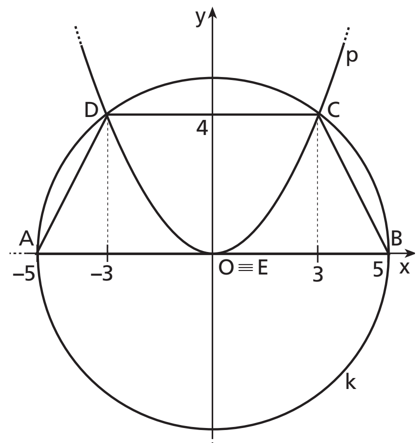
$$25 + e^2 - 8e = 25 + e^2 \rightarrow e = 0.$$

Il centro della circonferenza E coincide con l'origine del sistema cartesiano e il raggio vale 5. La circonferenza ha equazione:

$$x^2 + y^2 = 25.$$

Nella figura 5 è rappresentata la circonferenza k circoscritta al trapezio $ABCD$.

d) Poiché il centro della circonferenza è l'origine degli assi, la parabola p ha vertice situato in tale punto e il suo asse di simmetria coincide con l'asse delle y. L'equazione della parabola è quindi della forma $y = ax^2$. Si determina il valore del coefficiente a imponendo il passaggio per uno dei due estremi della base minore CD, per esempio C. Si trova: $4 = a(3)^2 \rightarrow a = \frac{4}{9}$. L'equazione della parabola p è $y = \frac{4}{9}x^2$ e il suo grafico è riportato nella figura 6.



▲ **Figura 6.**

e) Nella figura 7 sono evidenziate le tre regioni in cui la parabola p divide il trapezio. Si tratta del segmento parabolico DOC e delle figure mistilinee AOD e OBC tra loro congruenti. Applicando il teorema di Archimede si trova la superficie del segmento parabolico:

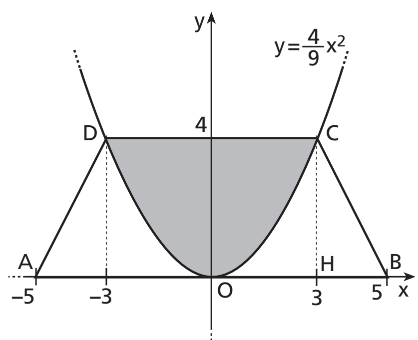
$$S_{DOC} = \frac{2}{3}\overline{DC}\cdot\overline{CH} = \frac{2}{3}\cdot 6\cdot 4 = 16.$$

Le aree S_{AOD} e S_{OBC} si ricavano per differenza tra la superficie del trapezio e quella del segmento parabolico:

$$S_{AOD} = S_{OBC} = \frac{1}{2}(S_{ABCD} - S_{DOC}) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{CD})\cdot\overline{CH} - S_{DOC}\right].$$

Sostituendo le misure dei segmenti risulta:

$$S_{AOD} = S_{OBC} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(10+6)\cdot 4 - 16\right] = 8.$$



▲ **Figura 7.**

f) La figura 8 mostra le regioni piane in cui la parabola p divide la circonferenza k. Si determina la superficie della figura mistilinea $DOCF$ attraverso il calcolo integrale.

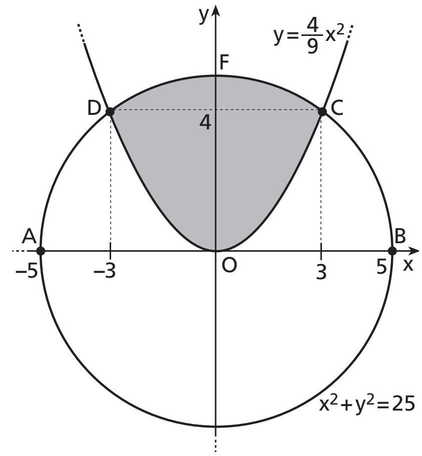
L'arco $\widehat{DFC}$ ha equazione $y=\sqrt{25-x^2}$ mentre l'arco di parabola ha espressione $y=\frac{4}{9}x^2$. Pertanto la regione mistilinea $DOCF$, tenuto conto della sua simmetria rispetto all'asse y, ha superficie:

$$S_{DOCF}=2\int_0^3\left(\sqrt{25-x^2}-\frac{4}{9}x^2\right)dx.$$

Applicando la formula di integrazione:

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{1}{2}a^2\operatorname{arcsen}\frac{x}{a}+\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2},$$

si trova:



▲ Figura 8.

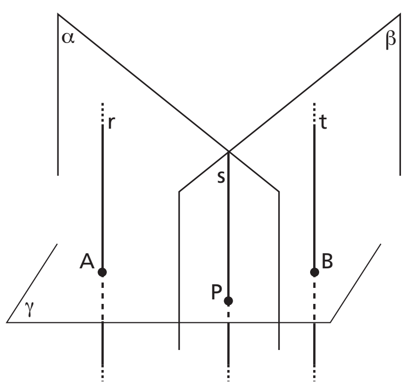
$$S_{DOCF}=2\left[\frac{1}{2}\cdot 25\cdot\operatorname{arcsen}\frac{x}{5}+\frac{1}{2}x\sqrt{25-x^2}-\frac{4}{9\cdot 3}x^3\right]_0^3=25\operatorname{arcsen}\frac{3}{5}+3\cdot 4-8=25\operatorname{arcsen}\frac{3}{5}+4.$$

L'area della restante regione S_{DABCO} si ricava per differenza tra la superficie del cerchio di raggio 5 e S_{DOCF} appena trovata. Pertanto vale:

$$S_{DABCO}=25\pi-25\operatorname{arcsen}\frac{3}{5}-4.$$

QUESTIONARIO

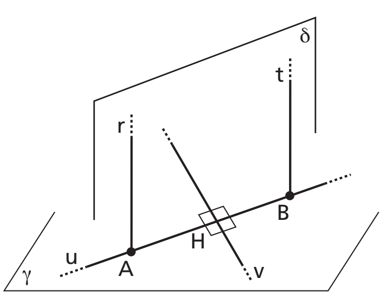
1 La relazione «due rette si dicono parallele se sono complanari e non hanno punti comuni» gode della proprietà transitiva. Infatti, si considerano due rette r ed s parallele tra loro e appartenenti al piano α (figura 9). Sia t una retta parallela ad s e sia β il piano che le contiene. Si vuole dimostrare che le rette r e t sono tra loro parallele. Si consideri un generico punto P della retta s e si conduca da esso un piano γ perpendicolare alla retta stessa. Per un noto teorema della geometria euclidea nello spazio, se due rette sono parallele, ogni piano perpendicolare all'una è perpendicolare pure all'altra. Pertanto il piano γ è perpendicolare sia alla retta r che alla retta t. Ora, si può dimostrare che due rette perpendicolari a uno stesso piano sono parallele tra loro. Infatti, siano A e B i piedi delle perpendicolari r e t sul piano γ e sia u la retta che congiunge A e B (figura 10).



▲ Figura 9.

Si conduca su γ una retta v perpendicolare alla u in un punto H. Dato che r è perpendicolare a γ e la retta u è perpendicolare a v, allora la retta v è perpendicolare al piano δ determinato dalle rette r e u, per il teorema delle tre perpendicolari.

Nella stessa maniera si dimostra che v è perpendicolare al piano individuato dalle rette t e u. Poiché di piani perpendicolari alla retta v ve ne è uno solo nel punto H, ne consegue che le rette r e t appartengono allo stesso piano. Essendo quest'ultime complanari ed entrambe perpendicolari alla stessa retta u allora sono parallele.

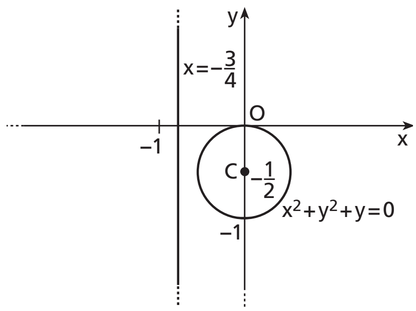


▲ Figura 10.

2 Data l'equazione $8x^2+8y^2-4kx+8y-3k=0$, essa può essere scritta nella forma:

$$x^2+y^2+y+k\left(-\frac{1}{2}x-\frac{3}{8}\right)=0.$$

Si tratta di una combinazione lineare tra l'equazione $x^2+y^2+y=0$, rappresentante la circonferenza di centro $C\left(0;-\frac{1}{2}\right)$ e raggio $r=\frac{1}{2}$, e la retta $x=-\frac{3}{4}$ (figura 11). Il luogo geometrico si riconduce a un fascio di circonferenze di centro $\left(\frac{k}{4};-\frac{1}{2}\right)$ e raggio $r_k=\sqrt{\frac{k^2}{16}+\frac{1}{4}+\frac{3}{8}k}$ se vale la condizione di realtà $\frac{k^2}{16}+\frac{1}{4}+\frac{3}{8}k\geq 0$. In particolare, si trova:



▲ **Figura 11.**

$$\frac{k^2}{16}+\frac{1}{4}+\frac{3}{8}k\geq 0 \quad\rightarrow\quad k^2+6k+4\geq 0 \quad\Rightarrow\quad k\leq -3-\sqrt{5} \vee k\geq -3+\sqrt{5}.$$

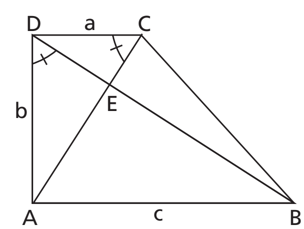
Per $k\leq -3-\sqrt{5} \vee k\geq -3+\sqrt{5}$, l'equazione di partenza è un fascio di circonferenze con generatrici di equazione: $x^2+y^2+y=0$ e $x=-\frac{3}{4}$ (figura 11).

Poiché il sistema delle generatrici, $\begin{cases} x^2+y^2+y=0 \\ x=-\frac{3}{4} \end{cases}$, ha equazione risolvente $y^2+y+\frac{9}{16}=0$ con discriminante negativo, l'asse radicale $x=-\frac{3}{4}$ è esterno alle circonferenze, le quali non possiedono punti base.

Si può concludere che il luogo geometrico è costituito da:

1) un punto quando $r_k=0$, ossia per $k=-3\pm\sqrt{5}$;
2) da due punti per nessun valore di k;
3) da infiniti punti per $k<-3-\sqrt{5} \vee k>-3+\sqrt{5}$;
4) da nessun punto per $-3-\sqrt{5}<k<-3+\sqrt{5}$.

3 È dato il trapezio rettangolo *ABCD* le cui misure della base minore, dell'altezza e della base maggiore sono rispettivamente *a*, *b*, *c* (figura 12). Si vuole dimostrare che condizione necessaria affinché le diagonali del trapezio siano perpendicolari è che i numeri *a*, *b*, *c* siano in progressione geometrica ovvero $b:a=q=c:b$, dove q è la ragione della progressione.



▲ **Figura 12.**

Assunto *DB* perpendicolare ad *AC*, i triangoli *DAC* e *DAB* sono simili per il primo criterio di similitudine, avendo entrambi un angolo retto e $A\hat{D}B\cong D\hat{C}A$, perché complementari dello stesso angolo $C\hat{D}B$. Pertanto hanno i lati corrispondenti in proporzione cioè $b:a=c:b$.

Viceversa, si dimostra che la relazione $b:a=c:b$ è sufficiente affinché le diagonali del trapezio siano tra loro perpendicolari. Si considerano i triangoli rettangoli *DAC* e *DAB*: essi sono simili per il secondo criterio di similitudine. In particolare $A\hat{D}B\cong D\hat{C}A$. Si osserva allora che i triangoli *DEC* e *ABD* sono simili per il primo criterio, avendo $A\hat{D}B\cong D\hat{C}A$ e $A\hat{B}D\cong C\hat{D}B$, perché alterni interni. Pertanto $D\hat{E}C\cong D\hat{A}B$ è quindi retto e le diagonali del trapezio sono perpendicolari tra loro.

4 L'equazione irrazionale $\sqrt{x^2+2x\sqrt{3}+3}=x+\sqrt{3}$ è equivalente al sistema:

$$\begin{cases} x^2+2x\sqrt{3}+3\geq 0 \\ x+\sqrt{3}\geq 0 \\ x^2+2x\sqrt{3}+3=(x+\sqrt{3})^2 \end{cases} \quad \to \quad \begin{cases} (x+\sqrt{3})^2\geq 0 \to \forall x\in\mathbb{R} \\ x\geq -\sqrt{3} \\ (x+\sqrt{3})^2=(x+\sqrt{3})^2 \to \forall x\in\mathbb{R} \end{cases}.$$

Pertanto è falso che risulta $\sqrt{x^2+2x\sqrt{3}+3}=x+\sqrt{3}$ per ogni x reale.

5 La funzione polinomiale $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$ è continua e derivabile nel campo reale. L'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto generico $(x_0; f(x_0))$, ha forma:

$$y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0).$$

Assunto $x_0=0$, si calcola $f'(0)$:

$$f'(x)=a_1+2a_2x+\ldots+na_nx^{n-1} \quad \to \quad f'(0)=a_1.$$

Essendo $f(0)=a_0$ e andando a sostituire, si trova l'equazione della retta tangente nel punto $x=0$:

$$y=a_1x+a_0.$$

6 Scrivendo i termini della successione si ha:

$$a_1=1$$
$$a_2=a_1+2=1+2$$
$$a_3=a_2+3=1+2+3$$
$$a_4=a_3+4=1+2+3+4$$
$$\vdots$$
$$a_{100}=a_{99}+100=1+2+3+4+\ldots+100$$

I termini della somma $1+2+3+4+\ldots+100$ sono gli elementi di una progressione aritmetica di ragione 1; vale allora la formula della somma dei primi n termini:

$$s_n=n\cdot\frac{a_1+an}{2}.$$

Sostituendo, risulta:

$$a_{100}=100\cdot\frac{1+100}{2}=5050.$$

7 La serie numerica $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^n}$ è geometrica di ragione $q=\frac{1}{3}$ e primo termine $a_1=\frac{2}{3}$, per cui la somma ridotta S_n risulta:

$$S_n=\frac{2}{3}\cdot\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n-1}{\frac{1}{3}-1}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{\frac{2}{3}}=1-\left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

Allora:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^n}=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)=1.$$

8 Si trova l'espressione di $f(x)$ calcolando l'integrale $\int_0^x (1-\ln t)\,dt$:

$$\int_0^x (1-\ln t)\,dt = \int_0^x dt - \int_0^x \ln t\,dt = x - \int_0^x \ln t\,dt = x - \lim_{b\to 0^+} \int_b^x \ln t\,dt =$$

applicando l'integrazione per parti:

$$= x - \lim_{b\to 0^+}\left([t\ln t]_b^x + \int_b^x t\cdot\frac{1}{t}\,dt\right) = x - x\ln x + \lim_{b\to 0^+} b\ln b + x =$$

essendo $\lim_{b\to 0^+} b\ln b = 0$ per il teorema di De L'Hospital, risulta:

$$= 2x - x\ln x.$$

Si studia la funzione $f(x) = 2x - x\ln x$, con $x > 0$.
Gli zeri si ottengono ponendo $f(x) = 0$:

$$2x - x\ln x = 0 \quad \to \quad x(2-\ln x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \vee 2 - \ln x = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = 0, \text{ non accettabile, e } x_2 = e^2.$$

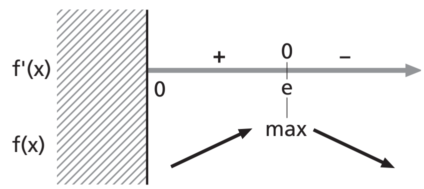
Lo zero di $f(x) = \int_0^x (1-\ln t)\,dt$, con $x > 0$, è unico e vale $x = e^2$.

Si determina la crescenza e decrescenza studiando il segno della derivata prima $f'(x)$, che risulta essere, per il teorema fondamentale del calcolo integrale:

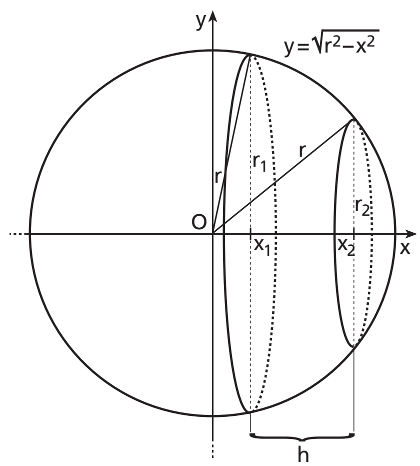
$$f'(x) = 1 - \ln x, \quad x > 0.$$

Poiché $1 - \ln x > 0$ è vera nel C.E. per $0 < x < e$, si ha la seguente tabella dei segni della derivata prima (figura 13).
La funzione $f(x)$ è pertanto strettamente crescente per $0 < x < e$, ha un massimo per $x = e$, è strettamente decrescente per $x > e$.

▼ **Figura 13.**



9 L'intento è di dimostrare la formula del volume di un segmento sferico a due basi attraverso il calcolo integrale. Si può diversamente seguire la via della geometria euclidea nello spazio, applicando il teorema di equivalenza tra un segmento sferico a una base e la somma di una particolare sfera e di un cilindro.
Nella figura 14 si ottiene un segmento sferico a due basi attraverso la rotazione intorno all'asse delle x di un arco di circonferenza di raggio r, di equazione $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, con $x_1 \le x \le x_2$.
Per il calcolo integrale, il volume del solido di rotazione si trova tramite la formula $V = \pi \int_{x_1}^{x_2} [f(x)]^2\,dx$. Nel caso in questione vale:



▲ **Figura 14.**

$$V = \pi \int_{x_1}^{x_2} (\sqrt{r^2 - x^2})^2\,dx = \pi \int_{x_1}^{x_2} (r^2 - x^2)\,dx =$$

$$= \pi\left[r^2 x - \frac{1}{3}x^3\right]_{x_1}^{x_2} = \pi\left[r^2(x_2 - x_1) - \frac{1}{3}(x_2^3 - x_1^3)\right] =$$

$$= \frac{\pi}{3}(x_2 - x_1)[3r^2 - (x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2)].$$

Essendo $x_2 - x_1 = h$, elevando al quadrato entrambi i membri, si ottiene $x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 x_2 = h^2$, da cui si ricava $x_1 x_2 = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 - h^2)$. Sostituendo all'espressione del volume si ottiene:

$$V = \frac{\pi}{3} h\left\{3r^2 - \left[x_1^2 + x_2^2 + \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 - h^2)\right]\right\} = \frac{\pi}{3} h\left\{3r^2 - \frac{3x_1^2 + 3x_2^2 - h^2}{2}\right\} = \frac{\pi}{6} h(6r^2 - 3x_1^2 - 3x_2^2 + h^2).$$

Per il teorema di Pitagora risulta $x_1^2 = r^2 - r_1^2$ e $x_2^2 = r^2 - r_2^2$, pertanto, sostituendo si trova:

$$V = \frac{\pi}{6} h(6r^2 - 3r^2 + 3r_1^2 - 3r^2 + 3r_2^2 + h^2) = \frac{\pi}{6} h(3r_1^2 + 3r_2^2 + h^2).$$

10 Per $x \to 0$, il limite ha forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Al numeratore vi è una funzione integrale ed esiste la sua derivata prima nell'intervallo $[0; x]$ che vale $\mathrm{D}\left[\int_0^x (1 - e^{-t})\, dt\right] = 1 - e^{-x}$ per il teorema fondamentale del calcolo integrale. La funzione al denominatore, $y = \operatorname{sen}^2 x$ è derivabile e diversa da zero in un intorno di $x = 0$ escluso. Si può pertanto applicare il teorema di De L'Hospital:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x (1 - e^{-t})\, dt}{\operatorname{sen}^2 x} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - e^{-x}}{2 \operatorname{sen} x \cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - e^{-x}}{\operatorname{sen} 2x}.$$

Si tratta nuovamente di una forma indeterminata per la quale è utilizzabile ancora il teorema di De L'Hospital:

$$= \lim_{x \to 0} \frac{e^{-x}}{2 \cos 2x} = \frac{1}{2}.$$

Concludendo, $\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x (1 - e^{-t})\, dt}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{1}{2}$.

Per esercitarti ancora sugli argomenti trattati nel	Svolgi il
Problema 1	• Quesito 5 pag. W 171 • Test 51 pag. ι 27 • Esercizio 216 pag. W 194 • Esercizio 219 pag. W 194 • Esercizio 236 pag. J_1 74 • Esercizio 476 pag. V 7
Problema 2	• Problema 75 pag. L 372 (punto d) • Esercizio 200 pag. L 141 • Esercizio 47 pag. L 367 (punti a, b) • Esercizio 40 pag. L 366 • Esercizio 326 pag. L 229 • Esercizio 181 pag. L 210 • Problema 28 pag. W 140 (punto c)
Quesito 1	• Quesito 9 pag. W 165 • Test 2 pag. π 95 • Quesito 7 pag. π 96
Quesito 2	• Test 3 pag. L 426 • Quesito 6 pag. L 428 • Quesito 8 pag. L 428
Quesito 3	• Problema 17 pag. S 177 (punto a)
Quesito 4	• Esercizio 498 pag. S 77 • Test 1 pag. S 88
Quesito 5	• Esercizio 514 pag. V 79 • Esercizio 520 pag. V 79 • Quesito 6 pag. W 177
Quesito 6	• Esercizio 210 pag. S 158 • Esercizio 254 pag. S 161
Quesito 7	• Quesito 7 pag. U 240
Quesito 8	• Esercizio 319 pag. W 52 • Esercizio 188 pag. W 115 • Esercizio 189 pag. W 115
Quesito 9	• Esercizio 270 pag. W 124 • Esercizio 275 pag. W 124
Quesito 10	• Esercizio 198 pag. W 115 • Quesito 2 pag. W 168