ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO • 2002
Sessione straordinaria

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1

Con riferimento a un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy):

a) scrivere l'equazione della circonferenza k con centro nel punto $(8; 2)$ e raggio 6 e calcolare le coordinate dei punti M ed N in cui la bisettrice b del 1° e 3° quadrante interseca la curva;

b) scrivere l'equazione della parabola p avente l'asse parallelo all'asse delle ordinate, tangente all'asse delle ascisse in un punto del semipiano $x > 0$ e passante per i punti M ed N;

c) calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dalla parabola p e dalla bisettrice b;

d) dopo aver stabilito che la circonferenza k e la parabola p non hanno altri punti in comune oltre ad M ed N, calcolare le aree delle regioni in cui il cerchio delimitato da k è diviso dalla parabola.

PROBLEMA 2

Con riferimento a un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy):

a) studiare le funzioni:

$$y = \frac{-2x^3 + 6x^2}{3}, \qquad y = \frac{x^3 - 6x^2 + 12x}{3}$$

e disegnare i loro grafici;

b) dopo aver verificato che, oltre al punto O, tali grafici hanno in comune un altro punto A, determinare sul segmento OA un punto P tale che, condotta per esso la retta parallela all'asse y, sia massima la lunghezza del segmento RS, dove R ed S sono i punti in cui la retta interseca i due grafici suddetti;

c) determinare le coordinate dei punti di ascisse uguali in cui le due curve hanno tangenti parallele e verificare che, oltre al punto A, si ritrovano i punti R ed S;

d) calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dalle due curve.

QUESTIONARIO

1 Sia D il dominio di una funzione reale di variabile reale $f(x)$ e sia x_0 un elemento di D: definire la continuità e la discontinuità di $f(x)$ in x_0 e fornire un'interpretazione geometrica delle definizioni date.

2 In un piano è assegnata una parabola p. Tracciata la tangente t a essa nel suo vertice, chiamati M ed N due punti di p simmetrici rispetto al suo asse e indicate con M' ed N' rispettivamente le proiezioni ortogonali di M ed N sulla retta t, determinare il rapporto fra l'area della regione piana delimitata dalla parabola e dalla retta MN e quella del rettangolo $MNN'M'$, fornendo una esauriente dimostrazione.

3 Si consideri un cono circolare retto ottenuto dalla rotazione di un triangolo isoscele intorno all'altezza propriamente detta. Sapendo che il perimetro del triangolo è costante, stabilire quale rapporto deve sussistere fra il lato del triangolo e la sua base affinché il cono abbia volume massimo.

4 In un riferimento monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy) è assegnata l'iperbole di equazione $y=\frac{1}{x}$. Considerati su di essa i punti A e B di ascisse rispettivamente a e $\frac{1}{a}$, con $a \neq 0$, si traccino le tangenti all'iperbole in A e B. Calcolare l'area della regione piana delimitata dall'iperbole e dalle tangenti considerate.

5 Dimostrare che la derivata della funzione $\log_a x$ è la funzione $\frac{1}{x}\log_a e$, dove e è la base dei logaritmi naturali.

6 Considerata l'equazione $x^2 + kx + k = 0$, calcolare il limite di ciascuna delle sue radici per $k \to +\infty$.

7 Dopo aver definito il limite destro e il limite sinistro di una funzione in un punto, ricorrere a tali definizioni per verificare che risulta:

$$\lim_{x \to 0^-}\left(x+\frac{x}{|x|}\right) = -1, \quad \lim_{x \to 0^+}\left(x+\frac{x}{|x|}\right) = 1.$$

8 Dimostrare che le curve di equazione $y = x^2 + kx + k$, assegnate in un riferimento cartesiano, passano tutte per uno stesso punto.

9 Considerati i 90 numeri del gioco del Lotto, calcolare quante sono le cinquine che, in una data estrazione, realizzano un determinato terno.

10 Dimostrare la formula che esprime il numero delle combinazioni semplici di n oggetti presi a k a k in funzione del numero delle disposizioni semplici degli stessi oggetti presi a k a k e delle permutazioni semplici su k oggetti.

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

SOLUZIONE DELLA PROVA D'ESAME
CORSO DI ORDINAMENTO • 2002
Sessione straordinaria

PROBLEMA 1

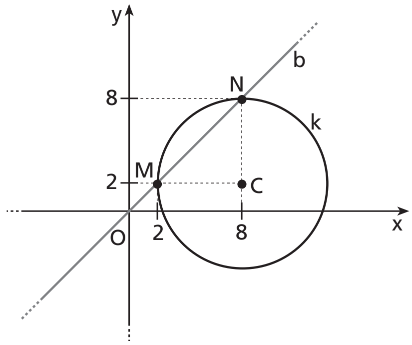
a) L'equazione della circonferenza con centro nel punto $(a; b)$ e raggio r è $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$. Quindi, nel nostro caso, l'equazione di k è $(x-8)^2+(y-2)^2=36$, da cui, svolgendo i calcoli e portando a forma normale, si ottiene:

$$x^2+y^2-16x-4y+32=0.$$

L'equazione della bisettrice b del 1° e 3° quadrante è $y=x$. Calcoliamo le coordinate dei punti M ed N di intersezione con la circonferenza risolvendo il seguente sistema:

$$\begin{cases} y=x \\ x^2+y^2-16x-4y+32=0 \end{cases}$$

Sostituendo $y=x$ alla seconda equazione si ottiene $2x^2-20x+32=0$, equivalente a $x^2-10x+16=0$ che ha come soluzioni $x=2$ e $x=8$. Perciò si trovano i punti $M(2; 2)$ ed $N(8; 8)$. Nella figura 1 è rappresentata la circonferenza k e la retta b.



▲ **Figura 1.**

b) La parabola p ha equazione del tipo $y=ax^2+bx+c$. L'asse delle ascisse è tangente a tale parabola e, poiché il punto di tangenza con tale retta è necessariamente il vertice V, si ha che la sua ordinata deve essere nulla, cioè $-\dfrac{b^2-4ac}{4a}=0 \rightarrow b^2-4ac=0$. Inoltre, sostituendo all'equazione di p le coordinate dei punti M ed N, si ottengono altre due equazioni da mettere a sistema con quella precedentemente trovata.

$$\begin{cases} 4a+2b+c=2 \\ 64a+8b+c=8 \\ b^2-4ac=0 \end{cases}$$

Ricavando $c=2-4a-2b$ dalla prima equazione e sostituendo nella seconda si ottiene $b=1-10a$; sostituendo nuovamente si ha:

$$\begin{cases} c=16a \\ b=1-10a \\ (1-10a)^2-4a\cdot 16a=0 \end{cases}$$

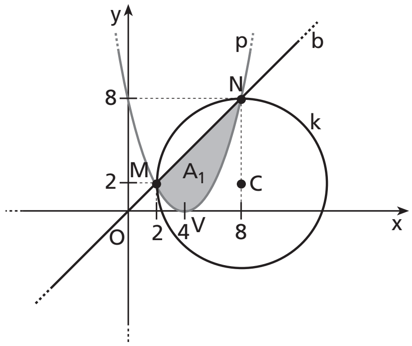
Dall'ultima equazione, portata a forma normale si ricava $36a^2-20a+1=0$, che ammette come soluzioni $a=\dfrac{1}{18}$ e $a=\dfrac{1}{2}$. In corrispondenza del primo caso si trova $b=1-10\cdot\dfrac{1}{18}=\dfrac{4}{9}$ e quindi l'ascissa del vertice (punto di tangenza con l'asse delle ascisse) risulterebbe $x_V=-\dfrac{b}{2a}=-4<0$, contro l'ipotesi. Consideriamo $a=\dfrac{1}{2}$; si ottiene $b=-4$ e $x_V=4>0$. In conclusione, la soluzione cercata è $a=\dfrac{1}{2}$, $b=-4$ e $c=8$. L'equazione della parabola è perciò:

$$y=\frac{1}{2}x^2-4x+8.$$

c) I punti in comune tra la bisettrice b e la parabola p sono $M(2;\ 2)$ ed $N(8;\ 8)$. La regione finita di piano delimitata dalla parabola p e dalla bisettrice b è evidenziata nella figura 2.
Secondo il calcolo integrale l'area della regione vale:

$$A_1 = \int_2^8 \left[x - \left(\frac{1}{2}x^2 - 4x + 8 \right) \right] dx = \int_2^8 \left(-\frac{1}{2}x^2 + 5x - 8 \right) dx =$$

$$= \left[-\frac{1}{6}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 8x \right]_2^8 = 18.$$



▲ **Figura 2.**

d) Per determinare tutti i punti in comune tra la circonferenza e la parabola consideriamo il seguente sistema:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 8 \\ x^2 + y^2 - 16x - 4y + 32 = 0 \end{cases}$$

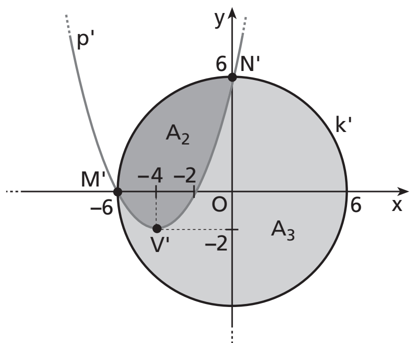
Sostituendo y nella seconda equazione e svolgendo i calcoli si ottiene l'equazione risolvente:

$$x^4 - 16x^3 + 92x^2 - 256x + 256 = 0.$$

Sapendo che tale equazione deve avere tra le sue soluzioni $x = 2$ e $x = 8$ (ascisse dei punti M ed N), applichiamo due volte la regola di Ruffini e si ottiene $(x-2)(x-8)(x^2 - 6x + 16) = 0$.
Il discriminante del polinomio $x^2 - 6x + 16$ è $\Delta = 9 - 16 < 0$ e quindi non vi sono ulteriori soluzioni. In conclusione, gli unici punti in comune tra la parabola p e la circonferenza k sono M ed N.
Calcoliamo ora le aree delle regioni in cui il cerchio delimitato da k è diviso dalla parabola p. Per semplificare i calcoli applichiamo la traslazione di equazioni:

$$\begin{cases} x' = x - 8 \\ y' = y - 2 \end{cases}$$

che porta il centro della circonferenza nell'origine. Dunque k viene trasformata nella circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 36$; mentre la parabola p viene trasformata in quella di equazione $y = \frac{1}{2}x^2 + 4x + 6$ (figura 3).



▲ **Figura 3.**

Poiché la semicirconferenza che contiene N' ha equazione $y = \sqrt{36 - x^2}$, l'area A_2 si calcola secondo il seguente integrale:

$$A_2 = \int_{-6}^0 \left[\sqrt{36 - x^2} - \left(\frac{1}{2}x^2 + 4x + 6 \right) \right] dx = \int_{-6}^0 6\sqrt{1 - \left(\frac{x}{6} \right)^2}\, dx - \int_{-6}^0 \left(\frac{1}{2}x^2 + 4x + 6 \right) dx =$$

e ponendo $\operatorname{sen} t = \frac{x}{6}$, cioè $x = 6 \operatorname{sen} t$ si ottiene:

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 6\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 t} \cdot 6 \cos t\, dt - \left[\frac{x^3}{6} + 2x^2 + 6x \right]_{-6}^0 = 36 \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \cos^2 t\, dt - 0 =$$

$$= 36 \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\cos 2t + 1}{2}\, dt = 18 \left[\frac{\operatorname{sen} 2t}{2} + t \right]_{-\frac{\pi}{2}}^0 = 9\pi.$$

Inoltre l'area del cerchio delimitato da k è $36\pi^2$. Quindi si trova che $A_3 = 36\pi^2 - A_2 = 9\pi(4\pi - 1)$.

PROBLEMA 2

a) Entrambe le funzioni sono di tipo polinomiale e hanno come campo di esistenza l'insieme dei numeri reali. Studiamo prima la funzione $f(x) = \frac{-2x^3 + 6x^2}{3}$.

Poiché $f(x) = -\frac{2x^2(x-3)}{3}$, la funzione è positiva se $x < 0 \vee 0 < x < 3$, negativa se $x > 3$ e il suo grafico interseca gli assi nei punti $(0; 0)$ e $(3; 0)$. Calcoliamo i limiti per $x \to \pm\infty$:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{-2x^3 + 6x^2}{3} = \mp\infty.$$

Verifichiamo se la funzione f ammette asintoti obliqui:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-2x^2 + 6x}{3} = -\infty.$$

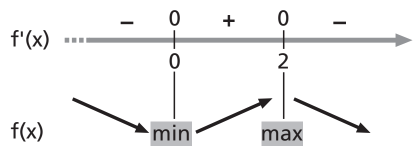
Ne segue che non vi sono asintoti obliqui. Studiamo ora la derivata prima.

$$f'(x) = -2x^2 + 4x = -2x(x-2).$$

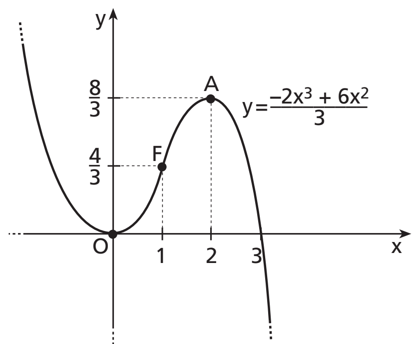
Lo schema della figura 4 ne riassume il segno.

La funzione ha perciò un minimo nel punto $O(0; 0)$ e un massimo in $A\left(2; \frac{8}{3}\right)$.

La derivata seconda è $f''(x) = -4x + 4$. Essa è positiva per $x < 1$, negativa per $x > 1$ e nulla in $x = 1$. Pertanto la funzione ha un unico flesso in $F\left(1; \frac{4}{3}\right)$ e ha la concavità rivolta verso l'alto solo per $x < 1$. Nella figura 5 è rappresentato il grafico di f.



▲ **Figura 4.**



▲ **Figura 5.**

Studiamo ora la funzione $g(x) = \frac{x^3 - 6x^2 + 12x}{3} = \frac{x(x^2 - 6x + 12)}{3}$. Il suo campo di esistenza è l'asse reale; è positiva per $x > 0$, negativa se $x < 0$ e interseca gli assi solo nell'origine. Inoltre risulta:

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3\left(1 - \frac{6}{x} + \frac{12}{x^2}\right)}{3} = \pm\infty.$$

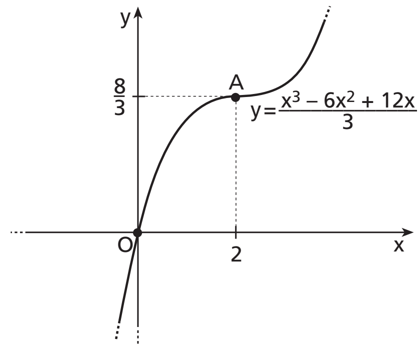
Verifichiamo se la funzione ammette asintoti obliqui:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2\left(1 - \frac{6}{x} + \frac{12}{x^2}\right)}{3} = +\infty.$$

Ne segue che non vi sono asintoti obliqui. Studiamo ora la derivata prima:

$$g'(x) = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2.$$

Essa si annulla solo per $x=2$; diversamente è sempre positiva. La funzione g è quindi crescente. Inoltre $g''(x)=2x-4$, che è positiva per $x>2$, negativa per $x<2$ e nulla per $x=2$. In conclusione il punto $A\left(2; \dfrac{8}{3}\right)$ corrisponde a un flesso con tangente orizzontale e la funzione ha la concavità rivolta verso l'alto solo per $x>2$. Il grafico della funzione g è riportato in figura 6.



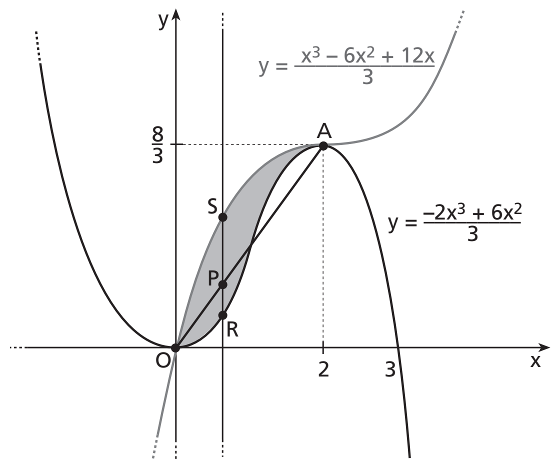
▲ **Figura 6.**

b) Come già emerso dallo studio delle due funzioni, entrambi i grafici hanno in comune, oltre all'origine, anche il punto $A\left(2; \dfrac{8}{3}\right)$. Verifichiamo algebricamente che non vi sono altri punti in comune, risolvendo il seguente sistema:

$$\begin{cases} y=\dfrac{-2x^3+6x^2}{3} \\ y=\dfrac{x^3-6x^2+12x}{3} \end{cases} \rightarrow \; -2x^3+6x^2=x^3-6x^2+12x \;\rightarrow\; x(x-2)^2=0 \;\rightarrow\; x=0 \vee x=2.$$

Dunque O e A sono gli unici punti di intersezione tra le due curve (figura 7).
Tracciato il segmento OA, si prende un punto P su tale segmento e si tracci la parallela all'asse y passante per il punto.

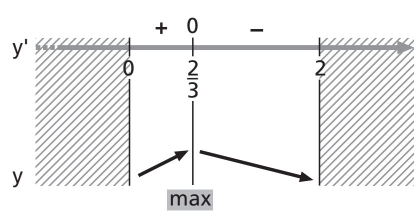
La retta OA ha equazione $y=\dfrac{4}{3}x$. Quindi $P\left(x; \dfrac{4}{3}x\right)$ per un valore $x \in [0; 2]$. Per lo stesso valore di x, si ha $R\left(x; \dfrac{-2x^3+6x^2}{3}\right)$ ed $S\left(x; \dfrac{x^3-6x^2+12x}{3}\right)$. Ne segue che la lunghezza del segmento RS vale: $\overline{RS}=\left|\dfrac{x^3-6x^2+12x}{3}-\dfrac{-2x^3+6x^2}{3}\right|=$
$=\left|x(x-2)^2\right|=x(x-2)^2$, essendo $x \in [0; 2]$.



▲ **Figura 7.**

Cerchiamo il massimo della funzione $y=x(x-2)^2$ nell'intervallo $[0; 2]$. La derivata prima è $y'=3x^2-8x+4$ e lo schema seguente ne riassume il segno (figura 8).

La funzione ha un massimo per $x=\dfrac{2}{3}$. Quindi il punto P cercato ha coordinate $P\left(\dfrac{2}{3}; \dfrac{8}{9}\right)$.



▲ **Figura 8.**

c) Consideriamo due punti generici appartenenti rispettivamente ai grafici delle funzioni f e g con uguale ascissa $a \in \mathbb{R}$. Il coefficiente angolare della retta tangente al grafico di f in a è $f'(a) = -2a^2 + 4a$. Mentre il coefficiente angolare della retta tangente al grafico di g in a è $g'(a) = a^2 - 4a + 4$. Tali tangenti sono parallele se i loro coefficienti angolari sono uguali:

$$-2a^2 + 4a = a^2 - 4a + 4 \to 3a^2 - 8a + 4 = 0 \to a = 2 \vee a = \frac{2}{3}.$$

Per $a = 2$ si ottiene il punto A intersezione dei due grafici e per $a = \frac{2}{3}$ si ritrovano i punti R ed S.

d) La regione delimitata dalle due curve è evidenziata in figura 7. La sua area vale:

$$\text{Area} = \int_0^2 (g(x) - f(x))dx = \int_0^2 \left(\frac{x^3 - 6x^2 + 12x}{3} - \frac{-2x^3 + 6x^2}{3} \right) dx = \int_0^2 (x^3 - 4x^2 + 4x)dx =$$

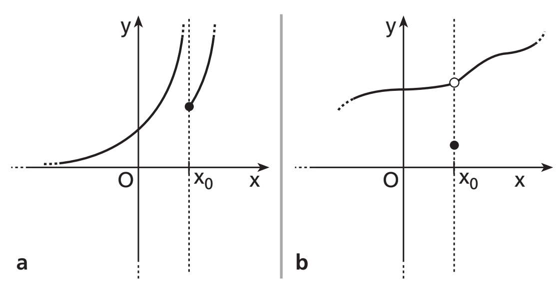
$$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{4}{3}x^3 + 2x^2 \right]_0^2 = \frac{4}{3}.$$

QUESTIONARIO

1 Una funzione f, definita in un dominio D, è continua in $x_0 \in D$ quando, comunque si scelga un numero reale positivo ε, si può determinare un intorno I di x_0 tale che risulti $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ per ogni $x \in I \cap D$.
In particolare, se x_0 è un punto isolato del dominio allora f è continua in x_0.
Se x_0 è un punto di accumulazione, tale definizione è equivalente a richiedere l'esistenza di $\lim_{x \to x_0} f(x)$ e che tale limite sia uguale al valore $f(x_0)$.
Interpretando geometricamente tale definizione possiamo dire che una funzione è continua in ogni punto di un intervallo se, nel disegnare il suo grafico, non stacchiamo mai la penna dal foglio.
Una funzione f si dice invece discontinua in x_0 se non è continua in tale punto.
I casi di discontinuità di una funzione in un punto interno del dominio possono essere di diverso tipo:

a) uno dei due limiti (destro o sinistro) è infinito e l'altro (sinistro o destro) è finito e coincide con $f(x_0)$; per esempio, $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$ (figura 9*a*); questo tipo di discontinuità si dice di seconda specie;

b) il limite destro e il limite sinistro sono finiti e uguali ma non coincidono con $f(x_0)$, ovvero $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = l \neq f(x_0)$ (figura 9*b*); questo tipo di discontinuità si dice di terza specie.



▶ **Figura 9.**

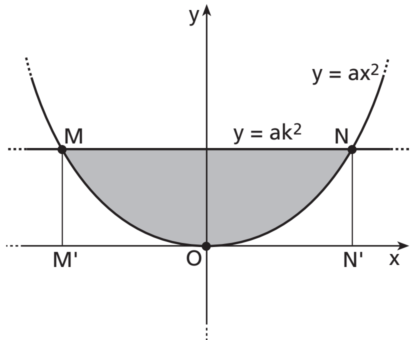
2 Consideriamo il sistema di riferimento con origine nel vertice della parabola, asse y coincidente con l'asse di simmetria della parabola e asse x tangente nel vertice, come mostrato in figura 10.
La parabola p ha equazione $y = ax^2$, con a numero reale positivo mentre le coordinate dei punti M ed N sono $M(-k;\ ak^2)$ ed $N(k;\ ak^2)$, con $k \geq 0$.
L'area della regione delimitata dalla parabola p e dalla retta MN è:

$$A = \int_{-k}^{k} (ak^2 - ax^2)dx = \left[ak^2 x - \frac{a}{3}x^3\right]_{-k}^{k} =$$

$$= ak^3 - \frac{a}{3}k^3 + ak^3 - \frac{a}{3}k^3 = \frac{4}{3}ak^3.$$

Mentre l'area del rettangolo $MNN'M'$ è $A_{MNN'M'} = 2k \cdot ak^2 = 2ak^3$.
Pertanto vale:

$$\frac{A}{A_{MNN'M'}} = \frac{\frac{4}{3}ak^3}{2ak^3} = \frac{2}{3}.$$



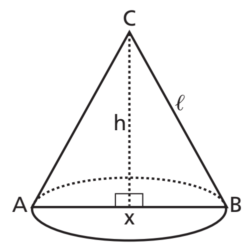
▲ **Figura 10.**

3 Sia ABC il triangolo isoscele la cui rotazione intorno all'altezza riferita alla base genera un cono circolare retto (figura 11).
Sia k il valore costante del suo perimetro e x la lunghezza della base. Ne segue che il lato obliquo misura $\frac{k-x}{2}$. L'altezza del cono è perciò:

$$h = \sqrt{l^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{k-x}{2}\right)^2 - \frac{x^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{k^2 - 2kx}.$$

Il volume del cono vale:

$$V = \frac{1}{3}A_{base} \cdot h = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{k^2 - 2kx} = \frac{\pi}{24}x^2\sqrt{k^2 - 2kx}.$$



▲ **Figura 11.**

Per massimizzare il volume calcoliamo la derivata prima della funzione $y = x^2\sqrt{k^2 - 2kx}$ nel dominio $\left[0;\ \frac{k}{2}\right]$ (la base del triangolo non può superare il semiperimetro):

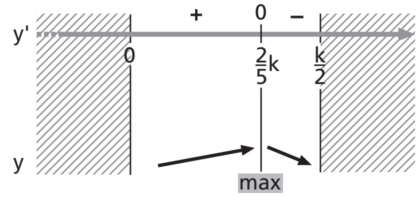
$$y' = 2x\sqrt{k^2 - 2kx} + x^2 \cdot \frac{-2k}{2\sqrt{k^2 - 2kx}} = \frac{2x(k^2 - 2kx) - kx^2}{\sqrt{k^2 - 2kx}} = \frac{2k^2 x - 5kx^2}{\sqrt{k^2 - 2kx}}.$$

Tale derivata è nulla per $x = 0$ e $x = \frac{2}{5}k$ e lo schema seguente (figura 12) ne riassume il segno.
Il valore massimo del volume del cono si ottiene per $x = \frac{2}{5}k$. In questo caso il lato obliquo del triangolo risulta:

$$l = \frac{k - \frac{2}{5}k}{2} = \frac{3}{10}k.$$

Pertanto il rapporto fra il lato del triangolo e la sua base vale:

$$\frac{l}{x} = \frac{\frac{3}{10}k}{\frac{2}{5}k} = \frac{3}{4}.$$

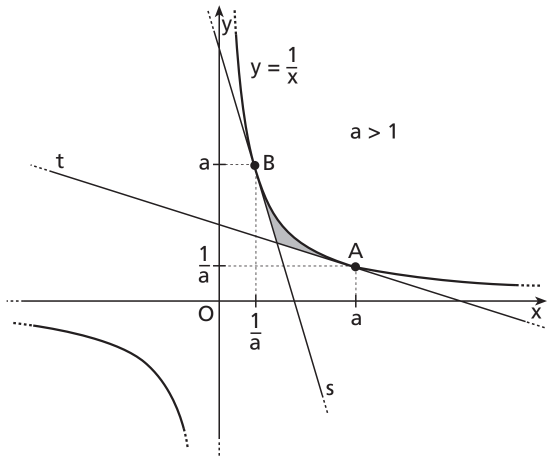


▲ **Figura 12.**

4 Nella figura 13 sono rappresentate l'iperbole $y=\frac{1}{x}$, le tangenti a essa nei punti $A\left(a;\ \frac{1}{a}\right)$ e $B\left(\frac{1}{a};\ a\right)$ $(a \neq 0)$ e la regione piana da esse limitata nel caso particolare di $a>1$.

Osserviamo che se $a=\pm 1$, allora $A \equiv B$ e l'area in questione risulta nulla.

Ci limiteremo al caso di $a>0 \wedge a \neq 1$ in quanto per $a<0 \wedge a \neq -1$ la regione piana delimitata che si ottiene è simmetrica e congruente al caso di a positivo. Il coefficiente angolare della tangente all'iperbole di equazione $y=\frac{1}{x}$ nel punto A è $y'(a)=-\frac{1}{a^2}$, mentre il coefficiente angolare della tangente in B è $y'\left(\frac{1}{a}\right)=-a^2$. La tangente t in A ha dunque equazione:



▲ **Figura 13.**

$$t: y-\frac{1}{a}=-\frac{1}{a^2}(x-a) \quad \rightarrow \quad t: y=-\frac{1}{a^2}x+\frac{2}{a},$$

mentre la tangente s in B è invece:

$$s: y-a=-a^2\left(x-\frac{1}{a}\right) \quad \rightarrow \quad s: y=-a^2x+2a.$$

Calcoliamo l'ascissa del punto di intersezione tra t ed s considerando il sistema seguente:

$$\begin{cases} y=-\dfrac{1}{a^2}x+\dfrac{2}{a} \\ y=-a^2x+2a \end{cases} \rightarrow \quad -\frac{1}{a^2}x+\frac{2}{a}=-a^2x+2a \quad \rightarrow \quad x(a^4-1)=2a(a^2-1) \quad \rightarrow \quad x=\frac{2a}{a^2+1}.$$

Pertanto l'area cercata vale:

$$\text{Area}=\left|\int_{\frac{1}{a}}^{\frac{2a}{a^2+1}}\left[\frac{1}{x}-(-a^2x+2a)\right]dx+\int_{\frac{2a}{a^2+1}}^{a}\left[\frac{1}{x}-\left(-\frac{1}{a^2}x+\frac{2}{a}\right)\right]dx\right|=$$

$$=\left|\left[\log|x|+\frac{a^2}{2}x^2-2ax\right]_{\frac{1}{a}}^{\frac{2a}{a^2+1}}+\left[\log|x|+\frac{x^2}{2a^2}-\frac{2}{a}x\right]_{\frac{2a}{a^2+1}}^{a}\right|=\left|\log a^2+\frac{2-2a^2}{a^2+1}\right|.$$

5 Per definizione la derivata della funzione $f(x)=\log_a x$ è:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\log_a(x+h)-\log_a(x)}{h}.$$

Utilizzando la proprietà dei logaritmi, $\log_a x-\log_a y=\log_a\frac{x}{y}$, possiamo scrivere:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\log_a\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h}.$$

Moltiplichiamo e dividiamo il denominatore h per x:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\log_a\left(1+\dfrac{h}{x}\right)}{\dfrac{h}{x}}\cdot\frac{1}{x}.$$

Ricordando il limite notevole $\lim_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e$, risulta $\lim_{h\to 0}\dfrac{\log_a\left(1+\dfrac{h}{x}\right)}{\dfrac{h}{x}}=\log_a e$ e quindi:

$$f'(x)=\frac{1}{x}\log_a x.$$

6 Il discriminante dell'equazione $x^2+k\,x+k=0$ è $\Delta=k^2-4k$. Esso è positivo o nullo se $k\leq 0 \vee k\geq 4$. In questo caso le radici dell'equazione sono $x_{1,2}=\dfrac{-k\pm\sqrt{k^2-4k}}{2}$.

Calcoliamo i limiti di tali radici per $k\to+\infty$, supponendo per questo $k>0$:

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{-k+\sqrt{k^2-4k}}{2}=\lim_{k\to+\infty}\left(\frac{-k+\sqrt{k^2-4k}}{2}\cdot\frac{-k-\sqrt{k^2-4k}}{-k-\sqrt{k^2-4k}}\right)=\lim_{k\to+\infty}\frac{k^2-(k^2-4k)}{-2(k+\sqrt{k^2-4k})}=$$

$$=\lim_{k\to+\infty}\frac{4k}{-2k\left(1+\sqrt{1-\dfrac{4}{k}}\right)}=\lim_{k\to+\infty}\frac{-2}{1+\sqrt{1-\dfrac{4}{k}}}=-1.$$

Inoltre vale:

$$=\lim_{k\to+\infty}\frac{-k-\sqrt{k^2-4k}}{2}=\lim_{k\to+\infty}\frac{-k}{2}\left(1+\sqrt{1-\frac{4}{k}}\right)=-\infty.$$

7 Si dice che l è limite sinistro della funzione $y=f(x)$ per x che tende ad a, e si scrive $\lim_{x\to a^-}f(x)=l$, se per ogni $\varepsilon>0$ esiste un numero $\delta>0$ tale che $|f(x)-l|<\varepsilon$ per ogni $x\in\,]a-\delta;\,a[$.

Dimostriamo che $\lim_{x\to 0^-}\left(x+\dfrac{x}{|x|}\right)=-1$, verificando per quali valori di x vale $\left|x+\dfrac{x}{|x|}+1\right|<\varepsilon$, ovvero:

$$\begin{cases} x+\dfrac{x}{|x|}+1<\varepsilon \\ x+\dfrac{x}{|x|}+1>-\varepsilon \end{cases}$$

Tale sistema è equivalente all'unione dei seguenti sistemi:

$$\begin{cases} x\geq 0 \\ x+2<\varepsilon \\ x+2>-\varepsilon \end{cases} \vee \begin{cases} x<0 \\ x<\varepsilon \\ x>-\varepsilon \end{cases} \quad\to\quad \begin{cases} x\geq 0 \\ x<\varepsilon-2 \\ x>-\varepsilon-2 \end{cases} \vee\ -\varepsilon<x<0.$$

Assumendo ε piccolo a piacere, si può considerare $\varepsilon<2$: il primo sistema non ha pertanto soluzioni. Risulta allora $-\varepsilon<x<0$.
Perciò vale la condizione di definizione di limite sinistro scegliendo $\delta=\varepsilon$, per cui preso un qualsiasi $\varepsilon>0$ vale $|f(x)-(-1)|<\varepsilon$ per ogni $x\in\,]-\varepsilon;\,0[$.
Si dice invece che l è limite destro della funzione $y=f(x)$ per x che tende ad a, e si scrive $\lim_{x\to a^+}f(x)=l$, se per ogni $\varepsilon>0$ esiste un numero $\delta>0$ tale che $|f(x)-l|<\varepsilon$ per ogni $x\in\,]a;\,a+\delta[$.

Dimostriamo che $\lim_{x\to 0^+}\left(x+\frac{x}{|x|}\right)=1$, verificando per quali valori di x risulta $\left|x+\frac{x}{|x|}-1\right|<\varepsilon$, cioè:

$$\begin{cases} x+\frac{x}{|x|}-1<\varepsilon \\ x+\frac{x}{|x|}-1>-\varepsilon \end{cases}$$

Tale sistema è equivalente all'unione dei seguenti sistemi:

$$\begin{cases} x\geq 0 \\ x<\varepsilon \\ x>-\varepsilon \end{cases} \vee \begin{cases} x<0 \\ x-2<\varepsilon \\ x-2>-\varepsilon \end{cases} \to 0\leq x<\varepsilon \vee \begin{cases} x<0 \\ x<\varepsilon+2 \\ x>-\varepsilon+2 \end{cases}$$

Assumendo ε piccolo a piacere, si può considerare $\varepsilon<2$: il secondo sistema non ha pertanto soluzioni. Risulta allora $0\leq x<\varepsilon$.
Le soluzioni del primo sistema sono i valori di $x\in\,]0;\,\varepsilon[$. Perciò vale la condizione di definizione di limite destro scegliendo $\delta=\varepsilon$, per cui preso un qualsiasi $\varepsilon>0$ vale $|f(x)-1|<\varepsilon$ per ogni $x\in\,]0;\,\varepsilon[$.

8 L'equazione $y=x^2+kx+k$ si può scrivere nella forma $k(x+1)+x^2-y=0$. Essa è sempre verificata per ogni k reale se vale:

$$\begin{cases} x+1=0 \\ x^2-y=0 \end{cases} \to \begin{cases} x=-1 \\ 1-y=0 \end{cases} \to \begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases}$$

Le curve passano quindi tutte per il punto di coordinate $(-1;\,1)$.

9 Poiché l'estrazione del Lotto avviene senza reimbussolamento l'ordine dei numeri nelle cinquine estratte non conta e quindi possiamo utilizzare le combinazioni. Se fissiamo un terno, le cinquine che lo contengono sono tutte le possibili combinazioni dei rimanenti 87 numeri presi due alla volta e quindi $C_{87,2}=3741$.

10 Le combinazioni semplici di n elementi a k alla volta sono tutti i possibili sottoinsiemi di k elementi distinti che si possono formare a partire dagli n elementi di partenza. Questi gruppi quindi si distinguono solo per gli elementi e non per il loro ordine.
Le disposizioni di n elementi a k alla volta sono invece tutti i possibili gruppi di k elementi distinti che si possono formare a partire dagli n elementi di partenza; questi gruppi si distinguono sia per gli elementi che per l'ordine.
Per ottenere le disposizioni a partire dalle combinazioni dobbiamo considerare che per ogni sottoinsieme delle combinazioni esistono $k!$ gruppi che si ottengono permutando gli elementi dello stesso sottoinsieme.

Pertanto vale $D_{n,k}=C_{n,k}\cdot k!$ da cui $C_{n,k}=\frac{D_{n,k}}{k!}$.

Per esercitarti ancora sugli argomenti trattati nel	Svolgi il
Problema 1	• Problema 9 pag. L 429 • Problema 16 pag. L 430 • Esercizio 219 pag. W 118
Problema 2	• Esercizio 170 pag. V 265 • Problema 2 pag. W 168 • Problema 13 pag. W 138 • Quesito 8 pag. W 177
Quesito 1	• Quesito 2 pag. U 207
Quesito 2	• Esercizio 220 pag. W 118
Quesito 3	• Quesito 3 pag. W 175 • Esercizio 332 pag. V 212
Quesito 4	• Esercizio 223 pag. W 118 • Esercizio 235 pag. W 120 • Esercizio 255 pag. W 122
Quesito 5	• Esercizio 46 pag. V 45
Quesito 6	• Esercizio 132 pag. U 165 • Esercizio 189 pag. U 171
Quesito 7	• Quesito 87 pag. U 91 • Esercizio 72 pag. U 90
Quesito 8	• Problema 27 pag. U 209 (punto a) • Quesito 8 pag. W 169
Quesito 9	• Esercizio 183 pag. α 37 • Esercizio 185 pag. α 37
Quesito 10	• Quesito 1 pag. α 40 • Quesito 2 pag. α 40 • Quesito 6 pag. α 40