ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO • 2001
Sessione suppletiva

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1

Si consideri la funzione reale f_m di variabile reale x tale che:

$$f_m = \frac{x^2}{|x - 2m| + m},$$

dove m è un parametro reale non nullo.

a) Trovare gli insiemi di definizione, di continuità e di derivabilità della funzione.

b) Indicata con C_1 la curva rappresentativa della funzione $f_1(x)$ corrispondente ad $m = 1$, studiarla e disegnarla in un piano riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali, dopo aver determinato, in particolare, le equazioni dei suoi asintoti e il comportamento nel punto A di ascissa 2.

c) Calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dalla curva C_1 e dalla retta parallela all'asse delle ascisse condotta per il punto A.

PROBLEMA 2

Una piramide retta, di vertice V, ha per base il triangolo ABC, rettangolo in A, la cui area è $24a^2$, dove a è una lunghezza assegnata. Si sa inoltre che $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{3}{5}$ e che il piano della faccia VAB della piramide forma con il piano della base ABC un angolo φ tale che sen $\varphi = \frac{12}{13}$.

a) Calcolare l'altezza della piramide.

b) Controllato che essa è $\frac{24}{5}a$, calcolare la distanza del vertice C dal piano della faccia VAB.

c) Condotto, parallelamente alla base ABC, un piano α che sechi la piramide e considerato il prisma retto avente una base coincidente con il triangolo sezione e per altezza la distanza di α dalla base ABC, calcolare per quale valore di tale distanza il prisma ha volume massimo.

d) Il prisma di volume massimo ha anche la massima area totale?

QUESTIONARIO

1 Considerata una funzione reale di variabile reale $f(x)$, si prendano in esame le due seguenti proposizioni:

A: condizione necessaria e sufficiente affinché $f(x)$ sia definita in un punto a è che sia continua in a.
B: condizione necessaria e sufficiente affinché $f(x)$ sia continua in un punto a è che sia derivabile in a.

Una sola delle seguenti combinazioni è corretta: individuarla e fornire un'esauriente giustificazione della risposta.

A A vera - B vera   B A vera - B falsa   C A falsa - B vera   D A falsa - B falsa

2 Si consideri il cubo di spigoli AA', BB', CC', DD', in cui due facce opposte sono i quadrati $ABCD$ e $A'B'C'D'$. Indicato con E il punto medio dello spigolo AB, sia CF la retta perpendicolare a DE condotta per C. I piani $D'DE$ e $C'CF$ dividono il cubo in quattro parti. Calcolare a quale frazione del cubo equivale ciascuna di esse.

3 Calcolare se esiste un numero naturale n per il quale risulti:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 1\,048\,576.$$

4 Sia $f(x)$ una funzione reale di variabile reale, derivabile con derivata continua in tutto il campo reale, tale che: $f(0) = 1$ ed $f'(0) = 2$. Calcolare:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x f(t)\, dt - x}{\cos 2x - 1}.$$

5 Dimostrare che la derivata, rispetto a x, della funzione a^x, dove a è un numero reale positivo diverso da 1, è $a^x \ln a$.

6 Fra i rettangoli di dato perimetro determinare quello di area massima.

7 Una primitiva della funzione $f(x)$ è $x^2 + 2x$. Se è possibile calcolare $\int_0^1 f\left(\frac{x}{2}\right) dx$, determinare il valore dell'integrale. In caso contrario spiegare perché il calcolo non è possibile.

8 In un piano, riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sia T un trapezoide di base $[a; b]$ relativo alla funzione $f(x)$, continua in tale intervallo. Dimostrare la formula che esprime il volume del solido generato dal trapezoide quando ruota di un giro completo attorno all'asse x.

9 Calcolare la derivata della funzione sen $2x$ rispetto alla variabile x, ricorrendo alla definizione di derivata di una funzione.

10 Considerata una funzione reale di variabile reale $f(x)$, derivabile almeno due volte in un dato punto a, affinché la funzione $f(x)$ abbia in a un punto di flesso la condizione $f''(a) = 0$ è:

A necessaria e sufficiente.   B necessaria ma non sufficiente.   C sufficiente ma non necessaria.

Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

SOLUZIONE DELLA PROVA D'ESAME
CORSO DI ORDINAMENTO • 2001
Sessione suppletiva

PROBLEMA 1

a) Per determinare il campo di esistenza della funzione poniamo il denominatore diverso da 0:

$$|x-2m| + m \neq 0 \quad \rightarrow \quad |x-2m| \neq -m.$$

Tale condizione è sempre vera se $m > 0$.
Se $m < 0$ ($m \neq 0$ per ipotesi) risulta:

$$x - 2m \neq \pm m \quad \rightarrow \quad x \neq 3m \wedge x \neq m.$$

Pertanto il campo di esistenza D si può così scrivere:

$$D = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } m > 0 \\ \mathbb{R} - \{m, 3m\} & \text{se } m < 0 \end{cases}$$

Valutiamo la continuità della funzione. Per $m > 0$ essa è continua nel campo reale. Per $m < 0$ la funzione è continua in $\mathbb{R} - \{m, 3m\}$, mentre ammette discontinuità di seconda specie nei punti $x = m$ e $x = 3m$.
Stabiliamo l'insieme di derivabilità della funzione riscrivendola nel seguente modo:

$$f_m = \begin{cases} \dfrac{x^2}{x-m} & x \geq 2m \wedge x \neq m \\ \dfrac{x^2}{3m-x} & x < 2m \wedge x \neq 3m \end{cases}$$

Osserviamo che per ogni $x \neq 2m$ appartenente al campo di esistenza, la funzione è derivabile poiché funzione a tratti di funzioni derivabili.
Determiniamo il comportamento per $x = 2m$ utilizzando la definizione di derivata e calcolando il limite destro e sinistro del rapporto incrementale:

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f_m(2m+h) - f_m(2m)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h}\left[\frac{(2m+h)^2}{2m+h-m} - 4m\right] = \lim_{h \to 0^+} \frac{h}{m+h} = 0,$$

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f_m(2m+h) - f_m(2m)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{1}{h}\left[\frac{(2m+h)^2}{3m-2m-h} - 4m\right] = \lim_{h \to 0^-} \frac{h+8m}{m-h} = 8.$$

Essendo tali limiti diversi, si conclude che la funzione non è derivabile per $x = 2m$.
Pertanto l'insieme di derivabilità D' è:

$$D' = \begin{cases} \mathbb{R} - \{2m\} & \text{se } m > 0 \\ \mathbb{R} - \{m, 2m, 3m\} & \text{se } m < 0 \end{cases}$$

b) Per $m = 1$ si ha:

$$f_1(x) = \frac{x^2}{|x-2| + 1} = \begin{cases} \dfrac{x^2}{3-x} & \text{se } x < 2 \\ 4 & \text{se } x = 2 \\ \dfrac{x^2}{x-1} & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

Il campo di esistenza della funzione è $\mathbb{R}$. La corrispondente curva C_1 interseca gli assi solamente nell'origine. Inoltre $f_1(x) \geq 0$. Calcoliamo ora i limiti per x che tende a $\pm\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{|x-2|+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x-1} = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{|x-2|+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{3-x} = +\infty.$$

Cerchiamo gli eventuali asintoti obliqui:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f_1(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x-1} = 1,$$

$$\lim_{x\to+\infty} [f_1(x) - x] = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x-1} = 1,$$

quindi la retta $y = x + 1$ è asintoto per $x \to +\infty$;

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f_1(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{3-x} = -1,$$

$$\lim_{x\to-\infty} [f_1(x) + x] = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x^2}{3-x} + x\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{3x}{3-x} = -3,$$

quindi la retta $y = -x - 3$ è asintoto per $x \to -\infty$.
Per quanto riguarda la derivata prima, sappiamo dal punto a) che f_1 non è derivabile in $x = 2$, poiché la derivata destra vale 0 mentre quella sinistra vale 8. In particolare $x = 2$ è un punto angoloso e la curva C_1 in tale punto $A(2; 4)$ ha come tangente da sinistra la retta di coefficiente angolare 8, ovvero la retta $y = 8x - 12$, e come tangente da destra la retta di coefficiente angolare 0, cioè la retta $y = 4$.
Inoltre, per $x > 2$ risulta:

$$f_1'(x) = \frac{2x(x-1) - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2},$$

che è positiva per ogni $x > 2$, mentre per $x < 2$:

$$f_1'(x) = \frac{2x(3-x) + x^2}{(3-x)^2} = \frac{6x - x^2}{(3-x)^2} = \frac{x(6-x)}{(3-x)^2},$$

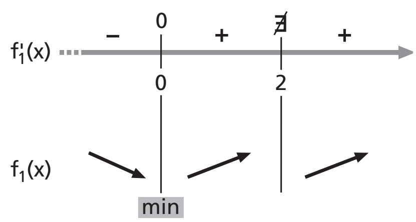


Figura 1.

che è positiva per $0 \leq x < 2$. Riassumiamo nello schema della figura 1 il segno complessivo della derivata. La funzione presenta un minimo per $x = 0$, con $f_1(0) = 0$.
Studiamo ora la derivata seconda. Per $x > 2$ vale:

$$f_1''(x) = \frac{(2x-2)(x-1)^2 - 2(x-1)(x^2 - 2x)}{(x-1)^4} = \frac{2}{(x-1)^3},$$

che è sempre positiva per $x > 2$, mentre per $x < 2$ risulta:

$$f_1''(x) = \frac{(6-2x)(3-x)^2 + 2(3-x)(6x - x^2)}{(3-x)^4} =$$

$$= \frac{18}{(3-x)^3},$$

che è sempre positiva per $x < 2$. Dunque la funzione ha sempre la concavità rivolta verso l'alto. Nella figura 2 è rappresentata la curva C_1.

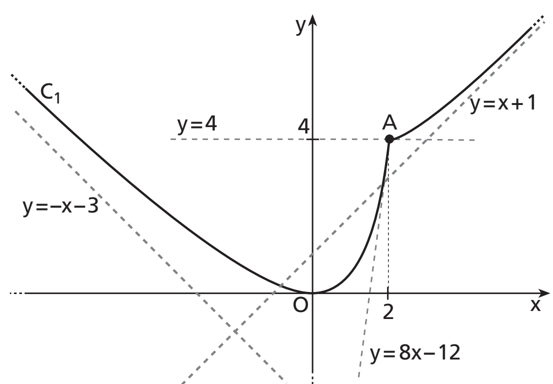


Figura 2.

c) Poiché la funzione è crescente per $x > 2$, cerchiamo i punti di intersezione tra la retta $y = 4$ e la curva C_1 per $x \leq 2$, risolvendo il seguente sistema:

$$\begin{cases} y = 2 \\ y = \dfrac{x^2}{3-x} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 4 \\ y = \dfrac{x^2}{3-x} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 4 \\ x^2 + 4x - 12 = 0 \end{cases} \rightarrow \quad x_1 = 2, \; x_2 = -6$$

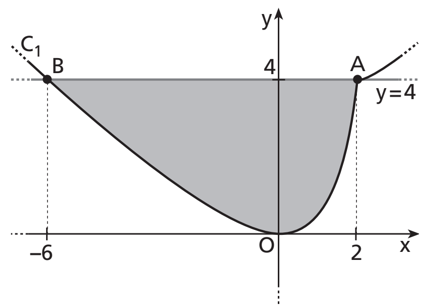
La curva interseca la retta $y = 4$ nei punti $A(2; 4)$ e $B(-6; 4)$.
L'area cercata (figura 3) vale:

$$A = \int_{-6}^{2} \left(4 - \frac{x^2}{3-x} \right) dx.$$

Operando la divisione tra polinomi, si ha che

$$\frac{x^2}{3-x} = -x - 3 + \frac{9}{3-x}.$$

Quindi risulta:



▲ **Figura 3.**

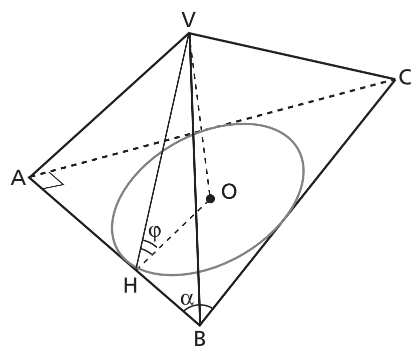
$$A = \int_{-6}^{2} \left(x + 7 - \frac{9}{3-x} \right) dx = \left[\frac{x^2}{2} + 7x + 9 \ln |3 - x| \right]_{-6}^{2} = 40 - 18 \ln 3.$$

PROBLEMA 2

a) Rappresentiamo la piramide retta e tracciamo la circonferenza inscritta nel triangolo di base, con raggio OH (figura 4).
Calcoliamo la lunghezza dei lati del triangolo ABC.

Posto $\overline{BC} = x$, dall'ipotesi segue che $\overline{AB} = \frac{3}{5}x$ e, per il teorema di Pitagora, $\overline{AC} = \frac{4}{5}x$. Quindi l'area del triangolo ABC vale $A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5}x \cdot \frac{4}{5}x = \frac{6}{25}x^2$. Deve dunque risultare:

$$\frac{6}{25}x^2 = 24a^2 \quad \rightarrow \quad x = 10a.$$



▲ **Figura 4.**

Ne segue $\overline{BC} = 10a$, $\overline{AB} = 6a$ e $\overline{AC} = 8a$.
Per determinare la misura dell'altezza VO utilizziamo la relazione trigonometrica $\overline{VO} = \overline{OH} \cdot \text{tg}\,\varphi$.
Ricaviamo $\overline{OH}$ ricordando la relazione che intercorre tra area, semiperimetro e raggio della circonferenza inscritta nel triangolo ABC: $A_{ABC} = p_{ABC} \cdot \overline{OH}$. Pertanto risulta:

$$\overline{OH} = \frac{A_{ABC}}{p_{ABC}} = \frac{2 \cdot 24a^2}{10a + 6a + 8a} = 2a.$$

Troviamo ora $\text{tg}\,\varphi$, con φ angolo acuto

$$\text{sen}\,\varphi = \frac{12}{13} \quad \rightarrow \quad \cos\varphi = \sqrt{1 - \frac{144}{169}} = \frac{5}{13} \quad \rightarrow \quad \text{tg}\,\varphi = \frac{12}{5}.$$

Sostituiamo alla relazione $\overline{VO} = \overline{OH} \cdot \text{tg}\,\varphi$:

$$\overline{OH} = \frac{24}{5}a.$$

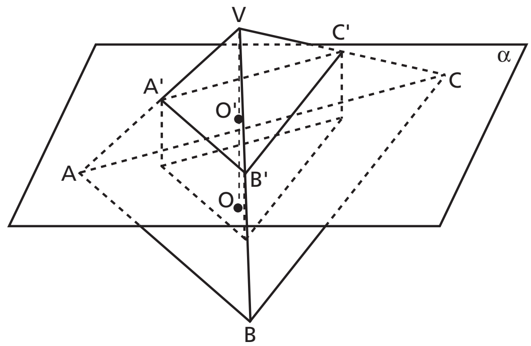
b) Indicata con h la distanza del vertice C dal piano della faccia VAB, essa è l'altezza della piramide se consideriamo come base il triangolo VAB.
Calcoliamo l'area di tale triangolo:

$$\overline{VH}=\frac{\overline{VO}}{\operatorname{sen}\varphi}=\frac{26}{5}a \quad \rightarrow \quad A_{VAB}=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{VH}}{2}=\frac{78}{5}a^2.$$

Il volume della piramide è $V=\frac{A_{ABC}\cdot\overline{VO}}{3}=\frac{192}{5}a^3$. Ma anche $V=\frac{A_{VAB}\cdot h}{3}=\frac{26}{5}a^2h$.
Quindi deve risultare:

$$\frac{26}{5}a^2h=\frac{192}{5}a^3 \quad \rightarrow \quad h=\frac{96}{13}a.$$

c) In figura 5 è rappresentato il piano secante la piramide retta di partenza.
Sia x la distanza OO' del piano α dalla base ABC, ossia l'altezza del prisma. Allora $0<x<\frac{24}{5}a$.
I triangoli ABC e $A'B'C'$ si corrispondono nell'omotetia di centro V e rapporto $k=\frac{\overline{VO'}}{\overline{VO}}$.
Poiché $\overline{VO'}=\overline{VO}-\overline{O'O}=\frac{24}{5}a-x=\frac{24a-5x}{5}$, si ha:



$$k=\frac{24a-5x}{5}\cdot\frac{5}{24a}=\frac{24a-5x}{24a}.$$

▲ **Figura 5.**

Poiché $\frac{A_{A'B'C'}}{A_{ABC}}=k^2$ ne segue che $A_{A'B'C'}=k^2A_{ABC}=\frac{(24a-5x)^2}{24}$.
Il volume del prisma risulta quindi:

$$V_{prisma}=A_{A'B'C'}\cdot\overline{OO'}=\frac{x}{24}(24a-5x)^2=\frac{1}{24}(25x^3-240ax^2+576a^2x).$$

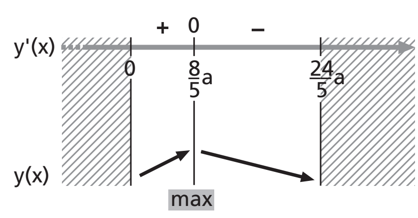
Il valore di x che rende massimo tale volume coincide con il massimo della funzione:

$$y(x)=25x^3-240ax^2+576a^2x, \text{ con } x\in\left]0;\frac{24}{5}a\right[.$$

Calcoliamo la derivata di tale funzione: $y'(x)=75x^2-480ax+576a^2$ e studiamone il segno:

$$y'(x)\geq 0 \quad \rightarrow \quad 25x^2-160ax+192a^2\geq 0 \quad \rightarrow \quad x\leq\frac{8}{5}a \vee x\geq\frac{24}{5}a.$$

▼ **Figura 6.**



Riassumiamo la situazione nello schema di figura 6.
Si conclude che il volume del prisma è massimo per $x=\frac{8}{5}a$.

d) Il perimetro della base del prisma è:

$$2p_{A'B'C'}=k\cdot 2p_{ABC}=\frac{24a-5x}{24a}\cdot 24a=24a-5x.$$

L'area totale del prisma è dunque:

$$A_{prisma}=2A_{A'B'C'}+2p_{A'B'C'}\cdot x=\frac{(24a-5x)^2}{12}+(24a-5x)x=\frac{(24a-5x)(7x+24a)}{12}=-\frac{35}{12}x^2+4ax+48a^2.$$

Osserviamo che tale area è espressa da una funzione il cui grafico è un arco di parabola con la concavità rivolta verso il basso. Tale funzione assume il suo valore massimo in corrispondenza dell'ascissa del vertice, cioè per $x = \dfrac{-4a}{2\left(-\dfrac{35}{12}\right)} = \dfrac{24}{35}a$.

In conclusione il prisma di volume massimo non ha anche la massima area totale.

QUESTIONARIO

1 L'affermazione A è falsa in quanto una funzione può essere definita in un punto senza essere necessariamente ivi continua. Ad esempio:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

è definita in $x = 0$ ma non è continua nello stesso punto.
Anche l'affermazione B è falsa in quanto una funzione può essere continua in un punto senza essere necessariamente derivabile. Ad esempio, la funzione $y = |x|$ è continua su tutto l'asse reale ma non è derivabile in $x = 0$.
La combinazione corretta è dunque D.

2 Si consideri la figura 7. Indicata con a la lunghezza dello spigolo del cubo, il suo volume è $V = a^3$.
I due piani $D'DE$ e $C'CF$ dividono il cubo in quattro prismi retti di altezza a e basi i poligoni DFG, CDF, $AEFG$ e $CBEF$. Indichiamo con V_1, V_2, V_3 e V_4 rispettivamente i volumi di tali prismi.
Osserviamo che i triangoli CDG e AED sono congruenti, in quanto sono entrambi rettangoli con $DC \cong AD$ e $C\hat{G}D \cong A\hat{E}D$ (poiché entrambi complementari ad $A\hat{D}E$). Dunque, sottraendo alle aree di tali triangoli quella del triangolo DFG, ne segue che $AEFG$ e CDF hanno uguale area.

Ora, poiché $\overline{DG} = \overline{AE} = \dfrac{a}{2}$, si ha, per il teorema di Pitagora, $\overline{CG} = \overline{DE} = \sqrt{a^2 + \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}a$.

Inoltre, per il primo teorema di Euclide, $\overline{DG}^2 = \overline{FG} \cdot \overline{CG}$, cioè $\dfrac{a^2}{4} = \overline{FG} \cdot \dfrac{\sqrt{5}}{2}a$.

Perciò $\overline{FG} = \dfrac{\sqrt{5}}{10}a$ e $\overline{DF} = \sqrt{DG^2 - FG^2} = \sqrt{\dfrac{a^2}{4} - \dfrac{a^2}{20}} = \sqrt{\dfrac{a^2}{5}} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}a$.

Quindi risulta:

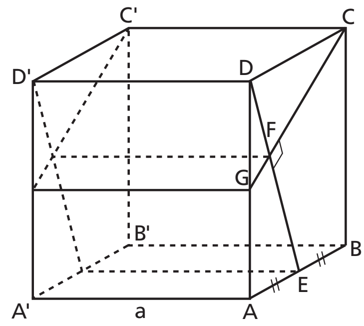
$$A_{DFG} = \frac{\overline{FG} \cdot \overline{DF}}{2} = \frac{\sqrt{5}}{10}a \cdot \frac{\sqrt{5}}{5}a \cdot \frac{1}{2} = \frac{a^2}{20},$$

$$A_{CDF} = A_{AEFG} = A_{AED} - A_{DFG} = \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{20} = \frac{a^2}{5}.$$

Ne segue $V_1 = A_{DFG} \cdot a = \dfrac{a^3}{20}$ e $V_2 = V_3 = A_{CDF} \cdot a = \dfrac{a^3}{5}$.

In conclusione vale:

$$\frac{V_1}{V} = \frac{1}{20}, \qquad \frac{V_2}{V} = \frac{V_3}{V} = \frac{1}{5}, \qquad \frac{V_4}{V} = 1 - \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{20}\right) = \frac{11}{20}.$$



▲ **Figura 7.**

3 Applicando la formula di Newton, $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$, con $a = b = 1$, si ottiene $2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$. L'equazione di partenza è dunque equivalente a $2^n = 1\,048\,576$ ovvero $n = \log_2 1\,048\,576$. Questa è verificata per $n = 20$.

4 Il limite $\lim_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x f(t)\,dt - x}{\cos 2x - 1}$ si presenta nella forma indeterminata $\dfrac{0}{0}$. Per calcolarlo utilizziamo il teorema di De L'Hospital tenendo conto che per il teorema fondamentale del calcolo integrale risulta $D\left[\int_0^x f(t)\,dt\right] = f(x)$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)\,dt - x}{\cos 2x - 1} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x) - 1}{-2\,\mathrm{sen}\,2x} =$$

applicando di nuovo il teorema di De L'Hospital:

$$= \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{-4\cos 2x} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}.$$

5 Utilizzando la definizione di derivata alla funzione $f(x) = a^x$, otteniamo:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{a^x(a^h - 1)}{h} = \lim_{h\to 0} a^x \cdot \lim_{h\to 0}\frac{a^h - 1}{h}.$$

Applichiamo il limite notevole $\lim_{h\to 0}\dfrac{a^h - 1}{h} = \ln a$:

$$f'(x) = a^x \ln a.$$

6 Sia p il semiperimetro del rettangolo e x una delle dimensioni. Ne segue che l'area del rettangolo è data dal prodotto $x(p - x) = -x^2 + px$.
Determiniamo il massimo della funzione $y = -x^2 + px$ nell'intervallo $]0; +\infty[$.
Il grafico di tale funzione è un arco di parabola con la concavità rivolta verso il basso e quindi la funzione assume il valore massimo in corrispondenza del vertice che, in questo caso, ha ascissa $x = \dfrac{p}{2}$. Ne segue che tra tutti i rettangoli di assegnato perimetro, quello di area massima è il quadrato.

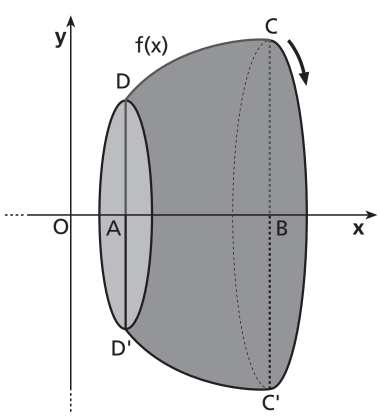
7 Consideriamo l'integrale $\int_0^1 f\left(\dfrac{x}{2}\right) dx$. Operando la sostituzione $t = \dfrac{x}{2}$, si ottiene:

$$\int_0^1 f\left(\frac{x}{2}\right) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} 2f(t)\,dt = 2[x^2 + 2x]_0^{\frac{1}{2}} = 2\left(\frac{1}{4} + 1\right) = \frac{5}{2}.$$

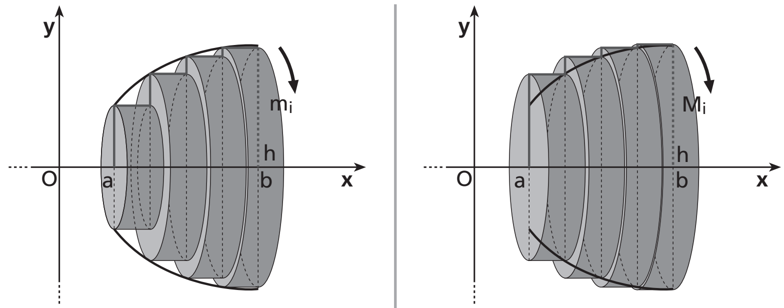
8 Sia T è il trapezoide $ABCD$ delimitato dalla curva di equazione $y = f(x)$, dall'asse x e dalle rette $x = a$ e $x = b$ (figura 8). Il volume V del solido generato dal trapezoide T in una rotazione completa attorno all'asse x è:

$$V = \pi\int_a^b f^2(x)\,dx.$$

Per dimostrarlo, dividiamo l'intervallo $[a; b]$ in n parti uguali. Ognuna di queste parti ha lunghezza $h = \dfrac{b - a}{n}$. Disegniamo il plurirettangolo inscritto e quello circoscritto al trapezoide, che approssimano la sua area per difetto e per eccesso, e indichiamo con m_i e M_i le altezze dei rettangoli corrispondenti al sottointervallo i. Nella rotazione completa intorno all'asse x essi descrivono dei cilindri circolari di altezza h (figura 9).



▲ **Figura 8.**



a. Ogni cilindro per difetto ha per base un cerchio di raggio m_i e per altezza h.

b. Ogni cilindro per eccesso ha per base un cerchio di raggio M_i e per altezza h.

◀ **Figura 9.**

Poiché la formula del volume del cilindro circolare di raggio r e altezza h è $\pi r^2 h$, il volume v_n dei cilindri approssimanti il solido per difetto e il volume V_n dei cilindri approssimanti per eccesso sono:

$$v_n = \pi m_1^2 h + \pi m_2^2 h + \ldots + \pi m_n^2 h = \pi (m_1^2 h + m_2^2 h + \ldots + m_n^2 h),$$

$$V_n = \pi M_1^2 h + \pi M_2^2 h + \ldots + \pi M_n^2 h = \pi (M_1^2 h + M_2^2 h + \ldots + M_n^2 h).$$

Si può dimostrare che quando $n \to +\infty$ le due successioni v_n e V_n tendono allo stesso limite e tale limite è uguale al prodotto tra π per l'integrale definito da a a b del quadrato di $f(x)$ ossia:

$$V = \lim_{n \to +\infty} v_n = \lim_{n \to +\infty} V_n = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx.$$

9 Sia $f(x) = \operatorname{sen} 2x$, allora $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}[2(x+h)] - \operatorname{sen} 2x}{h}$.

Applicando al numeratore la formula di prostaferesi $\operatorname{sen} p - \operatorname{sen} q = 2 \cos \dfrac{p+q}{2} \cdot \operatorname{sen} \dfrac{p-q}{2}$, si ottiene:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{2\cos(2x+h) \cdot \operatorname{sen} h}{h} = \lim_{h \to 0} 2\cos(2x+h) \frac{\operatorname{sen} h}{h} = 2\cos 2x,$$

essendo $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} h}{h} = 1$.

10 Un teorema di calcolo differenziale afferma che la condizione $f''(a) = 0$ è necessaria ma non sufficiente affinché nel punto $x = a$ vi sia un flesso. Infatti, ad esempio, la funzione $y = x^4$ è tale che $y'' = 12x^2$. Dunque essa ha la derivata seconda che si annulla per $x = 0$, ma, essendo altrove sempre positiva, ha la concavità rivolta verso l'alto e quindi non ammette flessi.

Per esercitarti ancora sugli argomenti trattati nel	Svolgi il
Problema 1	• Problema 26 pag. W 140 • Esercizio 557 pag. V 83 • Problema 11 pag. V 91
Problema 2	• Esercizio 164 pag. π 93 • Problema 331 pag. V 212 • Problema 279 pag. V 205
Quesito 1	• Quesito 2 pag. V 90 • Problema 13 pag. V 91 (punti a, b)
Quesito 2	• Esercizio 37 pag. π 73 • Esercizio 41 pag. π 74
Quesito 3	• Esercizio 111 pag. α 33 • Quesito 7 pag. W 169
Quesito 4	• Quesito 9 pag. W 137 • Quesito 2 pag. W 168 • Quesito 7 pag. W 173
Quesito 5	• Esercizio 36 pag. V 45 • Esercizio 42 pag. V 45
Quesito 6	• Problema 240 pag. V 198 • Problema 299 pag. V 210
Quesito 7	• Esercizio 32 pag. W 108 • Quesito 2 pag. W 136 • Quesito 10 pag. W 137
Quesito 8	• Esercizio 271 pag. W 124
Quesito 9	• Quesito 3 pag. W 168 • Quesito 1 pag. W 176
Quesito 10	• Esercizio 145 pag. V 185