



*Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca*  
**M557 – ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE**

**Indirizzi:** LI02 – SCIENTIFICO  
LI03 - SCIENTIFICO - OPZIONE SCIENZE APPLICATE

**Tema di:** MATEMATICA

*Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.*

**PROBLEMA 1**

Stai seguendo un corso, nell'ambito dell'orientamento universitario, per la preparazione agli studi di Medicina. Il docente introduce la lezione dicendo che un medico ben preparato deve disporre di conoscenze, anche matematiche, che permettano di costruire modelli ed interpretare i dati che definiscono lo stato di salute e la situazione clinica dei pazienti. Al tuo gruppo di lavoro viene assegnato il compito di preparare una lezione sul tema: "come varia nel tempo la concentrazione di un farmaco nel sangue?".

Se il farmaco viene somministrato per via endovenosa, si ipotizza per semplicità che la concentrazione del farmaco nel sangue raggiunga subito il valore massimo e che immediatamente inizi a diminuire, in modo proporzionale alla concentrazione stessa; nel caso che il docente ti ha chiesto di discutere, per ogni ora che passa la concentrazione diminuisce di  $1/7$  del valore che aveva nell'ora precedente.

1. Individua la funzione  $y(t)$  che presenta l'andamento richiesto, ipotizzando una concentrazione iniziale  $y(0) = 1 \frac{\mu g}{ml}$  (microgrammi a millilitro) e rappresentala graficamente in un piano cartesiano avente in ascisse il tempo  $t$  espresso in ore e in ordinate la concentrazione espressa in  $\frac{\mu g}{ml}$ .

Se invece la somministrazione avviene per via intramuscolare, il farmaco viene dapprima iniettato nel muscolo e progressivamente passa nel sangue. Si ipotizza pertanto che la sua concentrazione nel sangue aumenti per un certo tempo, raggiunga un massimo e poi inizi a diminuire con un andamento simile a quello riscontrato nel caso della somministrazione per via endovenosa.

2. Scegli tra le seguenti funzioni quella che ritieni più adatta per rappresentare l'andamento descritto per il caso della somministrazione per via intramuscolare, giustificando la tua scelta:

$$y(t) = 1 - \frac{(t-4)^2}{16}$$

$$y(t) = \text{sen}(3t) \cdot e^{-t}$$

$$y(t) = -t^3 + 3t^2 + t$$

$$y(t) = \frac{7}{2} \left( e^{-\frac{t}{7}} - e^{-\frac{t}{5}} \right)$$

3. Traccia il grafico della funzione scelta in un piano cartesiano avente in ascisse il tempo  $t$  espresso in ore e in ordinate la concentrazione  $y$  espressa in  $\frac{\mu g}{ml}$  e descrivi le sue caratteristiche principali, in rapporto al grafico della funzione relativa alla somministrazione per via endovenosa.



*Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca*  
**M557 – ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE**

**Indirizzi:** LI02 – SCIENTIFICO  
LI03 - SCIENTIFICO - OPZIONE SCIENZE APPLICATE

**Tema di:** MATEMATICA

Per evitare danni agli organi nei quali il farmaco si accumula è necessario tenere sotto controllo la concentrazione del farmaco nel sangue. Supponendo che in un organo il farmaco si accumuli con una velocità  $v$ , espressa in  $\frac{\mu g}{ml \cdot h}$  (microgrammi a millilitro all'ora), proporzionale alla sua concentrazione nel sangue:

$$v(t) = k \cdot y(t)$$

4. Determina la quantità totale di farmaco accumulata nell'organo nel caso della somministrazione endovenosa e di quella intramuscolare studiate in precedenza. In quale delle due l'accumulo sarà maggiore?

**PROBLEMA 2.**

Sia  $f$  la funzione definita da  $f(x) = (4x - 2) \cdot e^{2x}$ .

1. Dimostra che la funzione possiede un unico punto di minimo e un unico punto di flesso. Calcola le coordinate del minimo e del flesso e traccia il grafico  $G_f$  della funzione;
2. Dimostra che la funzione  $g(x) = (-4x - 2) \cdot e^{-2x}$  è simmetrica a  $f$  rispetto all'asse  $y$  e tracciarne il grafico  $G_g$ ;
3. Detti  $P$  e  $Q$  i punti di intersezione rispettivamente del grafico  $G_f$  e del grafico  $G_g$  con l'asse  $x$ , determina l'area  $A$  della porzione di piano delimitata dal segmento  $PQ$  e dai grafici  $G_f$  e  $G_g$ ;
4. Sia  $f_a$  la famiglia di funzioni definite da  $f_a(x) = (2ax - 2) \cdot e^{ax}$ , con  $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ . Per ogni funzione  $f_a$  la tangente al grafico nel punto di flesso interseca l'asse  $x$  e l'asse  $y$  delimitando un triangolo rettangolo. Determina i valori di  $a$  per i quali tale triangolo è anche isoscele, spiegando il procedimento seguito.



*Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca*  
**M557 – ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE**

**Indirizzi:** LI02 – SCIENTIFICO  
LI03 - SCIENTIFICO - OPZIONE SCIENZE APPLICATE

**Tema di:** MATEMATICA

**QUESTIONARIO**

1. Determinare il volume del solido generato dalla rotazione attorno alla retta di equazione  $y = 3$  della regione di piano delimitata dalla curva di equazione  $y = x^3 - 3x + 3$  e dalla retta stessa.
2. Verificare che la funzione:

$$f(x) = \frac{1}{3^{\frac{1}{x}} + 1}$$

ha una discontinuità di prima specie (“a salto”), mentre la funzione:

$$f(x) = \frac{x}{3^{\frac{1}{x}} + 1}$$

ha una discontinuità di terza specie (“eliminabile”).

3. Durante il picco massimo di un'epidemia di influenza il 15% della popolazione è a casa ammalato:
  - a) qual è la probabilità che in una classe di 20 alunni ce ne siano più di due assenti per l'influenza?
  - b) descrivere le operazioni da compiere per verificare che, se l'intera scuola ha 500 alunni, la probabilità che ce ne siano più di 50 influenzati è maggiore del 99%.
4. Nello spazio sono dati due piani  $\alpha$  e  $\beta$  rispettivamente di equazione:
  - a)  $x - 3y + z - 5 = 0$
  - b)  $x + 2y - z + 3 = 0$

Dopo aver determinato l'equazione parametrica della retta  $r$  da essi individuata verificare che essa appartiene al piano  $\gamma$  di equazione  $3x + y - z + 1 = 0$ .

5. Considerata la parabola di equazione  $y = 4 - x^2$ , nel primo quadrante ciascuna tangente alla parabola delimita con gli assi coordinati un triangolo. Determinare il punto di tangenza in modo che l'area di tale triangolo sia minima.
6. Determinare la funzione densità di probabilità di una variabile casuale continua che assume valori nell'intervallo  $[2, 5]$  con una distribuzione uniforme. Determinare inoltre il valore medio, la varianza, la deviazione standard di tale variabile e la probabilità che sia  $\frac{7}{3} \leq x \leq \frac{17}{4}$ .
7. Calcolare il valor medio della funzione

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & 1 \leq x \leq 3 \\ e^{x-3} + 1 & 3 < x \leq 6 \end{cases}$$



*Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca*  
**M557 – ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE**

**Indirizzi:** LI02 – SCIENTIFICO  
LI03 - SCIENTIFICO - OPZIONE SCIENZE APPLICATE

**Tema di:** MATEMATICA

nell'intervallo  $[1, 6]$  e determinare il valore della  $x$  in cui la funzione assume il valore medio.

8. Una sfera ha il raggio che aumenta al passare del tempo secondo una data funzione  $r(t)$ . Calcolare il raggio della sfera nell'istante in cui la velocità di crescita della superficie sferica e la velocità di crescita del raggio sono numericamente uguali.
9. In un riferimento cartesiano nello spazio  $Oxyz$ , data la retta  $r$  di equazioni:

$$\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = 1 + t \\ z = kt \end{cases}$$

e il piano  $P$  di equazione:

$$x + 2y - z + 2 = 0,$$

determinare per quale valore di  $k$  la retta  $r$  e il piano  $P$  sono paralleli, e la distanza tra di essi.

10. Scrivere l'equazione della circonferenza  $C$  che ha il centro sull'asse  $y$  ed è tangente al grafico  $G_f$  di  $f(x) = x^3 - 3x^2$  nel suo punto di flesso.

---

Durata massima della prova: 6 ore.

È consentito l'uso della calcolatrice non programmabile.

È consentito l'uso del dizionario bilingue (italiano-lingua del paese di provenienza) per i candidati di madrelingua non italiana.

Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.