3ALIC
COMPITI DELLE VACANZE ESTIVE
DI MATEMATICA

1. Funzioni e modello lineare

Studia il segno e gli zeri di ciascuna delle seguenti funzioni, dopo averne determinato il dominio, e cancella le regioni di piano alla quale non appartiene il suo grafico.

16 $y = \dfrac{x^2 - 25}{4 - x}$ $[D = \mathbb{R} - \{4\};\ y > 0 \text{ per } x < -5 \vee 4 < x < 5;\ y = 0 \text{ per } x = \pm 5;\ y < 0 \text{ per } -5 < x < 4 \vee x > 5]$

17 $y = \dfrac{x - 6}{4x - 2x^2}$ $[D = \mathbb{R} - \{0, 2\};\ y > 0 \text{ per } x < 0 \vee 2 < x < 6;\ y = 0 \text{ per } x = 6;\ y < 0 \text{ per } 0 < x < 2 \vee x > 6]$

18 $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$ $[D = \mathbb{R} - \{\pm 1\};\ y > 0 \text{ per } x < -1 \vee x > 1;\ y = 0 \text{ per } x = 0;\ y < 0 \text{ per } -1 < x < 1]$

19 $y = \dfrac{x^3 + x^2}{2x^2 + x - 3}$ $\left[D = \mathbb{R} - \left\{-\dfrac{3}{2}, 1\right\};\ y > 0 \text{ per } -\dfrac{3}{2} < x < -1 \vee x > 1;\ y = 0 \text{ per } x = -1 \vee x = 0;\ y < 0 \text{ per } x < -\dfrac{3}{2} \vee -1 < x < 0 \vee 0 < x < 1\right]$

23 $y = \sqrt{-x^2 + 7x - 6}$ $[D = [1, 6];\ y > 0 \text{ per } 1 < x < 6;\ y = 0 \text{ per } x = 1 \vee x = 6;\ y < 0 \text{ per nessun } x \in D]$

24 $y = \dfrac{\sqrt{x}}{5 - x}$ $[D = [0, 5) \cup (5, +\infty);\ y > 0 \text{ per } 0 \le x < 5;\ y = 0 \text{ per } x = 0;\ y < 0 \text{ per } x > 5]$

25 $y = \dfrac{\sqrt{x^2 - 1}}{x + 2}$ $[D = (-\infty, -2) \cup (-2, -1] \cup [1, +\infty);\ y > 0 \text{ per } -2 < x < -1 \vee x > 1;\ y = 0 \text{ per } x = \pm 1;\ y < 0 \text{ per } x < -2]$

346 Data la funzione:

$$f(x) = \frac{2x - 1}{x + 2}$$

determina $(f \circ f)(x)$ e stabilisci per quali valori di x risulta $(f \circ f)(x) \ge 0$. $\left[x < -\dfrac{3}{4} \vee x \ge \dfrac{4}{3}, \text{ con } x \ne -2\right]$

347 Date le funzioni:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 4x - 5} \quad \text{e} \quad g(x) = x^2 - 1$$

determina il dominio della funzione $f \circ g$. $[x \le -\sqrt{2} \vee x \ge \sqrt{2}]$

348 Data la funzione:

$$f(x) = \frac{2x}{x + 2}$$

determina $(f \circ f)(x)$ e stabilisci per quali valori di x risulta $(f \circ f)(x) \ge 0$. $[x < -1 \vee x \ge 0, \text{ con } x \ne -2]$

353 Date le funzioni $f(x) = \dfrac{x - 1}{x + 1}$ e $g(x) = x + k$, determina k in modo che il grafico della funzione $f \circ g$ intersechi l'asse y nel punto di coordinate $(0, 2)$. $[k = -3]$

354 Date le funzioni $f(x) = \dfrac{x - 1}{x + 1}$ e $g(x) = x + k$, determina k in modo che il grafico della funzione $g \circ f$ intersechi l'asse y nel punto di coordinate $(0, 2)$. $[k = 3]$

355 Giustifica perché la funzione $f(x) = 2x + 3$ è invertibile e determina l'espressione analitica dell'inversa. Verifica che $(f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = x$.

356 Giustifica perché la funzione $f(x) = x^3 + 1$ è invertibile e determina l'espressione analitica dell'inversa. Verifica che $(f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = x$.

2. Trasformazioni geometriche

Partendo dai grafici delle funzioni "elementari", applica opportune trasformazioni geometriche per disegnare i grafici delle seguenti funzioni:

253 $y = 4 - |x + 2|$

254 $y = x^2 - 4|x| + 4$

255 $y = |\sqrt{x+2} - 1|$

256 $y = -|x^2 - 4|$

257 $y = 1 - |x|^3$

258 $y = (|x| + 1)^2 - 4$

262 $y = |4 - x^2| - 1$

263 $y = 2 - \dfrac{6}{|x|}$

264 $y = \sqrt{|x|} + 1$

265 $y = |1 - x^3|$

266 $y = \left|3 - \dfrac{1}{2}|x|\right|$

267 $y = 1 - \sqrt[3]{|x| - 2}$

271 $y = 1 - \sqrt{|x| + 3}$

272 $y = ||x + 1| - 1|$

273 $y = \begin{cases} \dfrac{1}{|x|} & x \geq -1 \\ |x+3| & x < -1 \end{cases}$

274 $y = \dfrac{4}{|x+2|} - 1$

3. La parabola

146 Determina la retta tangente alla parabola di equazione $y = -x^2 + 3x$ parallela alla retta di equazione $y = -3x$. Determina poi le coordinate del punto di contatto. $[y = -3x + 9;\ (3, 0)]$

147 Determina la retta tangente alla parabola avente equazione $y = -\dfrac{1}{2}x^2 + x$ perpendicolare alla retta di equazione $y = -2x$. Determina poi le coordinate del punto di contatto. $\left[y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{8};\ \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{8}\right)\right]$

148 Determina le rette tangenti alla parabola di equazione $y = -x^2 - x$ passanti per il punto $P(0, 4)$. Determina poi le coordinate dei punti di contatto delle tangenti con la parabola. $[y = -5x + 4,\ y = 3x + 4;\ (2, -6);\ (-2, -2)]$

149 Determina le rette tangenti alla parabola di equazione $y = x^2 + x + 1$ passanti per il punto $P(-1, -3)$ e calcola la misura del segmento AB, essendo A e B i punti di contatto delle tangenti con la parabola.
[Tangenti: $y = 3x$, $y = -5x - 8$; punti di contatto: $(1, 3)$, $(-3, 7)$; $\overline{AB} = 4\sqrt{2}$]

150 Determina le rette tangenti alla parabola di equazione $y = -x^2 + 4x + 2$ passanti per il punto $P(3, 6)$ e calcola l'area del triangolo APB, essendo A e B i punti di contatto delle tangenti con la parabola.
[Tangenti: $y = 6$, $y = -4x + 18$; punti di contatto: $(2, 6)$, $(4, 2)$; Area = 2]

231 Scrivi l'equazione della parabola passante per i punti $A(0, 3)$ e $B(2, 2)$ e avente come asse di simmetria la retta di equazione $x = \dfrac{1}{2}$. $\left[y = -\dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{2}x + 3\right]$

232 Scrivi l'equazione della parabola passante per il punto $A(2, 1)$, tangente all'asse x e avente come asse di simmetria la retta di equazione $x = 1$. $[y = x^2 - 2x + 1]$

236 Scrivi l'equazione della parabola avente come direttrice la retta di equazione $y = -3$ e il fuoco in $F(0, -1)$. $\left[y = \dfrac{1}{4}x^2 - 2\right]$

237 Scrivi l'equazione della parabola avente per direttrice la retta di equazione $y = -\dfrac{5}{2}$ e il vertice in $V(2, -2)$. $\left[y = \dfrac{1}{2}x^2 - 2x\right]$

4. La circonferenza

107 Determina k in modo che la retta di equazione $y = kx$ sia tangente alla circonferenza avente equazione $x^2 + y^2 - 2x - 3y = 0$.
$\left[k = -\frac{2}{3}\right]$

108 Determina le equazioni delle rette parallele alla bisettrice del primo e del terzo quadrante, tangenti alla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$. $[y = x \pm 2]$

109 Determina le equazioni delle rette tangenti alla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 6y = 0$ e parallele alla retta AB, essendo $A(-2, 0)$ e $B(0, 1)$.
$[x - 2y + 6 \pm 3\sqrt{5} = 0]$

110 Determina le equazioni delle rette parallele alla bisettrice del primo e del terzo quadrante, tangenti alla circonferenza di centro $C(-1, 3)$ e raggio 2.
$[x - y + 4 \pm 2\sqrt{2} = 0]$

111 Considera la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$. Dopo aver verificato che il punto $P(2, 5)$ è esterno a tale circonferenza, conduci da P le tangenti alla circonferenza e determina:

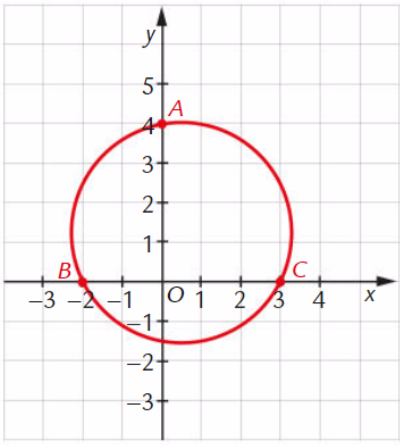
a. le coordinate dei punti di tangenza R e S delle tangenti con la circonferenza;

b. l'area del triangolo RPS.
$\left[2x - y + 1 = 0;\ 11x + 2y - 32 = 0;\ \mathbf{a.}(-1, -1), \left(\frac{16}{5}, -\frac{8}{5}\right);\ \mathbf{b.}\ \frac{27}{2}\right]$

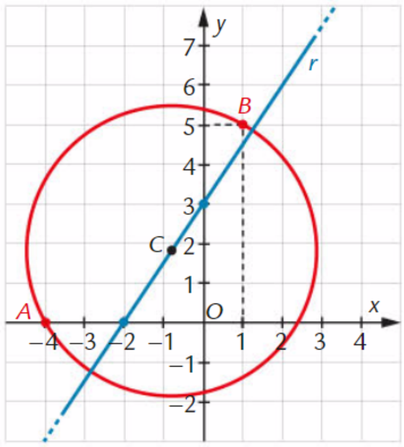
112 Data la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 8 = 0$, determina i vertici del triangolo individuato dalle rette tangenti alla circonferenza nei suoi punti d'intersezione con l'asse x e nel suo punto d'intersezione con il semiasse positivo delle ordinate. [Rette tangenti: $3x + y + 6 = 0$, $x - 3y + 12 = 0$, $3x - y - 12 = 0$; $(-3, 3)$, $(1, -9)$, $(6, 6)$]

113 Determina le coordinate dei punti A e B (con $x_A < x_B$) in cui la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 3 = 0$ interseca l'asse x e scrivi le equazioni delle rette tangenti alla circonferenza in questi punti. Indicato con C il punto d'intersezione di tali tangenti, determina l'area del triangolo ABC.
[$A(1, 0)$, $B(3, 0)$; $y = 1 - x$, $y = x - 3$; $C(2, -1)$; Area = 1]

Scrivi le equazioni delle circonferenza rappresentate in figura.



a.



b.

[**a.** $2x^2 + 2y^2 - 2x - 5y - 12 = 0$; **b.** $5x^2 + 5y^2 + 8x - 18y - 48 = 0$]

---

198 Scrivi l'equazione della circonferenza che ha centro in $C(2, 3)$ ed è tangente all'asse x.
$[x^2 + y^2 - 4x - 6y + 4 = 0]$

199 Scrivi l'equazione della circonferenza che ha come diametro il segmento AB di estremi $A(2, 3)$ e $B(4, 1)$.
$[x^2 + y^2 - 6x - 4y + 11 = 0]$

203 Scrivi l'equazione della circonferenza circoscritta al quadrato che ha due vertici in $O(0, 0)$ e $A(4, 0)$ e centro di simmetria nel punto $(2, 2)$. $[x^2 + y^2 - 4x - 4y = 0]$

204 Scrivi l'equazione della circonferenza concentrica alla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 6x - 1 = 0$ e tangente alla bisettrice del secondo e del quarto quadrante.
$[2x^2 + 2y^2 - 12x + 9 = 0]$

5. Ellisse e iperbole

122 Scrivi l'equazione dell'ellisse avente fuochi in $F_1(-2, 0)$ e $F_2 \equiv O(0, 0)$ e semiasse maggiore di misura 3. $\left[\frac{(x+1)^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1\right]$

123 Scrivi l'equazione dell'ellisse avente fuochi in $F_1(-2, 1)$ e $F_2(0, 1)$ ed eccentricità $\frac{1}{4}$. $\left[\frac{(x+1)^2}{16}+\frac{(y-1)^2}{15}=1\right]$

124 Scrivi l'equazione dell'ellisse avente centro in $C(1, 1)$, assi paralleli agli assi cartesiani e passante per i punti $A(4, 1)$ e $B(-1, 0)$. $\left[\frac{(x-1)^2}{9}+\frac{5(y-1)^2}{9}=1\right]$

125 Scrivi l'equazione dell'ellisse avente centro nel punto $C(2, 1)$, assi paralleli agli assi cartesiani e passante per i punti $A(4, 1)$ e $B(3, 2)$. $[(x-2)^2+3(y-1)^2=4]$

Interpretando graficamente le seguenti equazioni, stabilisci il numero delle loro soluzioni e cerca di dare una stima delle soluzioni stesse. Risolvi poi le equazioni algebricamente.

185 $2\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}=-\frac{2}{3}x+2$ $[0, 3]$

186 $\sqrt{16-4x^2}=-x-2$ $[-2]$

187 $\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}=x+3$ $\left[-\frac{12}{5}, -3\right]$

188 $\sqrt{1-\frac{x^2}{25}}=-\frac{x}{3}$ $\left[-\frac{15}{34}\sqrt{34}\right]$

189 $\sqrt{x-\frac{x^2}{4}}=-2x+3$ $\left[\frac{18}{17}\right]$

190 $2\sqrt{2|x|-x^2}=-x+2$ $\left[\frac{2}{5}, 2\right]$

Risolvi graficamente le seguenti disequazioni irrazionali.

191 $3\sqrt{1-x^2}<x+3$ $\left[-1\le x<-\frac{3}{5}\vee 0<x\le 1\right]$

192 $\sqrt{4-\frac{x^2}{4}}\ge 2x+4$ $\left[-4\le x\le\frac{4\sqrt{13}-32}{17}\right]$

193 $2\sqrt{4-x^2}>5\sqrt{1-x^2}$ $\left[-1\le x<-\frac{\sqrt{21}}{7}\vee\frac{\sqrt{21}}{7}<x\le 1\right]$

194 $2\sqrt{4x-3-x^2}\le 4-x$ $\left[1\le x\le 2\vee\frac{14}{5}\le x\le 3\right]$

195 $2\sqrt{1-x^2}>|x-2|$ $\left[0<x<\frac{4}{5}\right]$

Traccia il grafico delle seguenti iperboli, di cui è data l'equazione. Determina in particolare il centro, i vertici, i fuochi e gli asintoti di ciascuna iperbole.

176 $4x^2-2y^2+4y-5=0$ [Centro: $(0, 1)$; vertici: $\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right)$; fuochi: $\left(\pm\frac{3}{2}, 1\right)$; asintoti: $y=\pm\sqrt{2}x+1$]

177 $x^2-y^2+2y-5=0$ [Centro: $(0, 1)$; vertici: $(-2, 1)$, $(2, 1)$; fuochi: $(\pm 2\sqrt{2}, 1)$; asintoti: $y=\pm x+1$]

178 $x^2-y^2-4x+5=0$ [Centro: $(2, 0)$; vertici: $(2, 1)$, $(2, -1)$; fuochi: $(2, \pm\sqrt{2})$; asintoti: $y=x-2$, $y=-x+2$]

179 $4x^2-y^2-8y=0$ [Centro: $(0, -4)$; vertici: $(0, 0)$, $(0, -8)$; fuochi: $(0, -4\pm 2\sqrt{5})$; asintoti: $y=\pm 2x-4$]

6. Esponenziali e logaritmi

Dal libro di testo *(saltare quelli che sono già stati svolti durante l'anno)*:

- Pag. 619 esercizi n°363, 364, 367, 370, 371, 372, 373 e 374
- Pag. 621 esercizi n°32, 33, 34, 35, 36 e 37
- Pag. 655 esercizi dal n°197 al n°209