

# COMPITI DELLE VACANZE DI MATEMATICA

## Modulo n°3: Calcolo letterale

Esegui le seguenti operazioni utilizzando i prodotti notevoli.

<b>7</b>	$(x+3)(x-3)$	$(x^2-2)(x^2+2)$	$(2a-3b^2)(2a+3b^2)$
<b>8</b>	$(x^3y-4z^2)(x^3y+4z^2)$	$(2x-1)^2$	$(a+2b)^2$
<b>9</b>		$(x-y-2)^2$	$(2-x^2)(2+x^2)$
<b>10</b>		$(a+2b-1)^2$	$(x^6y^2+4z^4)(x^3y-2z^2)(x^3y+2z^2)$

Semplifica le seguenti espressioni, utilizzando, ovunque possibile, i prodotti notevoli.

<b>11</b>	$x^2(1-x) - (x^3+1)(x^2-1)$	$[1-x^5]$
<b>12</b>	$(2k+h)(k-2h) - 3h(k+3h) - 2k(k-3h)$	$[-11h^2]$
<b>13</b>	$\frac{1}{3}x(3x-1) - \left(\frac{1}{3}x-1\right)\left(3x-\frac{1}{3}\right)$	$\left[\frac{25}{9}x - \frac{1}{3}\right]$
<b>14</b>	$(0,2x^3-1)(5x^2-1) - x^2(x^3+x-5) + \frac{1}{5}x^3$	$[1-x^3]$
<b>15</b>	$(x+1)(x-1) - (x-2)^2 + (x+2)(x-3) + 11 - 4x$	$[x^2-x]$
<b>16</b>	$(a-2b)^2 - (2a-3b)(2a+3b) + (a+b)^2 + 2b(a-7b)$	$[-2a^2]$
<b>17</b>	$(x^2-2)^2 - 2(x^2-2)(x^2+2) + (x-1)(x+1)(x^2+1)$	$[11-4x^2]$
<b>18</b>	$2a(a-b)^2 - a(2a+b)^2 + 2a^2(a+4b)$	$[ab^2]$
<b>20</b>	$\left[\left(\frac{1}{2}x-1\right)^2 - \left(\frac{1}{2}x+1\right)^2\right]^2 - (4-x)(4+x)$	$[5x^2-16]$
<b>21</b>	$(a-2b-1)^2 - (a+2b+1)^2 + (-4a)(-2b)$	$[-4a]$
<b>22</b>	$(1-a)^2(1+a)^2(1+a^2)^2 - (1+a^4)^2$	$[-4a^4]$

Scomponi i seguenti polinomi, ricordando i prodotti notevoli.

<b>5</b>	$4x^2 - 36$	$a^2 - 25$	$36x^4 - 1$
<b>6</b>	$a^6 - 4$	$(x^2 + 1)^2 - 4x^2$	$(a + b)^2 - (b + c)^2$
<b>7</b>	$4a^6 - 12a^3 + 9$	$x^4 + 4x^2 + 4$	$x^2 - \frac{x}{2} + \frac{1}{16}$
<b>8</b>	$x^2 - \frac{4x}{3} + \frac{4}{9}$	$9x^2 + 4x + \frac{4}{9}$	$x^6 + 2(x^2 + 1)x^3 + (x^2 + 1)^2$
<b>9</b>	$x^3 - 8y^3$	$a^3 + 27$	$8a^3 + 27b^3$
<b>10</b>	$27 - (x - 2)^3$	$(a + 1)^3 + 1$	$x^3y^6 - \frac{1}{8}$

Scomponi i seguenti trinomi di secondo grado.

<b>11</b>	$x^2 + 9x - 10$	$x^2 + 2x - 15$	$x^2 - 4x + 3$	$x^2 + x - 6$
<b>12</b>	$x^2 + 3x - 4$	$x^2 - 11x + 10$	$x^2 - x - 6$	$x^2 + 10x + 9$

Esegui le seguenti scomposizioni.

<b>13</b>	$3a^5 - 48a$	$x^2 - 4xy + 4y^2 - 4z^2$	$[3a(a - 2)(a + 2)(a^2 + 4); (x - 2y - 2z)(x - 2y + 2z)]$
<b>14</b>	$7x^3 - 5x^2$	$25 - 81a^2$	
<b>15</b>	$x^3 + y^3 + x^2 - y^2$	$a^6 - 1$	$[(x + y)(x^2 + x - xy - y + y^2); (a - 1)(a + 1)(a^2 + a + 1)(a^2 - a + 1)]$
<b>16</b>	$t^3 + 3t^2 - 16t - 48$	$9x^2 - 30x + 25$	
<b>17</b>	$4x^3 - 16x^2 + 16x$	$x^3 + 2x^2 - x - 2$	$[4x(x - 2)^2; (x - 1)(x + 1)(x + 2)]$
<b>18</b>	$4k^3 - 4$	$x^2 + 8x + 16 - 9y^2$	
<b>19</b>	$a^2 - 8a + 15$	$3a^2 - 12b^2$	$[(a - 3)(a - 5); 3(a + 2b)(a - 2b)]$
<b>20</b>	$2b^4 - 8$	$4x^3 - 16x^2 + 16x$	
<b>21</b>	$y^2 - 6y + 5$	$x^4 - y^4 + x^2 - y^2$	$[(y - 1)(y - 5); (x - y)(x + y)(x^2 + y^2 + 1)]$

Calcola il M.C.D. e il m.c.m. dei seguenti gruppi di polinomi.

<b>22</b>	$a^3 - a^2b$	$(a^3b - ab^3)^2$	$a^5 - a^3b^2$
<b>23</b>	$x^4 - 2x^2y^2 + y^4$	$x^4 - y^4$	$x^3 + x^2y + xy^2 + y^3$
<b>24</b>	$x^3yz - xy^3z$	$x^3z^2 + x^2z^3 - x^2yz^2 - xyz^3$	$x^2y^2 - y^2z^2$

## Modulo n°4: Equazioni

Risolvi le seguenti equazioni.

- 8**  $(x-2)^2 = (x+2)(x-2) + 2(1-x)$  [3]
- 9**  $(2x-1)(2x+1) = (2x-1)^2$   $\left[\frac{1}{2}\right]$
- 10**  $\frac{x}{2} - \frac{x-3}{4} = -\frac{1}{12}$   $\left[-\frac{10}{3}\right]$
- 11**  $(x-1)^2 - (x-2)(x+2) = -2(x+3)$  [Impossibile]
- 12**  $(2x+1)^2 - (2x+1)^2 = (x+2)^2 - x^2$  [-1]
- 13**  $(x-1)(x+2) - (x-3)^2 = x+1$  [2]
- 14**  $\frac{(2x-2)^2}{4} - x^2 = \frac{x-1}{2}$   $\left[\frac{3}{5}\right]$
- 15**  $(3x-2)^2 - (2x+1)^2 - (3-x)(3+x) = 2(x-3)(3x+1)$  [Indeterminata]
- 16**  $\left(\frac{1}{2}x-3\right)^2 - \left(\frac{1}{2}x+2\right)^2 = \left(\frac{1}{2}x+2\right)\left(\frac{1}{2}x-2\right) - \frac{1}{4}x^2$   $\left[\frac{9}{5}\right]$
- 17**  $\frac{x-1}{2} - \frac{x}{3} = \frac{1}{2} - \frac{x-3}{4}$   $\left[\frac{21}{5}\right]$
- 18**  $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x - \frac{2-x}{12} = 2 - \frac{x}{4}$   $\left[\frac{13}{7}\right]$
- 19**  $\frac{x-1}{3} - \frac{x+1}{6} = \frac{1}{6}x - \frac{1}{2}$  [Indeterminata]
- 20**  $\frac{x(x-1)}{2} - \frac{1}{3} + (x-1)^2 = \frac{3}{2}(x+1)(x-3) + \frac{11}{3}$  [-3]
- 21**  $\frac{x-3}{2} - \frac{x-2}{3} = \frac{1}{6}x - 1$  [Impossibile]

- 27** Un paio di pantaloni, dopo uno sconto del 12%, viene venduto a 66 euro. Qual era il prezzo originario dei pantaloni? [75 euro]
- 28** Si vuole formare la somma di 10 euro utilizzando 18 monete, alcune da 1 euro e altre da 50 centesimi. Quante monete da 1 euro e quante da 50 centesimi sono necessarie? [2 monete da 1 euro e 16 da 50 centesimi]
- 29** Un padre, che ha 36 anni, ha un figlio di 14 anni. Fra quanti anni la sua età sarà il doppio di quella del figlio? [Fra 8 anni]
- 30** Determina due numeri naturali consecutivi in modo che la loro somma, diminuita di 18, uguagli il triplo della differenza fra il maggiore e il doppio del minore. [4 e 5]
- 31** Determina due numeri dispari consecutivi tali che la loro somma superi di 30 il numero naturale compreso fra di essi. [29 e 31]
- 32** Determina due numeri naturali consecutivi tali che la differenza fra il cubo del maggiore e il cubo del minore sia uguale al triplo del quadrato del maggiore dei due numeri. [Impossibile]
- 33** La differenza fra il quadrato del consecutivo di un numero intero e il quadrato del precedente dello stesso numero è uguale al quadruplo del numero stesso. Qual è il numero? [Indeterminato]
- 34** In un rettangolo la misura di un lato supera di 4 cm  $\frac{2}{3}$  dell'altro. Sapendo che il perimetro del rettangolo è 28 cm, determina la sua area. [48 cm<sup>2</sup>]
- 35** In un trapezio isoscele la base maggiore supera di 9 cm la metà della base minore, mentre i lati obliqui superano di 1 cm  $\frac{2}{3}$  della base minore. Sapendo che il perimetro del trapezio è 28 cm, determina le misure dei lati del trapezio. [12 cm, 6 cm, 5 cm, 5 cm]
- 36** In un rombo la diagonale maggiore supera di 3 cm la diagonale minore. La somma del doppio della diagonale maggiore e della metà della diagonale minore misura 18,5 cm. Calcola l'area del rombo. [20 cm<sup>2</sup>]

**Risolvi le seguenti equazioni frazionarie. Ricordati di porre le condizioni di esistenza!**

**6**  $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+2} = \frac{3x+4}{x^2+2x} - \frac{1}{x+1}$  [Impossibile]

**7**  $\frac{1}{x^2+2x-3} - \frac{1}{x^2-1} = \frac{2}{x^2+4x+3}$  [0]

**8**  $\frac{x}{x-3} + \frac{3-x}{x} = \frac{9}{x^2-3x}$  [Impossibile]

**9**  $\frac{2}{x^2+2x+1} + \frac{x}{x^2+3x+2} = \frac{1}{x+2}$  [-3]

**10**  $\frac{1}{x^2-4} - \frac{1}{x^2-2x} = \frac{2}{4x-x^3}$  [ $\forall x \in \mathbb{R} - \{0, \pm 2\}$ ]

Risolvi le seguenti equazioni di grado superiore al primo mediante scomposizione.

65.  $x^4 - 16 = 0.$

[2, -2]

66.  $4x^2 - 4x - 24 = 0.$

[-2, 3]

67.  $\frac{2}{3}x^3 - 4x^2 + 6x = 0.$

[0, 3]

68.  $x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x = 0.$

[0, -1]

69.  $x^2 + 10x + 21 = 0.$

[-3, -7]

70.  $x^6 + x^5 - 16x^2 - 16x = 0.$

[0, -1, -2, 2]

71.  $x^3 - 3x^2 - 6x - 8 = 0.$

[2, -1, -4]

72.  $x^4 - 7x^3 + 17x^2 - 17x + 6 = 0$

[1, 2, 3]

73.  $x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 27x - 18 = 0.$

[1, 3, 2, -3]

74.  $x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 38x - 24 = 0.$

[1, 2, 3, -4]

75.  $3x^5 + x^4 - 15x^3 - 5x^2 + 12x + 4 = 0.$

$\left[2, 1, -1, -2, -\frac{1}{3}\right]$

76.  $3y^3 - 2y^2 - 5y = 0;$

$5x^3 + 3x^2 - 5x - 3 = 0.$

$\left[-1, 0, \frac{5}{3}; -\frac{3}{5}, -1, 1\right]$

77.  $7y^3 - 2y^2 - 7y + 2 = 0;$

$5y^3 + y^2 - 20y + 4 = 0.$

$\left[-1, \frac{2}{7}, 1; -2, -\frac{1}{5}, 2\right]$

78.  $3x^3 - x^2 - 27x + 9 = 0;$

$8y^3 - 12y^2 - 18y + 27 = 0.$

$\left[-3, \frac{1}{3}, 3; -\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$

79.  $\frac{3x-2}{x-1} = \frac{2x}{x^2-1};$

$\frac{1}{2y+2} - \frac{3y}{2y-2} = \frac{3}{1-y^2}.$

$\left[-\frac{2}{3}; -\frac{5}{3}\right]$

80.  $\frac{2-x}{2x+6} - \frac{3}{x-3} = \frac{x^2+9}{9-x^2};$

$\frac{x+5}{x+2} - \frac{2x^2+20}{x^2-4} = \frac{2x+3}{2-x}.$

[-2; -12]