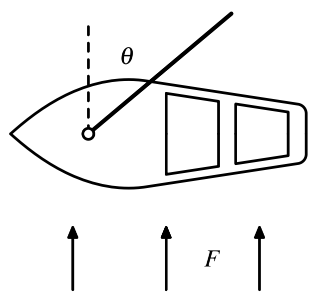
Anno accademico 1960–1961

Dissertazione: Teorema di Talete nel piano e dimostrazione di uno solo (a scelta) dei criteri di similitudine fra triangoli.

Esercizi:

1) In un cerchio dato, il cui raggio è misurato da r, determinare un triangolo che abbia un vertice nel centro del cerchio e gli altri due, A, B, sulla circonferenza, in modo che la somma della base AB e della relativa altezza sia uguale a un dato segmento misurato da a, supponendo $a < 2r$.
2) Dimostrare che nessun numero reale $x \neq 0$ soddisfa la disuguaglianza
$$\sqrt{\frac{x}{x-1}} + \sqrt{x} < 1.$$
I radicali vanno intesi in valore assoluto.
3) È più facile, gettando una volta un dado, ottenere 6, oppure, gettandolo 3 volte, ottenere tutte e tre le volte un numero pari? Perché?
4) Si consideri una barca provvista di una vela girevole attorno all'albero maestro. Supponiamo che:



(a) la direzione del vento sia perpendicolare alla direzione del moto della barca;
(b) la forza F esercitata dal vento sulla vela sia proporzionale al seno dell'angolo che la vela forma con la direzione del vento;
(c) la velocità della barca sia proporzionale a F e al seno dell'angolo che la vela forma con la direzione del moto della barca.

Dire per quale posizione della vela si ottiene la massima velocità della barca.

Anno accademico 1961–1962

Dissertazione: Area dei poligoni e area del cerchio.

Esercizi:

1) Determinare un punto P esterno a una circonferenza data di centro O e raggio r, tale che la differenza fra la distanza OP e la lunghezza di uno dei segmenti tangenti condotti da P alla circonferenza abbia valore assegnato K. Dire per quali valori di K il problema è risolubile.
2) Trovare quali sono i valori di x per i quali $\sqrt{x^2-1}$ è maggiore di x.
3) In quanti modi 5 uomini e 5 donne possono disporsi intorno a un tavolo rotondo in modo che uomini e donne si trovino in posti alternati? Due disposizioni debbono considerarsi uguali quando ciascuno ha a fianco le stesse persone.
4) Con una bilancia a piatti e un certo numero di pesi si vogliono pesare oggetti di peso inferiore a 500 grammi con un errore non superiore a un grammo. Non si possono mettere pesi nel piatto su cui si poggia l'oggetto. Dire qual è il minimo numero di pesi sufficiente a tale scopo.

Anno accademico 1962–1963

Dissertazione: Potenze in campo reale.

Esercizi:

1) Dimostrare che, presi due numeri reali a e b, si ha sempre:

$$a^4+b^4 \geq a^3 \cdot b\ .$$

Dire quando si ha l'uguaglianza.
2) È dato un circolo di raggio r. Determinare un triangolo isoscele che sia circoscritto al circolo e sia tale che la differenza tra uno dei lati uguali e la metà della base sia d. Si preferisce la soluzione puramente geometrica.
3) Scomporre l'espressione algebrica

$$\sqrt{x^3y}+\sqrt{xy^3}$$

in un prodotto di fattori più semplici. Applicare la formula trovata al caso numerico:

$$x=-1, \quad y=-2.$$

N.B. I radicali vanno presi *sempre* in valore assoluto.
4) Su un foglio di carta illimitato sono segnati due punti A e B. Si disponga di tre righe prive di suddivisioni, una lunga cm 8, l'altra lunga cm 11, la terza illimitata; dire con quale precisione si può misurare la distanza dei due punti A e B.
5) Si sostiene talvolta che noi usiamo il sistema decimale di numerazione (per cui, per esempio, 362 significa $3\cdot 10^2+6\cdot 10+2$) in quanto abbiamo dieci

dita.
Un marziano, dopo aver visto *scritta* l'equazione:

$$x^2 - 16x + 41 = 0,$$

invitato a scrivere la differenza delle radici, *scrive* 10.
Quante dita hanno i marziani?
N.B. Per i numeri compresi fra 0 e 6 la scrittura dei marziani coincide con la nostra.

Anno accademico 1963–1964

Dissertazione: Rette e piani perpendicolari.

Esercizi:

1) Impostare algebricamente, in modo completo, il seguente problema, trovando un sistema misto di equazioni e di disequazioni (almeno una delle une e una delle altre) che sia equivalente al problema stesso.
   Problema: costruire un triangolo rettangolo conoscendo la differenza d dei cateti e sapendo che, se i cateti stessi si diminuiscono entrambi di k, l'area del triangolo diminuisce di m^2. (Si indichino con x, y, ponendo $x > y$, le misure incognite dei cateti).
   N.B. Si deve dimostrare con precisione la suddetta equivalenza, *non risolvere il problema*.
2) Sia data da risolvere la seguente equazione, nella quale i radicali si intendono in valore assoluto (o, se si preferisce, col segno $+$):

   $$\sqrt{x-1} = \sqrt{x-2} - 1.$$

   Il candidato consideri il seguente schema di risoluzione

   $$x - 1 = x - 2 + 1 - 2\sqrt{x-2}, \quad -2\sqrt{x-2} = 0, \quad x = 2;$$

   il numero 2 non è radice dell'equazione data.
   Il candidato indichi come va completato lo schema, in modo che risulti, senza verifica, che $x = 2$ non può soddisfare all'equazione iniziale. Dimostri inoltre direttamente, nel campo reale, che l'equazione considerata non ha soluzioni.

3) Sia n un numero intero e A un numero reale positivo, entrambi fissati. Dimostrare che: "Il prodotto di n numeri positivi aventi somma assegnata nA è più grande possibile quando i numeri sono uguali". In altre parole, se a_1, $a_2, \dots, a_n$ sono n numeri positivi tali che

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = nA$$

allora si ha

$$a_1 a_2 \cdots a_n \leq A^n,$$

dove l'uguaglianza sussiste se e solo se

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n = A.$$

Il candidato può limitarsi a considerare il caso di valori particolari per n oppure, ciò che è desiderabile, il caso generale.

4) Due cercatori d'oro hanno due grandi sacchi di pezzi d'oro. Il primo ha solo pezzi da 15 grammi, il secondo pezzi da 21 grammi. Può il primo pagare esattamente al secondo un debito di 27 grammi d'oro? Potrebbe invece il secondo pagare esattamente al primo un debito di 29 grammi d'oro?

5) Un podista si trova su un punto della terra (che supponiamo perfettamente sferica). Percorre un chilometro verso nord, poi uno verso est e infine uno verso sud. Si ritrova al punto di partenza. Quali sono i punti di partenza che obbediscono a questa condizione?

Anno accademico 1964–1965

Dissertazione: Proprietà fondamentali dei triangoli rettangoli.

Esercizi:

1) In un trapezio si conducano quattro rette r_1, r_2, r_3, r_4 parallele alle due basi in modo tale che:

   r_1 passi per l'intersezione delle due diagonali;

   r_2 divida il trapezio in due trapezi simili;

   r_3 sia equidistante dalle due rette contenenti le basi;

   r_4 divida il trapezio in due trapezi aventi la stessa area.

   Siano rispettivamente E_1F_1, E_2F_2, E_3F_3, E_4F_4 i segmenti delle rette r_1, r_2, r_3, r_4 intercettati dal trapezio. Dimostrare che

$$\overline{E_1F_1} \leq \overline{E_2F_2} \leq \overline{E_3F_3} \leq \overline{E_4F_4}.$$

   Esaminare il caso in cui in almeno una delle disuguaglianze valga il segno di uguaglianza.

2) Determinare un triangolo conoscendo un lato, l'angolo opposto e il prodotto degli altri due lati.

3) Un padre possiede un certo numero di monete d'oro. Egli le ripartisce fra i suoi tre figli nel modo seguente. Assegna al primo figlio la metà delle monete più una, al secondo ne assegna un terzo delle rimanenti, al terzo rimane un numero di monete che è doppio di quelle assegnate al secondo. Qual è il minimo numero di monete che il padre deve possedere perché il terzo figlio abbia più di 10 monete?

4) Si vogliono disporre alcuni satelliti, fissi rispetto alla Terra, in modo che da ogni punto della superficie terrestre se ne veda almeno uno. Si supponga per semplicità che la Terra sia perfettamente sferica e i satelliti puntiformi. Dimostrare che occorrono non meno di quattro satelliti per ottenere lo scopo.

Anno accademico 1965–1966

Esposizione: A proposito della teoria dei polinomi di una variabile x, il candidato risponda alle seguenti domande:

1. Si sa che la somma e il prodotto di due polinomi è un polinomio. Come si definisce il grado di un polinomio? Come si comporta il grado rispetto alla somma e al prodotto?
2. Che cosa significa dividere un polinomio per un altro? Spiegare il significato del quoziente e del resto, e dire quando un polinomio è divisibile per un altro.
3. Dare un criterio perché il polinomio $p(x)$ sia divisibile per il polinomio $x-a$. Dedurne che un polinomio di grado n non può avere $n+1$ radici distinte.
4. Nella divisione di due polinomi a coefficienti razionali è possibile che il numero $\sqrt{2}$ appaia tra i coefficienti del quoziente o del resto?
   Facoltativo: quale analogia vede il candidato fra la teoria della divisibilità dei polinomi e quella dei numeri interi?

Esercizi:

1) Considerare l'equazione $x^2+(m-1)x-(m+3)=0$, dove m è un parametro reale. Dopo aver riconosciuto che essa ha radici reali per ogni valore di m, trovare l'espressione della somma dei quadrati delle radici e dire per quale valore di m essa è minima.
2) Dimostrare che ogni numero primo diverso da due si può scrivere in un unico modo come differenza di due quadrati di interi.
3) Si dispongano sulle 64 caselle di una scacchiera i numeri $1, 2, 3, \ldots, 64$. Chiamiamo contigue due caselle che hanno un lato in comune.

Si dimostri che esistono almeno due caselle contigue i cui numeri differiscono per più di 4.

Anno accademico 1966–1967

Dissertazione: Poligoni regolari. Il candidato esponga le costruzioni (con riga e compasso) a lui note e indichi *tutti* i poligoni regolari che, partendo da esse, è in grado di ottenere.

Esercizi:

1) Dire per quali valori reali di k l'equazione $x^8 + k^2 + k = 0$ ammette radici reali.
2) Il candidato dica se l'equazione $2\sin x + 2\cos x = 3 + 2^x$ ha soluzione.
3) Dati nel piano una circonferenza C di centro O e raggio r, e due punti A e B, cercare gli eventuali punti P di C tali che la retta congiungente P con A e la retta congiungente P con B siano perpendicolari. Il candidato dica sotto quali condizioni per O, r, A, B, il problema ammette una o più soluzioni.
4) Il candidato dica in quanti modi è possibile cambiare un biglietto da 1000 lire
   (a) in monete da 100, 20, 10 lire;
   (b) in monete da 50, 20, 10 lire.

Anno accademico 1967–1968

Dissertazione: Esporre *brevemente* la teoria delle equazioni di I e II grado nell'ambito dei numeri reali.
Dire se e come la teoria debba essere modificata qualora ci si metta nell'ambito dei soli numeri razionali.

Esercizi:

1) È data l'equazione:
$$\cos^4 x + \sin^4 x = k.$$
Dire per quali valori di k esistono soluzioni.
2) Sono assegnate tre rette parallele. Esiste un triangolo equilatero con i vertici rispettivamente sulle tre rette?
3) È dato un angolo acuto ed un punto P interno ad esso: condurre per P una retta che stacca un triangolo di area assegnata a^2.
Dire per quali valori di a il problema ammette soluzione.
4) Si consideri l'equazione:
$$x^5 + a_1x^4 + a_2x^3 + a_3x^2 + a_4x + a_5 = 0$$
a coefficienti tutti interi.
Supponiamo che a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, siano tutti divisibili per un assegnato numero intero primo $p > 1$ e che a_5 non sia divisibile per p^2.
Dimostrare che l'equazione non ammette come soluzione alcun numero intero.

Anno accademico 1968–1969

Dissertazione: Illustrare *brevemente* il concetto di area per i poligoni piani.

Esercizi:

1) Dire per quali interi positivi n e per quali numeri reali q la somma $1 + q + q^2 + \cdots + q^n$ è positiva.
2) Provare che il prodotto di quattro interi positivi consecutivi non è mai un quadrato perfetto e che aggiungendo al prodotto trovato 1 si ottiene sempre un quadrato perfetto.
3) Sono dati in un piano quattro punti A, B, C, D, in modo che A, B, C e A, B, D sono vertici di triangoli equilateri distinti. Determinare tutte le circonferenze β che godono della seguente proprietà: i quattro punti A, B, C, D, hanno dalla circonferenza β uguale distanza.
4) In un piano sono date tre rette parallele r, s, t: la retta s è tra le altre due e contiene un punto assegnato A. Determinare le parti della retta r costituite dai punti X per i quali passa almeno una retta che incontra le rette s, t in punti equidistanti da A.

Anno accademico 1969–1970

Dissertazione: Quali sono gli aspetti della Matematica che le sembrano più interessanti, e perché?
(Si raccomanda di non superare le due facciate di foglio protocollo).

Esercizi:

1) Dire se esistono numeri reali x per i quali vale la seguente uguaglianza:

$$2+2^x = \sin^4 x + \cos^4 x + 6\sin^2 x \cdot \cos^2 x.$$

2) Nel piano sono dati tre punti non allineati A, B, C, e la retta r perpendicolare in A al segmento AB. Determinare gli eventuali punti X della retta r tali che:

$$A\widehat{X}B = B\widehat{X}C.$$

3) In un piano sono dati una retta r e due punti L, M fuori di essa. Inoltre è assegnata una lunghezza a.
Determinare sulla retta r due punti H, K tali che il segmento HK abbia lunghezza a e sia minima la lunghezza della spezzata $LHKM$.

4) Avendo una bilancia a due piatti, si vogliono pesare oggetti di peso non superiore a 500 grammi con errore inferiore ad un grammo. Si possono acquistare pesi di un grammo o multipli interi del grammo.
Qual è il minimo numero di pesi che occorre acquistare?
N.B. Durante le pesate, i pesi non possono essere posti nel piatto che contiene l'oggetto da pesare.

Anno accademico 1970–1971

Dissertazione: Esporre brevemente, motivando la risposta, qualche notevole proprietà che distingue i numeri razionali tra i numeri reali.

Esercizi:

1) Dimostrare che se due triangoli isosceli hanno la stessa altezza (rispetto alla base) e la stessa mediana rispetto al lato, essi sono uguali. Indicare una costruzione del triangolo, dati i due segmenti altezza e mediana, oppure determinare i lati del triangolo sapendo che l'altezza misura cm 2 e la mediana cm $2\sqrt{5}$.

2) Dire se i seguenti due problemi sono equivalenti (cioè se ogni soluzione dell'uno è anche soluzione dell'altro); in caso negativo, modificare il secondo in modo da stabilirne l'equivalenza col primo.
   (I) Determinare il raggio di base x e l'apotema y di un cono circolare retto, sapendo che la loro somma è m e che l'area della superficie totale del cono è $\pi k m^2$ ($k > 0$).
   (II) Determinare le soluzioni del sistema:

$$\begin{aligned} &x+y=m,\\ &x^2+xy=km^2,\\ &x>0,\\ &y>0,\\ &k<\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

3) Nel piano sono fissati due punti A, B. Sia β una circonferenza dello stesso piano avente centro sull'asse del segmento AB e non avente punti in comune con la retta AB.

Determinare, giustificando la risposta, i punti della circonferenza β dai quali i segmento AB è visto sotto l'angolo massimo e sotto l'angolo minimo.

4) Fissato un intero positivo n, determinare il più piccolo intero m tale che, presi comunque m numeri, una almeno delle seguenti eventualità si verifichi:
   (a) tra gli m numeri considerati, ve ne sono n uguali;
   (b) tra gli m numeri considerati, ve ne sono n distinti.
5) (In questo esercizio "numero" significa "intero positivo").
   È immediato constatare che ogni numero dispari è somma di due numeri consecutivi. Dimostrare, più in generale, che ogni numero avente un divisore dispari maggiore di uno è somma di (più) numeri consecutivi. Vi sono altri numeri aventi questa proprietà?

Anno accademico 1971–1972

Dissertazione: Esporre brevemente definizione e proprietà dei logaritmi.

Problemi:

1) In occasione di un rinnovo del contratto di lavoro, i rappresentanti sindacali ottengono che, oltre al riposo domenicale, i dipendenti di un'azienda godano di una vacanza ogni quattro giorni e di una vacanza ogni dieci giorni quale premio di operosità. Il contratto va in vigore il primo giorno di un anno che cade di lunedí. Calcolare in quali giorni dell'anno accadrà, per la prima volta, che per effetto di questo accordo e dei riposi domenicali, i dipendenti godranno di tre giorni di vacanza consecutivi.
2) Sono dati quattro punti A, B, C, D, dello spazio. Trovare un piano dal quale i quattro punti siano equidistanti e tale che A e C stiano in uno dei semispazi determinato dal piano e B e D nell'altro.
3) Se p e q sono numeri interi dispari, l'equazione

$$x^2 + 2px + 2q = 0$$

   non ha radici razionali. È facoltativo dimostrare che la stessa conclusione vale per l'equazione

$$x^n + 2px + 2q = 0 \qquad n \geq 3.$$

4) Una bilia si trova su un biliardo in una posizione P. Provare che esiste almeno una direzione secondo cui si può lanciare la bilia in modo che essa non ripassi mai per la posizione P. Si consideri il biliardo privo di attrito e che il rimbalzo alle sponde obbedisca alla stessa legge di riflessione della luce.

Anno accademico 1972–1973

1) Eseguire la divisione del polinomio $x^4 + x^3$ per il polinomio $x^2 + 1$ e spiegare il significato dell'operazione eseguita.
2) Dimostrare, con precisione e chiarezza, questo semplice teorema: nel triangolo di vertici A, B, C, e di lati opposti (rispettivi) a, b, c, si ha $\widehat{A} < \widehat{B}$ se e soltanto se $a < b$.
3) Dimostrare che il prodotto di quattro interi consecutivi aumentato di 1 è un quadrato perfetto.
4) Dire a quale condizione devono soddisfare tre cerchi del piano di uguale raggio e privi, a due a due, di punti comuni perché esista un quarto cerchio tangente a tutti e tre che li racchiude tutti. Costruire tale cerchio.
5) Dire se esistono numeri reali x che verificano l'equazione $x^2 + 2x + 2^{-x} = 0$.
6) I batteri di una cultura aumentano dopo ogni minuto primo del 10%; se inizialmente vi erano mille batteri, dopo tre ore vi saranno x batteri. Dire quali delle seguenti congetture è vera, e perché:
   (a) x è minore di un milione;
   (b) x è compreso fra un milione ed un miliardo;
   (c) x è maggiore di un miliardo.

Anno accademico 1973–1974

1) Sono date due bottiglie A e B della capacità di un litro ciascuna. Si riempie A di vino, e se ne trasferisce una frazione k in B. Successivamente si colma B di acqua. Dopo aver rimescolato l'acqua e il vino, si versa una parte della soluzione da B in A fino a riempire quest'ultima.
   Determinare la quantità di vino puro che si trova in A al termine dell'operazione, e dimostrare che tale quantità non può essere inferiore a $\frac{3}{4}$ di litro.
2) Di 128 casse di arance, ogni cassa contiene non meno di 120 e non più di 144 arance. Mostrare che almeno 6 casse contengono un uguale numero di arance.
3) Un treno parte da Pisa. Al momento della partenza il macchinista controlla il cronometro e nota che la lancetta dei secondi è sullo zero. Dopo aver percorso 8 chilometri il macchinista controlla di nuovo il cronometro e nota che la lancetta dei minuti copre esattamente quella delle ore. La velocità media del treno per gli otto chilometri percorsi è di 33 chilometri l'ora. A che ora è partito il treno da Pisa?
4) Una regione piana si dice convessa se, insieme a due suoi punti qualsiasi, contiene tutto il segmento che li congiunge.
   Sono dati nel piano cinque punti A, B, C, D, E. Mostrare che, fra i quadrangoli che hanno per vertici quattro dei cinque punti A, B, C, D, E, ne esiste almeno uno convesso.
   Per semplicità, il candidato supponga che, fra i cinque punti dati, non ve ne siano tre allineati.
5) Qual è il più grande intero N tale che

$$n^5 - 5n^3 + 4n$$

sia divisibile per N qualunque sia l'intero n?

6) Determinare nel modo più elementare possibile (e senza usare la tavola dei logaritmi) quale dei due numeri

$$120^{100} \quad \text{e} \quad 100^{120}$$

sia maggiore dell'altro.

Anno accademico 1974–1975

1) Determinare i valori di a per cui l'equazione

$$2^{(\cos x+\sin x)} = a$$

ammette soluzioni.

2) Dimostrare che è possibile trisecare con riga e compasso un angolo retto ed un angolo di 45°.

3) Trovare il luogo del terzo vertice di un triangolo, dati due vertici e la lunghezza di una mediana. Esaminare i vari casi.

4) Dimostrare che le soluzioni intere positive dell'equazione

$$x+y+z = xyz$$

sono numeri distinti. Dimostrare che l'unica soluzione è costituita dalla terna 1, 2, 3.

5) Dati tre numeri interi a, b, c aventi massimo comun divisore 1, verificare che i numeri della forma

$$am^2+bm+c,$$

con m intero qualunque, non possono essere tutti divisibili per 14. Generalizzare il risultato.

6) Dire con quanti zeri consecutivi termina il numero ottenuto moltiplicando fra loro i primi 133 numeri naturali.

Anno accademico 1975–1976

1) Detti α, β, γ, gli angoli di un triangolo ABC ed a, b, c, i lati opposti rispettivamente ad essi, mostrare l'identità

$$a(\sin\beta - \sin\gamma) + b(\sin\gamma - \sin\alpha) + c(\sin\alpha - \sin\beta) = 0.$$

2) Un bambino sta giocando con cubi di legno, tutti uguali fra loro. Egli dispone questi cubi in maniera da ricoprire un quadrato. Un fratello vuole fare anche lui lo stesso gioco con quei cubi. La madre, per mettere accordo tra i due, divide i cubi fra i due bambini, in parti uguali, e dice loro di ricoprire con i cubi loro assegnati due quadrati.
Quanto pensate che la madre abbia profittato dei suoi studi medi di matematica? Giustificate il vostro giudizio.

3) Due circonferenze si intersecano e sia A uno dei punti di intersezione. Condurre per A le rette che formano con le due circonferenze corde uguali.

4) Dividiamo l'insieme dei primi sette interi positivi in due parti. Dimostrare che, comunque sia stata fatta questa suddivisione, una delle due parti contiene almeno una coppia di numeri la cui differenza appartiene pure alla parte stessa.
(Per esempio, la parte costituita dai numeri 1 e 2 soddisferebbe la condizione richiesta poiché $2-1=1$).

5) Il prodotto di tre numeri interi positivi consecutivi non può essere il cubo di un numero intero.
Facoltativo: Mostrare che il prodotto di k numeri interi positivi consecutivi non può essere la potenza k-esima di un numero intero.

6) Siano dati tre numeri a, b, c. Supponiamo che, per ogni numero intero positivo n, esista un triangolo le lunghezze dei lati del quale sono a^n, b^n, c^n, rispettivamente. Dimostrare che tutti questi triangoli sono isosceli.

Anno accademico 1976–1977

1) Per quali valori del numero reale a l'equazione

$$1+\sin^2 ax = \cos x$$

ha una ed una sola soluzione?

2) Date le due progressioni aritmetiche

$$1,\, 4,\, 7,\, \ldots,$$

$$7,\, 33,\, 59,\, \ldots,$$

dimostrare che ogni progressione aritmetica che le contiene entrambe ha ragione uno.
È in facoltà del candidato generalizzare questo risultato provando che, se due progressioni aritmetiche hanno ragioni prime fra loro, ogni progressione aritmetica che le contenga entrambe ha ragione uno.

3) Sia n un intero maggiore di 2, e sia Δ un triangolo rettangolo. Dimostrare che l'n-esima potenza della lunghezza dell'ipotenusa di Δ è maggiore della somma delle n-esime potenze dei cateti.

4) Siano x, y, z, e α, β, γ, numeri reali tali che

$$\alpha z - 2\beta y + \gamma x = 0, \quad \alpha\gamma - \beta^2 > 0.$$

Dimostrare che

$$xz - y^2 \leq 0.$$

5) Mostrare che, per ogni intero positivo n, il numero

$$5^n + 2\cdot 3^{n-1} + 1$$

è divisibile per 8.

6) Dati nel piano un segmento AB ed una retta r, che non intersechi AB, determinare il punto (o i punti) di r, dai quali AB è visto secondo un angolo massimo.

Anno accademico 1977–1978

1) Su un tavolo orizzontale vi è una pila di 7 dischi metallici perfettamente uguali ognuno di diametro 40 cm.
   Dire qual è la distanza massima che può avere la verticale per il centro del disco più alto dalla verticale per il centro del disco più basso senza che la pila crolli.

2) Considerare le equazioni

$$2x^4 - 2x^3 + 2^x = 0$$

   e

$$2\cos^2 \frac{x^2+x}{6} = 2^x + 2^{-x}.$$

   Dire per ciascuna di esse se ammette soluzioni reali e in caso affermativo trovarle.

3) Quattro amici, fra cui il padrone di casa, giocano a dadi con le seguenti regole: ad ogni turno di gioco, ognuno di essi lancia un dado, ed il padrone di casa paga cinque gettoni a chi ha ottenuto il suo stesso punteggio, mentre ne incassa uno da chi ha ottenuto un punteggio diverso.
   Ad un certo momento, uno dei tre ospiti salta un turno di gioco per prendere le sigarette dal suo soprabito. Alla fine del gioco essi rimangono con 23, 30, 32, 35 gettoni rispettivamente.
   Sapendo che all'inizio ognuno aveva 30 gettoni, sapreste indicare quanti gettoni hanno alla fine il padrone di casa ed il fumatore?

4) Sui quattro lati di un parallelogrammo, ed esternamente ad esso, costruiamo quattro quadrati. Mostrare che i centri di questi quadrati sono a loro volta vertici di un quadrato.

5) Data una progressione geometrica formata da un numero qualsivoglia di numeri reali, dimostrare che ad essa non possono appartenere tutti e tre i numeri

$$10,\ 13,\ 19.$$

6) Per ogni intero positivo n, il numero

$$N = n^2 + 1$$

   non è divisibile per 3.
   Facoltativo: dire per quali interi positivi s esistono interi n tali che

$$n^s + 1$$

   è divisibile per 3.

Anno accademico 1978–1979

1) Due amici A e B fanno questo gioco: quando uno dei due dice un numero intero e positivo, l'altro lo dimezza se pari, mentre gli toglie uno se dispari. Vince chi pronuncia il numero 1.
(Esempio: A dice 18, B risponde 9, A continua con 8, B con 4, A con 2 e B dice 1: B vince in sei colpi).
Il giocatore A comincia il gioco scegliendo un numero maggiore di 30.000 e minore di 31.000.
Quale scelta deve fare se vuole vincere nel minimo numero di colpi?

2) Tre satelliti a, b e c girano intorno alla Terra con velocità costanti ed uguali fra loro, descrivendo tre orbite circolari di centro nel centro della Terra e raggi uguali.
Si possiedono le seguenti informazioni:
   (i) l'orbita di a si trova sul piano dell'equatore, mentre le orbite di b e c si trovano sui piani di due meridiani;
   (ii) in un certo istante a si trova sul punto A, b in B e c in C, mentre in un istante successivo a si trova in B, b in C e c in A;
   (iii) i piani delle orbite di b e c sono perpendicolari;
   (iv) in ogni istante il triangolo che ha come vertici a, b, c, è un triangolo equilatero;
   (v) il rapporto fra il massimo e il minimo delle distanze fra due satelliti è $\sqrt{3}$.

   Il candidato dica se queste informazioni sono fra loro compatibili e se alcune di esse sono superflue, nel senso che possono essere dedotte dalle informazioni precedenti.

3) Dire quale forma deve avere un polinomio $P(x)$ affinché per ogni numero reale x si abbia
$$1 - x^4 \leq P(x) \leq 1 + x^4.$$

4) Si considerino due quadrati (O, M, N, P) e (O, S, R, T), l'uno esterno all'altro aventi in comune solo il vertice O. Dimostrare che la mediana per O del triangolo (O, P, S) è perpendicolare alla retta passante per T ed M.
N.B. I vertici dei tre poligoni considerati sono elencati in senso orario.

5) Trovare tre numeri interi n tali che $2^n - \log_2 n$ risulti intero e multiplo di 3.
Facoltativo: mostrare che esistono infiniti interi n aventi questa proprietà.

6) Dire se le due equazioni
$$2x^3 + 3x^2 - 4x - 6 = 0$$
e
$$x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2 = 0$$
hanno qualche radice in comune.

Anno accademico 1979–1980

1) Un battello scende lungo un fiume; sia alla partenza che ad ogni stazione intermedia salgono sul battello tanti passeggeri, ognuno diretto ad una diversa stazione, quante sono le fermate successive. Sapendo che il numero massimo di passeggeri contemporaneamente presenti sul battello è 380, si determini il numero delle stazioni.
(Si cerchi una formula che leghi il numero delle stazioni al numero massimo di passeggeri contemporaneamente presenti a bordo).

2) Descrivere l'insieme delle coppie di numeri reali (x,y) tali che

$$\sin x + \sqrt{3}\cos x \leq y \leq \pi - |x| + \big|\pi - |x|\big|,$$

e rappresentarlo graficamente nel piano cartesiano di coordinate x e y.

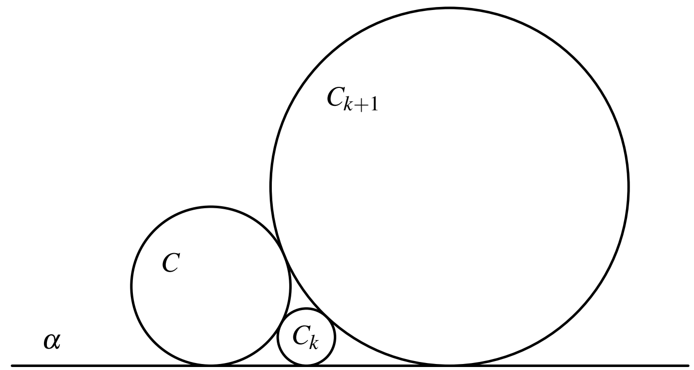
3) Per un punto P passano tre superfici sferiche distinte tra loro. Si considerino le affermazioni seguenti:
   (a) nessuna retta passante per P è tangente a tutte e tre le sfere;
   (b) nessuna sfera è tangente ad un'altra;
   (c) esiste un altro punto Q in comune alle tre superfici sferiche.

   Dire, per ogni coppia di affermazioni, se esse sono incompatibili, se sono equivalenti o se una delle due implica l'altra.

4) Un sacchetto contiene 48 palline di diversi colori: bianche, rosse e nere. La probabilità che, estraendo contemporaneamente due palline, esse siano entrambe bianche è doppia rispetto alla probabilità che, estraendo contemporaneamente tre palline, esse siano tutte rosse. Quante sono le palline nere nel sacchetto?

5) Si considerino due circonferenze C e C_1, di raggi rispettivamente R ed R_1, tra loro tangenti esternamente in un punto P, ed un retta α, tangente ad entrambe, non passante per P.
Siano poi:

C_2, la circonferenza tangente ad α, a C ed a C_1, di raggio $R_2 > R_1$;
C_3, la circonferenza tangente ad α, a C ed a C_2, di raggio $R_3 > R_2$;
. . . .
C_{k+1}, la circonferenza tangente ad α, a C ed a C_k, di raggio $R_{k+1} > R_k$;
. . . .



Sapendo che $R = 100R_1$, trovare, al variare dell'intero k, il valore di R_k, e dire se i cerchi C_k esistono per ogni k; in caso contrario, trovare il massimo k per cui C_k esiste.
(Si consiglia di determinare preliminarmente la relazione che intercorre fra i raggi di tre cerchi, ciascuno dei quali tangente esternamente agli altri due, e tutti tangenti ad una stessa retta).

6) Ad ogni polinomio $P(x)$ si associ il polinomio

$$(*) \qquad Q(x) = P(x+1) - P(x).$$

Si provi che:

(a) Q è identicamente nullo se e solo se il polinomio $P(x)$ è una costante;

(b) per ogni polinomio $Q(x)$ di grado ≤ 3 esistono infiniti polinomi P che verificano la $(*)$.

Anno accademico 1980–1981

1) Provare la disuguaglianza

$$|x^\alpha - y^\alpha| \leq |x-y|^\alpha$$

per ogni α razionale compreso fra 0 e 1, per ogni x, $y \geq 0$.

2) Sia $A\widehat{O}B$ un angolo di 120°, P e Q punti ad esso interni. Trovare un punto M *sulla semiretta* OA e un punto N *sulla semiretta* OB tali che sia minima la somma

$$\overline{PM} + \overline{MN} + \overline{NQ}.$$

3) Siano date due circonferenze C, di centro O, e C', di centro O', fra loro secanti in due punti A e B. Sia P un punto di C, esterno a C'. Sia poi M il secondo punto di intersezione della retta PA con C' ed N il secondo punto di intersezione della retta PB con C'.
Si dimostri che la retta PO è perpendicolare alla retta MN.

4) Costruire un polinomio p di grado minimo e con coefficiente del termine di grado massimo uguale a 1, tale che

$$p(0) = 0, \quad p(1) = 1, \quad p(-1) = 2.$$

5) Un tale vuole pesare 4 sacchi di patate, ognuno dei quali ha peso compreso fra 20 e 40 chili. Egli dispone però di una bilancia che può misurare solamente pesi compresi fra 40 e 80 chili. Decide, pertanto, di pesare i sacchi a due a due. Alla fine egli si accorge però di avere scritto solo 5 dei 6 possibili pesi ottenuti in questo modo. Sapendo che tali pesi sono 46, 49,

50, 50, 51 chili, sapreste determinare il peso di ognuno dei singoli sacchi, dimostrando altresì che tale soluzione è unica?
Sapreste dire inoltre se, cambiando a piacere i 5 valori forniti, il problema

(a) avrebbe comunque avuto soluzione?

(b) avrebbe comunque avuto non più di una soluzione?

6) Un'autostrada ha n caselli a distanze successive di p chilometri. Si è osservato che ogni macchina entra con uguale probabilità da ogni casello ed esce con uguale probabilità da un altro casello. Trovare la lunghezza del percorso medio di ogni macchina.

Anno accademico 1981–1982

Il candidato risolva *sei* dei seguenti problemi:

1) Risolvere il sistema

$$\begin{cases} x - \log y = 1 \\ y - \log x = 1. \end{cases}$$

(Si ricorda che $\log x = \log_e x$ e che il numero e ha la seguente proprietà:

$$e^x > 1 + x \quad \text{per ogni } x \neq 0).$$

2) Determinare gli interi positivi p, q, N per cui

$$(p+q)^N = 2(p^N + q^N).$$

3) Trovare quattro numeri interi positivi a, b, c, d, in modo che per ogni numero razionale positivo x risulti

$$\left| \frac{ax+b}{cx+d} - \sqrt{2} \right| < \frac{1}{10} \left| x - \sqrt{2} \right|.$$

Utilizzando la formula trovata, calcolare $\sqrt{2}$ con l'approssimazione di 10^{-3}.

4) Dire per quali numeri reali x si ha

$$2\cos x \leq \left| \sqrt{1+\sin 2x} - \sqrt{1-\sin 2x} \right| \leq 2.$$

5) Dato nel piano un quadrilatero $ABCD$, tracciare un cerchio equidistante dai quattro vertici.
Quanti di questi cerchi si possono tracciare? Discutere il problema. (Si ricorda che la distanza di un punto P da un cerchio di centro O e raggio r è $\overline{OP} - r$ se P è esterno al cerchio, $r - \overline{OP}$ se P è interno al cerchio).

6) Dato un tetraedro avente 5 dei 6 spigoli di lunghezza ≤ 2, provare che il suo volume è ≤ 1. In quale caso il volume risulta uguale a 1?

7) Una centrale elettrica si trova, ad un certo istante, ad erogare la massima potenza disponibile. Si sa che le uniche variazioni sul circuito che avverranno entro breve termine saranno determinate dalla fermata di cinque impianti industriali e dalla messa in moto di altri due impianti. Non conoscendo l'ordine in cui le sette operazioni avverranno, dire qual è la probabilità che si verifichi un "black-out".
(Si supponga per semplicità che le 7 industrie assorbano la stessa potenza e che accensioni e spegnimenti avvengano in istanti diversi).
Si studi possibilmente il problema anche nel caso più generale in cui le industrie che fermano gli impianti sono N, mentre quelle che li mettono in moto sono K.

Anno accademico 1982–1983

1)(a) Provare che le sole soluzioni del sistema

$$\begin{cases} xe^y + ye^x = 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

sono $x = 0$, $y = 1$ e $x = 1$, $y = 0$.

(b) Dimostrare che il sistema

$$\begin{cases} xe^{x^2} + ye^{y^2} = 3 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

non ha soluzioni.

[Potrà essere utile la seguente disuguaglianza:

$$(aa' + bb')^2 \leq (a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2)\ ].$$

2) Sia Q un quadrato di lato unitario. Si determini il più grande numero reale α che verifica la seguente proprietà. Comunque si suddivida Q in due parti A, B, una (almeno) di tali parti contiene due punti che hanno distanza $\geq \alpha$.

3) Sia n un intero maggiore di 2. Mostrare che la somma dei cubi dei numeri che sono primi con n e inferiori a esso è divisibile per n.

4) Un triangolo ha gli angoli α, β, γ che verificano la condizione

$$\cos 3\alpha + \cos 3\beta + \cos 3\gamma = 1.$$

Si provi che uno di tali angoli vale $\frac{2}{3}\pi$.

5) Dati un piano α e due punti P, Q, nello stesso semispazio, si considerino le sfere passanti per i punti P, Q, e tangenti al piano α.
Si richiede di determinare il luogo dei punti di tangenza.
(Si esamini preliminarmente il caso in cui i due punti sono su una retta perpendicolare al piano).

6) Per i tre vertici di un triangolo si conducono tre rette parallele e poi altre tre rette anch'esse fra loro parallele. I punti di intersezione di queste sei rette definiscono dei parallelogrammi. Di questi, tre hanno come diagonale un lato del triangolo. Provare che le seconde diagonali di questi parallelogrammi passano per un punto.
(Si studi preliminarmente il caso in cui le terne di rette sono fra loro perpendicolari).

Anno accademico 1983–1984

1) Si considerino i polinomi

$$p(x) = x^2 - 2x + 2, \qquad q(x) = p(p(x));$$

(a) provare che le radici dell'equazione $p(x) = x$ sono anche radici di $q(x) = x$;

(b) trovare le radici dell'equazione $q(x) = x$.

2) Sia $ABCD$ un quadrato, e sia P un punto interno ad esso tale che

$$P\widehat{A}B = P\widehat{B}A = 15^\circ.$$

Si dimostri che il triangolo PCD è equilatero.

3) Siano a e b due numeri positivi tali che $a+b=1$; provare la disuguaglianza

$$\left(a+\frac{2}{a}\right)^2 + \left(b+\frac{2}{b}\right)^2 \geq \frac{81}{2}.$$

Per quali valori a e b vale il segno di uguale?

4) Trovare il massimo numero intero positivo che divide tutti i numeri della forma

$$n^7 + n^6 - n^5 - n^4$$

con n intero maggiore di 1.

5) Due amici si sono iscritti alla prima classe di un liceo. Tale liceo ha due sezioni le cui prime classi hanno rispettivamente n e m studenti, con n e m compresi tra 20 e 30.

Sapendo che la probabilità che i due amici si trovino nella stessa classe è 1/2, dite quanti sono gli studenti delle due classi.

6) Si consideri un angolo convesso delimitato dalle due semirette r e s aventi la stessa origine; siano A e G due punti interni ad esso.
È possibile determinare un punto B su r e un punto C su s in modo che il triangolo ABC abbia baricentro in G?

Anno accademico 1984–1985

1) Una stanza rettangolare ha il pavimento rivestito con mattonelle quadrate; la metà di esse è adiacente alle pareti. Trovare quante possono essere le mattonelle su ciascun lato.

2) In quante regioni viene divisa una superficie sferica da n cerchi massimi che giacciono su di essa?
(Si supponga che tra gli n cerchi nessuna terna concorra in un punto).

3) Trovare tutte le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 2x+yz-x10^{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=0 \\ 2y+xz-y10^{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=0 \\ -2z+2xy+z10^{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=0. \end{cases}$$

4) Un tetraedro $ABCD$ ha tre spigoli AD, BD, CD, di lunghezza d e gli altri tre di lunghezza l. Si determini il raggio r di una sfera che è tangente a tutti e sei gli spigoli.

5) Siano n e k due interi assegnati maggiori o uguali a 2; determinare i polinomi $p(x)$ di grado k tali che valga l'identità

$$p(x^n)=[p(x)]^n.$$

6) Siano dati una circonferenza γ e un punto P distinto dal centro. Sia PAB un triangolo che, tra tutti quelli che hanno un vertice in P e i rimanenti due su γ, abbia perimetro massimo. Dimostrare che le due bisettrici uscenti dai vertici A e B passano per il centro di γ.
(Non si richiede la costruzione geometrica, né la determinazione degli elementi del triangolo).

Anno accademico 1985–1986

1) L'eguaglianza

$$p! + q! + r! = s!$$

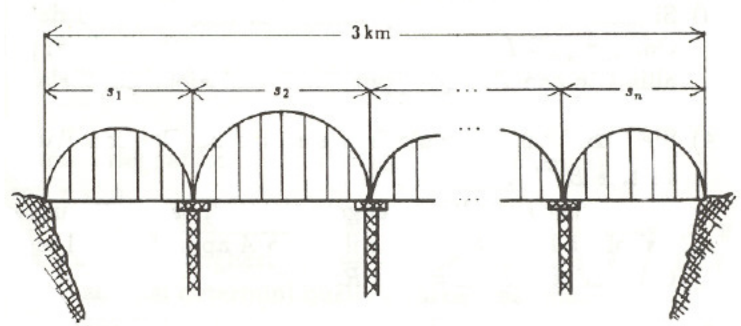
è soddisfatta per $p = q = r = 2$ ed $s = 3$.
Dire se esistono altri numeri interi positivi per cui tale eguaglianza è vera.
(Si ricorda che $n!$ indica il prodotto $n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ dei primi n numeri interi).

2) Si considerino nel piano due circonferenze γ e γ' di eguale raggio. Determinare il luogo dei punti medi M dei segmenti AA' con A in γ e A' in γ'.

3) Fra i triangoli equilateri contenuti in un quadrato assegnato, determinare quelli di area massima.

4) Fissati due punti P e Q su due lati consecutivi di un dato rettangolo, si determinino sugli altri due lati due punti R ed S tali che il quadrilatero $PQRS$ abbia area massima.

5) Per la costruzione di un certo ponte si prevede che il costo di ogni arcata sarà di $18s^2$ miliardi di lire, dove s è la distanza in chilometri fra i due piloni di sostegno di quell'arcata, mentre il costo di ogni pilone sarà di mezzo miliardo.
Se il ponte deve essere lungo 3 chilometri quale sarà il minimo costo dell'opera?



6) Con una bilancia a piatti e disponendo di infiniti pesi campione

$$p,\ p_1,\ q_1,\ p_2,\ q_2,\ \dots,\ p_n,\ q_n,\ \dots$$

da

$$1,\ \lambda,\ 1/\lambda,\ \lambda^2,\ 1/\lambda^2,\ \dots,\ \lambda^n,\ 1/\lambda^n,\ \dots$$

grammi rispettivamente, dove λ è un numero reale maggiore di 1, si vogliono pesare tutti gli oggetti con una precisione arbitrariamente grande. Per quali valori di λ ciò è possibile?
(N.B. Si dispone di un solo esemplare di ogni peso campione e non si possono mettere pesi campione sul piatto che contiene l'oggetto da pesare).

Anno accademico 1986–1987

1) Si determinino gli interi positivi k tali che il polinomio

$$x^5+x^4+x^3+kx^2+x+1$$

sia prodotto di polinomi a coefficienti interi di grado minore di cinque.

2) Si dimostri che il sistema di equazioni

$$\begin{cases} ye^x-e^{-y}=xye^x \\ xe^y-e^{-x}=e^y \end{cases}$$

ha un'unica soluzione.

3) Si dimostri che la composizione di due omotetie dello spazio, con poli P e Q distinti, è ancora un'omotetia di polo R, allineato con P e Q, oppure una traslazione parallela a PQ.

4) Sia ABC un triangolo isoscele di base BC con l'angolo al vertice $B\widehat{A}C$ minore di $60°$.
Si costruisca un altro triangolo PQR, di base QR, circoscritto e simile ad ABC, tale che il punto A appartenga al segmento QR e si abbia $\overline{QA}=2\cdot\overline{AR}$.

5)(a) Siano α, β, γ, δ quattro angoli minori di $180°$. Si dimostri che

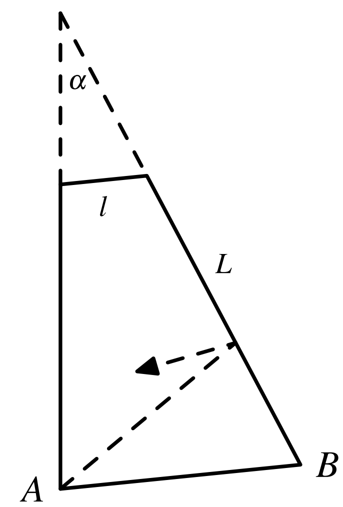
$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma+\sin\delta\le 4\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{4}.$$

(b) Utilizzando la relazione precedente, si dimostri che la somma dei seni degli angoli interni di un triangolo è sempre minore o eguale a $3\sqrt{3}/2$.

6) Si consideri un biliardo di forma trapezoidale (vedi figura) con $\alpha=30°$, $l=1\,\mathrm{m}$, $L=5\,\mathrm{m}$ e si supponga di lanciare una bilia dal punto A. Si provi che la bilia, qualunque sia la direzione iniziale, effettua solo un numero finito di rimbalzi prima di battere sulla sponda AB.Si determini anche il numero massimo di tali rimbalzi.

Si studi infine il caso in cui α è un angolo generico e L/l è sufficientemente grande.

(Si consideri il biliardo privo di attrito, la palla puntiforme e si supponga che il rimbalzo sulle sponde obbedisca alla legge di riflessione della luce).



Anno accademico 1987–1988

1) Siano assegnati due numeri reali positivi non nulli r e p, con $r < p$.
Tra tutti i quadrilateri convessi di perimetro p, aventi la somma delle lunghezze di una coppia di lati consecutivi uguale ad r, si determini quello di area massima.

2) Siano p, q, r, tre numeri reali tali che il polinomio

$$A(x) = x^3 + px^2 + qx + r$$

abbia tre radici reali.
Determinare tre numeri reali a, b, c, espressi in funzione di p, q, r soltanto, in modo che il polinomio

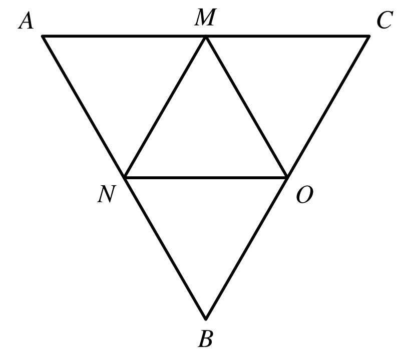
$$B(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

abbia per radici i quadrati delle radici di A.

3) Sia dato un segmento AB nel piano. Si consideri il luogo L dei punti del piano che vedono il segmento AB sotto un angolo di 60°.
Si scelga P in L e si scelgano due punti C e D rispettivamente interni ai lati BP e AP del triangolo ABP, in modo che $\overline{AD} = \overline{BC}$.
Si costruisca il triangolo equilatero CDQ di base CD, esterno al quadrilatero $ABCD$.
Si studi, al variare di P in L e di C, D, secondo le condizioni indicate sopra, il luogo dei punti del piano descritto dal punto Q.

4) Un punto (x, y) del piano cartesiano si dirà *razionale* se x e y sono numeri razionali.
Data una qualunque circonferenza del piano cartesiano avente centro razionale, si provi che se essa contiene un punto razionale, allora contiene infiniti punti razionali.

5) Nella figura è rappresentato lo sviluppo delle facce di un tetraedro regolare dello spazio.



Siano P, Q, R, tre punti distinti del tetraedro corrispondenti, nello sviluppo, rispettivamente ad un punto interno al segmento MN, un punto interno al segmento MO ed un punto interno al triangolo MOC.
Sia α un piano contenente P, Q, R.
Si determini, nello sviluppo piano, l'intersezione tra il piano α e le facce del tetraedro.

6) Tizio si trova nella sua abitazione e deve prendere un treno che parte dalla stazione esattamente tra mezz'ora. Sotto la sua abitazione c'è la fermata di un autobus che lo porta alla stazione in 20 minuti. A 5 minuti di cammino vi è una fermata da cui passano altre due linee di autobus che lo possono portare alla stazione in 18 minuti.
Tizio non conosce l'orario di passaggio degli autobus, ma sa che su ognuna delle linee, gli autobus passano ogni quarto d'ora.
Quale strategia conviene a Tizio per avere maggiore probabilità di prendere il treno?

Anno accademico 1988–1989

1) Siano A, B, C, D, quattro punti distinti assegnati nello spazio. Determinare una condizione necessaria e sufficiente affinché ogni superficie sferica che passa per A e B intersechi ogni superficie sferica che passa per C e D.

2) Un ragazzo ha concluso la terza media, sa che sei bravo in matematica e ti chiede

   (a) cosa è un *poligono piano*,

   (b) cosa è l'*area di un poligono piano*.

   Esponi le definizioni richieste con rigore, chiarezza e concisione (max. 12 righe).
   Volendo dare le stesse definizioni a un livello scolastico più avanzato, quali precisazioni occorrerebbe fare? (assiomi e definizioni precedenti, enunciati di eventuali teoremi, ...).

3) Si considerino i numeri naturali 1, 11, 111, 1111, ... e, in generale, si indichi con α_n il numero che si ottiene giustapponendo n cifre uguali a 1.

   (a) Si provi che se α_n è un numero primo allora n è primo.

   (b) Si provi che, assegnato comunque un numero naturale r, non divisibile né per 2 né per 5, si può trovare un α_n che è multiplo di r.

   (c) Si scriva un algoritmo o un programma per calcolatore (in un qualunque linguaggio di programmazione) che, a partire da r, calcoli il minimo n per cui vale la (b).

4) Sia assegnato su un piano un numero n arbitrario di triangoli con la proprietà che tre qualsiasi di essi abbiano almeno un punto in comune. Si dimostri che tutti i triangoli assegnati contengono uno stesso punto.
   Come occorre modificare l'ipotesi perché la stessa conclusione valga per un numero finito di triangoli nello spazio?

5) Sia $p(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ un polinomio con coefficienti a, b, c, d, e, numeri razionali. Si supponga che, per ogni intero m maggiore di un certo m_0, il numero $p(m)$ sia intero. Si dimostri che allora $24 \cdot a$ è un numero intero.
   Si generalizzi questo risultato a polinomi $p(x)$ con coefficienti razionali di grado qualsiasi.

6) Un laboratorio deve organizzare il trasferimento di 10 m^3 di scorie radioattive liquide. Occorre ordinare un numero n di contenitori, identici, che possano contenere tali scorie e garantire un trasporto sicuro.
   Si stima che il costo di ciascuno di tali contenitori sia $16 \cdot V^2$ milioni di lire, ove V è il volume (in m^3) di scorie che ciascuno di essi può contenere; il costo del riempimento di ciascun contenitore risulta essere di un milione di lire, indipendentemente dalla sua capienza.

   (a) Quanti contenitori e di quale volume dovrà ordinare il laboratorio per spendere il meno possibile?

   (b) Al momento di effettuare l'ordine si viene a sapere che la ditta fornitrice pratica un piccolo sconto, sul prezzo dei contenitori ordinati, di k per cento, con k intero, se il loro numero uguaglia o supera le 50 unità (il costo del riempimento rimane inalterato).
   Qual è il più piccolo k per il quale risulta conveniente modificare l'ordine, e perché?

Anno accademico 1989–1990

1) Per $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ ed $n = 1, 2, 3, \ldots$, si ponga:

$$F_n(x) = 1 - \sin x + \sin^2 x - \cdots + (-1)^n \sin^n x.$$

Provare che

(a) per $0 \le \alpha \le \frac{1}{2}$, l'equazione $F_{2k}(x) = \alpha$ non ha soluzioni qualunque sia k naturale;

(b) per $\frac{1}{2} < \alpha \le 1$, esiste un numero naturale k^* tale che, per ogni $k > k^*$, l'equazione $F_{2k}(x) = \alpha$ ha almeno due soluzioni.

2) Sia S una superficie sferica di centro O. Per ogni $P \in S$, sia $f_P : S \to S$ l'applicazione che ad ogni $Q \in S$ associa il punto $f_P(Q)$ simmetrico di Q rispetto all'asse OP. Dimostrare che:

(a) per ogni $P \in S$, f_P è la composizione di due simmetrie rispetto a piani;

(b) per ogni $P, X, Y \in S$, la distanza tra X e Y è uguale alla distanza fra $f_P(X)$ e $f_P(Y)$.

(c) per ogni $P, Q, X \in S$, $f_P(f_Q(X)) = f_{f_P(Q)}(f_P(X))$.

3) Trovare le soluzioni reali del sistema:

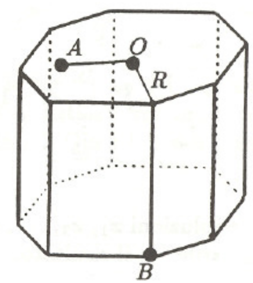
$$\begin{cases} 2y + x - x^2 - y^2 = 0 \\ z - x + y - y(x+z) = 0 \\ -2y + z - y^2 - z^2 = 0. \end{cases}$$

4) Consideriamo la legge che ad ogni punto $P = (x, y)$ del piano cartesiano fa corrispondere il punto $f(P)$ dello stesso piano, definito da:

$$\begin{cases} P & \text{se } \overline{OP} \le 1, \\ (x/\overline{OP}, y/\overline{OP}) & \text{se } \overline{OP} \ge 1, \end{cases}$$

dove $O = (0,0)$ e $\overline{OP}$ indica la distanza da O a P.
Provare che, per ogni coppia di punti P, Q, la distanza fra $f(P)$ e $f(Q)$ non supera la distanza fra P e Q.

5) Sia S la superficie di un prisma, a base ottagonale regolare, inscritto in un cilindro circolare retto di raggio R e altezza $h = 3R\sin(\pi/8)$. Siano A e B due punti di S come in figura, con $OA = \frac{R}{\sqrt{2}}$.



Determinare la lunghezza del minimo percorso su S tra A e B.

6) Sia $f(x)$ una funzione a valori reali, definita sulla semiretta reale $\{x \ge 0\}$. Supponiamo che:

(a) $f(x)$ sia derivabile con derivata f' continua;

(b) $f(0) = 0$;

(c) per ogni $x \ge 1$ risulti
$$0 < f(x) \le x f'(x).$$

Provare che l'equazione $f(x) = k$ ha almeno una soluzione $x \ge 0$, per ogni $k \ge 0$.

Anno accademico 1990–1991

1) Considerare nello spazio euclideo nove punti distinti a coordinate intere. Dimostrare che ne esistono due tali che il segmento che li congiunge contiene almeno un punto interno (cioè distinto dagli estremi) a coordinate intere.

2) Sia P un poligono semplice (cioè tale che da ogni vertice escono esattamente due lati) non necessariamente convesso, con almeno 4 vertici. Supponiamo che P abbia al più un vertice concavo.
È vero che esistono due vertici non consecutivi con la proprietà che il segmento che li congiunge è contenuto in P? Se sí dimostrarlo, se no trovare un controesempio.

3) Dato il sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_{100} = 5050 \\ x_2^2 - x_1^2 = 3 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x_k^2 - x_{k-1}^2 = 2k - 1 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x_{100}^2 - x_{99}^2 = 199 \end{cases}$$

trovare tutte le soluzioni $x_1, x_2, \ldots, x_{100}$, con $x_k \geq 0$, $k = 1, 2, \ldots, 100$. Giustificare il risultato.

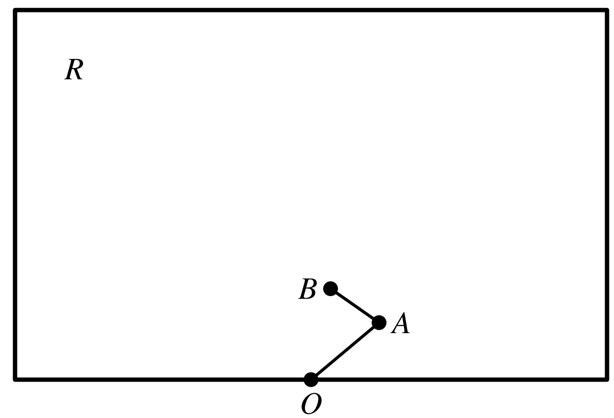
4) Sia dato il polinomio $F(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ con coefficienti a_i interi. Supponiamo che esistano quattro interi distinti, a, b, c, d, tali che $F(a) = F(b) = F(c) = F(d) = 7$. Dimostrare che non esiste alcun intero k tale che $F(k) = 12$.

5) Trovare il più piccolo numero $\alpha > 1$ tale che risulti:

$$\frac{\alpha + \sin x}{\alpha + \sin y} \leq e^{y-x}$$

per ogni $x \leq y$.

6) Si consideri un rettangolo R di misure 8×5 metri. Nel punto di mezzo O di un lato è incernierato un braccio articolato, della lunghezza totale di due metri, formato da due segmenti OA e AB (vedi figura). Il braccio può muoversi soltanto all'interno di R. Più precisamente il segmento OA può ruotare intorno al punto fisso O e, per ogni posizione assunta da A, il segmento AB può ruotare intorno al punto A; naturalmente, durante il movimento, il braccio deve restare in R.



È possibile scegliere le lunghezze dei segmenti in modo tale che ogni punto di R a distanza minore o uguale a 2 metri da O sia raggiunto da B? Giustificare la risposta.

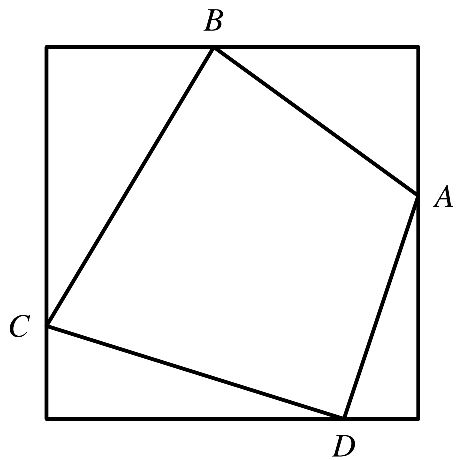
Anno accademico 1991–1992

1) Provare che, per ogni numero intero $n \geq 2$, si ha

$$\sqrt[n]{n!} < \frac{n+1}{2},$$

e che $\frac{n+1}{2}$ non è mai un multiplo intero di $\sqrt[n]{n!}$.

2) Fra tutti i quadrilateri convessi inscritti in un quadrato, in modo che ogni lato del quadrato contenga almeno un vertice del quadrilatero, si determinino quelli aventi minimo e massimo perimetro.



3) Trovare il più piccolo numero intero $N_0 \geq 1$ con la proprietà che N_0+1 e $2N_0+1$ siano entrambi quadrati perfetti.
Mostrare poi che ogni intero N con questa proprietà è un multiplo di N_0.

4) Su un treno, inizialmente senza passeggeri e formato da n carrozze, salgono k viaggiatori disponendosi in modo casuale e indipendente l'uno dall'altro. Qual è la probabilità che solo tre carrozze siano occupate da almeno un viaggiatore?

5) Costruire un polinomio (a coefficienti reali)

$$P(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$$

verificante le proprietà:

(i) $P(x,y) = 0$ soltanto per $x = y = 0$,

(ii) se x e y sono due numeri interi allora anche $P(x,y)$ è un intero.

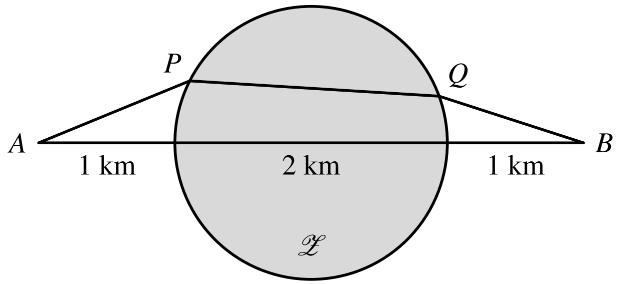
Determinare poi il massimo della quantità

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

al variare di P nell'insieme dei polinomi soddisfacenti le proprietà precedenti.

6) Ci si propone di congiungere con una strada due località A e B che distano 4 km, fra le quali si trova una zona $\mathcal{Z}$ costituita da terreno pietroso ed avente la forma di un cerchio con centro nel punto medio di AB e raggio di 1 km.

(a) Sapendo che, a parità di lunghezza, il costo di costruzione della strada nella zona pietrosa è λ volte (λ numero reale maggiore di 1) quello relativo alla zona circostante, determinare due punti P, Q sul bordo di $\mathcal{Z}$ in modo tale che il percorso $APQB$ (vedi figura) sia il più economico possibile.



(b) Discutere poi il caso più generale in cui si considerano percorsi formati, oltre che da tratti rettilinei, anche da eventuali tratti curvilinei contenuti nel bordo di $\mathcal{Z}$ (dove il costo unitario di costruzione si può considerare lo stesso che nella zona esterna a $\mathcal{Z}$).

Anno accademico 1992/93

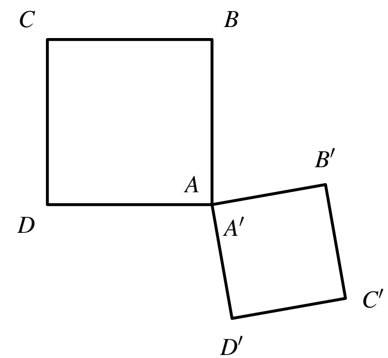
1. E' assegnata una legge che ad od ogni coppia di interi x,y associa un intero $x \diamond y$ in modo che

$$x \diamond (y+z) = y \diamond x + z \diamond x$$

per tutti gli interi x, y, z. Si dimostri che

$$x \diamond y = xy(1 \diamond 1).$$

2. In un piano, due quadrati $ABCD$ e $A'B'C'D'$ sono disposti come in figura. Si dimostri che la retta passante per A e perpendicolare a DD' incontra il segmento BB' nel punto medio.



3. Verificare che la somma delle quarte potenze di due numeri reali di assegnato prodotto $p > 0$

a) decresce se decresce il valore assoluto della differenza dei due numeri;

b) raggiunge il valore minimo quando i due numeri sono uguali.

4. Mostrare che, per ogni intero positivo fissato k, esiste almeno un intero n tale che
$$100 \leq n^k + n \leq 101 + kn^{k-1} \,.$$

5. Sia $F(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ un polinomio di terzo grado con coefficienti interi. Si dimostri che

i) se p/q, con p, q, interi primi tra loro e $q \neq 0$, è una radice del polinomio, per ogni intero m il numero $F(m)$ è divisibile per $p - mq$;

ii) se esistono due interi x_1 e x_2 tali che $F(x_1) = 1$, $F(x_2) = -1$, e che $|x_1 - x_2| > 2$, allora $F(x)$ non ha radici razionali.

6.

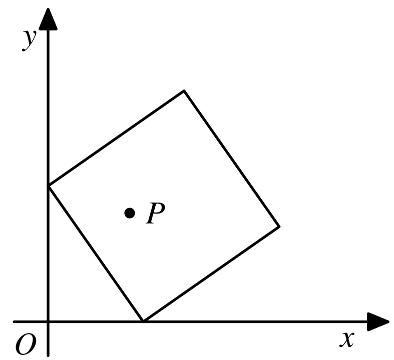
1) Dimostrare che, presi comunque tre vertici di un cubo, il triangolo da essi individuato è rettangolo oppure equilatero.

2) Calcolare la probabilità che tre distinti vertici del cubo, scelti a caso, individuino un triangolo rettangolo (la probabilità è il rapporto tra il numero di casi favorevoli e il numero di casi possibili).

3) Si escludano tre vertici del cubo, e si considerino "ammissibili" i restanti cinque. Si indichi con P la probabilità che tre vertici ammissibili del cubo, scelti a caso,, individuino un triangolo rettangolo. Stabilire quanti valori può assumere P al variare dei tre vertici esclusi all'inizio.

Anno accademico 1993/94

1. Nel piano cartesiano riferito a coordinate ortogonali, un quadrato striscia in guisa che due suoi vertici consecutivi appartengano rispettivamente all'asse delle ascisse non negative ed a quello delle ordinate non negative.
Descrivere analiticamente la traiettoria di un punto P interno al quadrato e rigidamente ancorato ad esso. Caratterizzare le posizioni di P nel quadrato per le quali la traiettoria appartiene ad una circonferenza, oppure è un segmento di retta.



2. In un piano cartesiano un oggetto puntiforme parte dal punto $(0, 2n)$ (con n intero positivo) e scende fino all'asse delle ascisse compiendo $2n$ passi, con la seguente regola: se prima di compiere un passo si trova nel punto di coordinate intere (k, l), può recarsi o in $(k-1, l-1)$ o in $(k+1, l-1)$ con uguale probabilità. Le mosse eseguite nei diversi passi sono indipendenti.
Si indichi con $p_n(k)$ la probabilità che dopo $2n$ passi l'oggetto si trovi in $(k, 0)$.

i) Calcolare $p_n(k)$.

ii) Mostrare che $2\,p_n(2) \geq 1/(2n+1)$.

3. Dati tre numeri interi $p > 2$, $q > 2$, $r > 2$ si consideri un parallelepipedo di legno tale che i tre spigoli uscenti da un vertice abbiano lunghezza p, q, r. Dopo aver dipinto la superficie esterna del parallelepipedo, questo viene tagliato, mediante sezioni parallele alle facce, in cubetti aventi spigoli di lunghezza 1. Ovviamente alcuni dei cubetti sono parzialmente colorati, mentre altri non sono colorati affatto.
Si dimostri che esiste solo un numero finito di terne (p,q,r) per ciascuna delle quali il numero dei cubetti parzialmente colorati è uguale al numero di quelli che non sono colorati affatto.

4. Data una circonferenza Γ, un arco circolare γ congiunge due punti distinti di Γ ed è interno al cerchio C racchiuso da Γ. Dimostrare che, se le due regioni in cui γ divide C hanno aree uguali, la lunghezza di γ supera il diametro di Γ.

5. Sia n un intero positivo pari. Mostrare che si possono trovare (in modo non necessariamente unico) n numeri reali $a_1 > a_2 > \ldots > a_n > 0$ tali che

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 2n \\ (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots + (a_{n-1} - a_n) = n\,. \end{cases}$$

Mostrare poi che questo non è possibile se si impone la condizione ulteriore

$$a_1 - a_n \leq n\,.$$

6. Per ogni intero positivo n, si indichi con $\theta(n)$ il numero reale, compreso fra 0 e 2π, tale che

$$\theta(n) = 3n \pmod{2\pi}$$

cioè tale che $\theta(n) - 3n$ sia un multiplo intero di 2π.

i) Mostrare che $0 \leq \theta(n) \leq \pi/2$ per infiniti valori di n (si può usare il fatto che $3.14 < \pi < 3.15$).

ii) Mostrare che $\theta(n) \neq \theta(m)$ se $n \neq m$.

Anno accademico 1994/95

1. Sia X un insieme di n elementi, dove n è un numero pari e sia k un numero positivo. Diciamo che una funzione f da X in X ha molteplicità k se per ogni $a \in X$ l'insieme $\{x \mid f(x) = f(a)\}$ ha k elementi.
Sono di più le funzioni di molteplicità 1 o quelle di molteplicità 2?

2. Vi sono 4 città collegate a due a due da 6 strade che non si intersecano (cioè ogni coppia di città è collegata da una sola strada). Tutte le strade sono aperte al traffico con la stessa probabilità $p = 1/2$.
Determinare la probabilità che in un determinato istante partendo da una qualsiasi città si possa arrivare ad ogni altra città.

3. Mostrare che 41 non può essere espresso come differenza di una potenza di 2 e di una potenza di 3, cioè che non può sussistere nessuna delle due uguaglianze seguenti:

$$41 = 2^n - 3^m\,, \qquad 41 = 3^n - 2^m$$

con n, m interi positivi.

4. Sia P un punto interno ad un triangolo equilatero. Per ogni retta passante per P, siano X, Y, i due punti di intersezione tra la retta e i lati del triangolo. Determinare, per ogni punto P, la retta o le rette che rendono minimo il prodotto

$$PX \cdot PY \tag{1}$$

5. Consideriamo un triangolo e dividiamo i suoi lati in n parti uguali mediante $n-1$ punti su ciascun lato. Congiungiamo ogni vertice con i punti così ottenuti sul lato opposto. Si dimostri che se n è primo maggiore di 2 allora non esistono punti appartenenti simultaneamente a tre dei segmenti così costruiti.

6. Siano $a_1, a_2, \ldots, a_n$ numeri reali e siano $b_1, b_2, \ldots, b_n$ tali che

$$b_i = \max_{1 \le j \le n} (i \cdot j - a_j), \qquad \text{per ogni } i = 1, 2, \ldots, n.$$

Se allo stesso modo si costruiscono $c_1, c_2, \ldots, c_n$ a partire da $b_1, b_2, \ldots, b_n$ e poi $d_1, d_2, \ldots, d_n$ a partire da $c_1, c_2, \ldots, c_n$, si dimostri che

$$\begin{aligned} c_i &\le a_i \qquad \text{per ogni } i = 1, 2, \ldots, n, \\ d_i &= b_i \qquad \text{per ogni } i = 1, 2, \ldots, n. \end{aligned}$$

Anno accademico 1995/96

1. Siano C_1, C_2 due circonferenze di centri e raggi rispettivi O_1, O_2 e r_1, r_2. Dato un punto P esterno alle due circonferenze si considerino le tangenti per P alle due circonferenze e siano M_1, N_1 e M_2, N_2 i rispettivi punti di contatto. Si determini il luogo dei punti tali che $PM_1{}^2 + PM_2{}^2 = 1$.

Si discutano i punti P per cui $PM_1{}^2 + PM_2{}^2$ è minima.

2. Dati quattro punti distinti nel piano dimostrare che è sempre possibile sceglierne tre che determinino un angolo inferiore o uguale a 45°. In generale dati n punti dimostrare che se ne possono scegliere 3 che determinino un angolo inferiore o uguale a $180°/n$.

3. Dimostrare che, se a, b, c sono interi consecutivi, allora $a^3 + b^3 + c^3$ è multiplo di 9.

4. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione non negativa, con concavità rivolta verso l'alto, derivabile e tale che $f'(0) > 0$ e $f(x) = f(2 - x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.
Dimostrare che

$$\int_0^2 f(x)\, dx \le 2f(1) - \frac{[f(1) - f(0)]^2}{f'(0)} \tag{$*$}$$

Provare che se la condizione $f(x) = f(2 - x)$ non è verificata, la diseguaglianza (*) può non valere.

5. Dato $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; |x|^{2a} + |y|^{2a} \le 1\right\}$ ove $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, si consideri al variare di $k \ge 0$ la classe C degli insiemi

$$B_k = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; |x| + |y| \le k\right\}$$

contenuti in A.

Determinare k in funzione di A in modo che B_k abbia area massima tra gli insiemi di C.

6. Siano a, b numeri reali non negativi tali che $b^2+b^6 \leq a^2-a^6$. Dimostrare che allora risulta:

1) $a \leq 1$;

1) $b < 2/3$.

Anno accademico 1996/97

1. Dato un quadrato $ABCD$ di lato unitario, determinare la massima costante α e la minima costante β per cui si ha

$$\alpha \leq PA+PB+PC+PD \leq \beta$$

per ogni punto P contenuto nel quadrato.

2. Il prezzo di mercato P di una certa merce dipende dalla quantità totale Q venduta, secondo la legge $P = a - bQ$, dove a e b sono due assegnati valori positivi. Sul mercato operano solo due produttori, in concorrenza fra loro.
A regime, cioè quando nessuno dei due ha interesse a cambiare la quantità di merce da lui venduta, i due produttori vendono rispettivamente delle quantità X e Y di merce. Supponendo che la produzione avvenga a costo zero, determinare X e Y.

3. Sia $\mathscr{P}$ un poliedro e siano F il numero delle facce, S il numero degli spigoli e V il numero dei vertici di $\mathscr{P}$. Si assuma che per $\mathscr{P}$ valga la Formula di Eulero $F-S+V=2$.

a) Provare che $\mathscr{P}$ ha qualche faccia con meno di 6 lati.

b) Detto k il numero delle facce con meno di 6 lati, determinare il minimo valore possibile per k.

4. Sia $f(t)$ una funzione iniettiva definita sui numeri reali positivi. Dati $x>0$ e $y>0$, chiamiamo $f-$Media di x e y l'unico numero z tale che

$$f(z) = \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

Mostrare che la media geometrica $\sqrt{x \cdot y}$ e quella armonica $2xy/(x+y)$ sono delle $f-$Medie.
Fra le funzioni convesse f, individuare quelle per le quali la $f-$Media risulta minore o uguale della media aritmetica. [Si ricorda che un insieme S di punti del piano è convesso se, per ogni coppia di punti A, B di S, l'intero segmento di estremi A e B è contenuto in S; e che una funzione f è convessa se il suo sopra-grafico $\{(x,y) \mid y > f(x)\}$ è un insieme convesso.]

5. Dato un triangolo nel piano euclideo si indichi con O il centro della circonferenza in esso inscritta e con Γ la circonferenza passante per O e per due qualunque dei vertici del triangolo.
Provare che il centro di Γ si trova sulla circonferenza circoscritta al triangolo.

6. A partire da un cerchio C_1 tracciare successivamente: un triangolo equilatero P_1 inscritto in C_1, il cerchio C_2 inscritto in P_1, un quadrato P_2 inscritto in C_2, il cerchio C_3 inscritto in P_2, un pentagono regolare P_3 inscritto in C_3, e così via, ottenendo in tal modo una successione

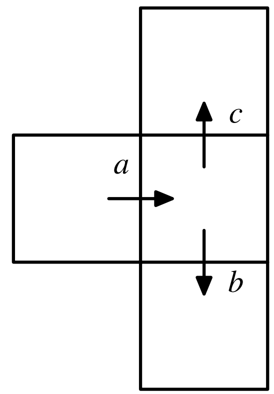
$$C_1 \supset P_1 \supset C_2 \supset P_2 \supset \ldots C_n \supset P_n \supset C_{n+1} \supset P_{n+1} \ldots$$

di cerchi e poligoni regolari concentrici, dove P_n ha $n+2$ lati. Mostrare che l'intersezione di tutti i cerchi C_n è un cerchio di raggio positivo.
Il candidato può ricorrere alla diseguaglianza, valida per ogni intero $k \geq 1$:

$$\frac{1}{(k+1)^2} + \frac{1}{(k+2)^2} + \frac{1}{(k+3)^2} + \ldots < \frac{1}{k} .$$

Anno accademico 1997/98

1. Un cubo è appoggiato su un piano. Un bambino lo muove n volte, facendolo rotolare (senza strisciare) ogni volta su uno dei lati della faccia su cui è appoggiato. Si suppone che la prima mossa sia casuale e che, ad ogni mossa successiva, il bambino scelga casualmente di far rotolare il cubo su uno dei due lati contigui al lato scelto in precedenza (Vedi figura: dopo aver rotolato sul lato a, il cubo rotolerà su b oppure su c).



   (a) Dimostrare che se il cubo è tornato nella posizione iniziale (non necessariamente appoggiato sulla stessa faccia) allora n è divisibile per 4.

   (b) Calcolare la probabilità $p(n)$ che il cubo sia tornato nella posizione iniziale.

(c) Dimostrare che

$$\frac{5}{16k} - \frac{1}{16k^2} \leq p(4k) \leq \frac{1}{3k} - \frac{1}{12k^2}, \qquad k \geq 1.$$

2. Si dice che un punto P esterno a una circonferenza C "vede" la circonferenza sotto un angolo α se l'angolo (contenente C) compreso tra le tangenti a C condotte da P è uguale a a α.

   (a) Data una circonferenza C e un angolo A di ampiezza $\alpha > 0$, costruire il luogo dei punti del piano che vedono C sotto l'angolo α.

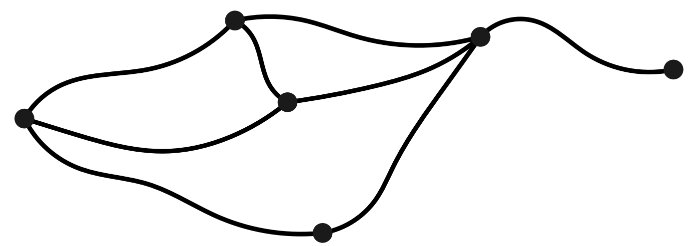
   (b) Date due circonferenze C, C' esterne l'una all'altra, di centri O, O' e raggi R, R' rispettivamente, costruire il luogo L dei punti del piano che vedono le due circonferenze sotto lo stesso angolo.

   (c) Dire (in termini dei dati) in che intervallo varia l'angolo di visuale al variare di P in L e quali sono i punti in L dove tale angolo è minimo e massimo.

3. Si determini, al variare dei parametri α e β interi pari e positivi, il numero di soluzioni reali dell'equazione

$$(\alpha + \beta)x \sin(\pi x) = x^2 + \alpha\beta$$

4. Sia dato un insieme finito Ω di punti distinti del piano tra loro collegati da un certo numero di percorsi elementari congiungenti coppie di vertici distinti come esemplificato nel disegno seguente:



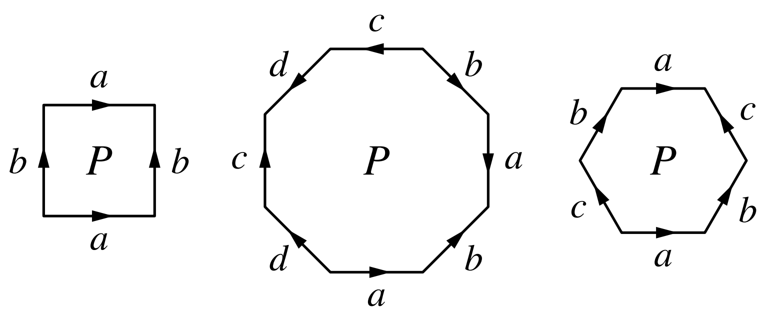
Dati due punti A e B di Ω un *cammino* che *parte da* A e *termina in* B è una successione di vertici v_0, v_1, …, v_n, appartenenti ad Ω tali che $v_0 = A$, $v_n = B$, e tale che v_i e v_{i+1} sono congiunti da un percorso elementare; in questo caso si dice che n è la lunghezza del cammino.
I punti, i percorsi elementari e i cammini soddisfano le seguenti proprietà:

- I percorsi elementari non si incontrano fuori dai punti di Ω.
- Dati due qualsiasi punti $A, B \in \Omega$, esiste almeno un cammino che parte da A e termina in B.
- C'è un particolare punto $X \in \Omega$ per il quale esiste un cammino che parte e termina in X e che ha lunghezza dispari.

Si dimostri allora che esiste N intero positivo tale che, scelti due qualsiasi punti A e B di Ω, esiste un cammino di lunghezza N che parte da A e termina in B.

5. In ognuna delle tre figure seguenti è disegnato un poligono P. Si immagini che, in ognuno dei tre casi, il poligono P sia costituito da materiale elastico e flessibile. Si chiede di disegnare o descrivere sinteticamente la figura S che, in ognuno dei tre casi, si ottiene facendo combaciare le

frecce dei lati che hanno la stessa lettera, e di illustrare come questi lati appaiono in S.



6. Si determinino tutti gli interi positivi n che sono divisibili per tutti gli interi positivi minori o uguali a $\sqrt{n}$.
(Suggerimento: considerare il minimo comune multiplo dei numeri minori o uguali a $\sqrt{n}$).

Anno accademico 1998–1999

1. Dato un quadrato Q di lato unitario siano P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 dei punti interni a Q. Sia d_{ij} la distanza fra P_i e P_j.

   (a) Si dimostri che almeno una delle distanze d_{ij} è minore di $\sqrt{2}/2$.

   (b) Si può sostituire $\sqrt{2}/2$ con un numero più piccolo?

2. Quanti sono i riordinamenti distinti delle lettere della parola

   MATEMATICA

   tali che

   (a) vi siano due M consecutive,

   (b) non vi siano due vocali consecutive,

   (c) siano verificate entrambe le condizioni precedenti?

3. Sia $p(x) = a_d x^d + \ldots + a_0$ un polinomio a coefficienti interi. Per ogni intero n, sia $m = p(n)$.

   (a) Dimostrare che per ogni intero k il numero $p(n+mk)$ è divisibile per m.

   (b) Descrivere i polinomi $p(x)$ tali che, per ogni n, $p(n)$ è un numero primo.

4. Una circonferenza e una parabola sono tracciate sul piano. Sia d il numero di regioni in cui il piano viene suddiviso da queste due curve.

(a) Si dica quali sono il valore minimo e il valore massimo di d.

(b) Si forniscano degli esempi in cui il minimo e il massimo vengono assunti.

(c) Cosa si può dire se in luogo di una parabola si considera il grafico di un polinomio $y = P(x)$ di grado n?

5. Date due circonferenze non appartenenti allo stesso piano e che si intersecano in due punti, si dimostri che esiste una superficie sferica che contiene le due circonferenze. Cosa si può dire se le circonferenze sono tangenti? o se non hanno punti in comune?

6. Dati due interi pari m e n con $m < n$, dimostrare che se k è un numero reale tale che
$$k > \frac{m^2+n^2}{2},$$
allora il polinomio
$$p(x) = (x^2+k)(x-m)(x-n)+1$$
ha due radici reali e due radici non reali.

7. Maria lancia 7 volte una moneta, Davide la lancia 6 volte. Qual è la probabilità che Maria ottenga più “teste” di Davide?

Anno accademico 1999–2000

1. Siano a, b, c numeri razionali tali che
$$a^3+2b^3+4c^3 = 8abc\,.$$
Si mostri che $a = b = c = 0$.

2. Sia $n \geq 1$ un intero. Diciamo che un quadrato è n-divisibile se è possibile piastrellarlo con n quadrati, non necessariamente delle stesse dimensioni. Per quali interi $n \geq 1$ il quadrato è n-divisibile ?

3. Stefano lancia $n+1$ monete e tra queste ne sceglie n in modo da massimizzare il numero di teste. Barbara lancia n monete. Chi ottiene un maggior numero di teste vince e, nel caso di parità, si assegna la vittoria a Barbara. Quale è la probabilità di vittoria di Stefano?

4. Siano p, q, r numeri reali. Si sa che le tre radici dell’equazione
$$x^3-px^2+qx+r = 0$$
sono strettamente positive. Quale condizione su p, q e r garantisce l’esistenza di un triangolo avente lati di lunghezza pari alle tre radici ?

5. Sia T un triangolo avente lati di lunghezza a, b, c e siano h_a, h_b, h_c le altezze rispettive. Indicata con A l’area del triangolo, si mostri che se vale l’equazione
$$6A = a\,h_b+b\,h_c+c\,h_a$$
allora T è un triangolo equilatero.

Anno accademico 2000–2001

1. Siano $p > 1$, $q > 1$ numeri interi e sia $x > 0$ un numero reale.

   (a) Quale condizione su p e q garantisce che se x^p e x^q sono numeri interi allora x stesso è intero?

   (b) Quale condizione su p e q garantisce che se x^p e x^q sono numeri razionali allora x stesso è razionale?

2. Siano dati due punti A e B su una circonferenza. Per ogni punto C sulla circonferenza sia P il punto della spezzata ACB che ne dimezza la lunghezza. Si descriva il luogo dei punti P al variare di C.

3. (a) Sia I l'intervallo chiuso $[0,1]$. Determinare tutte le funzioni surgettive $f : I \to I$ che non aumentano le distanze, ovvero tali che $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$ per ogni $x, y \in I$

   (b) Sia T il sottoinsieme del piano costituito dai 3 lati (vertici compresi) di un triangolo scaleno. Determinare tutte le funzioni surgettive $f : T \to T$ tali che $\operatorname{dist}(f(P), f(Q)) \leq \operatorname{dist}(P,Q)$ per ogni $P, Q \in T$, dove $\operatorname{dist}(P,Q)$ indica la distanza tra due generici punti P e Q del piano.

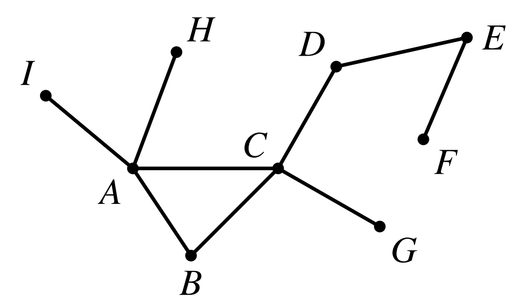
4. Una certa quantità, Q, che può assumere valori sia positivi sia negativi, a intervalli regolari di tempo si incrementa di una unità con probabilità 1/4, si decrementa di una unità con probabilità 1/4 o resta invariata con probabilità 2/4. Supponendo che Q sia inizialmente nulla, si determini una formula per la probabilità $P_{n,k}$ che dopo n intervalli di tempo Q valga k unità (quindi $P_{1,-1} = P_{1,1} = 1/4$, $P_{1,0} = 2/4$).

5. Elena e Giulia hanno inventato il seguente gioco: disegnato su un foglio un insieme di punti a tre a tre non allineati collegati da alcuni segmenti che non si intersecano se non negli estremi (vedi figura, dove i punti sono etichettati con A, B, C, ...), il loro gioco consiste nel modificare l'insieme dei segmenti, scegliendo a turno una e una sola delle seguenti mosse:

   (a) se tre segmenti formano un triangolo, essi possono essere eliminati tutti e 3 (per esempio i segmenti AB, BC, CA in figura);

   (b) se due segmenti sono incidenti in uno stesso punto ma non formano un triangolo perché manca il terzo lato, essi possono essere cancellati e sostituiti con il lato mancante (per esempio i segmenti DE e EF in figura vengono cancellati e viene aggiunto il segmento FD).

   Perde chi si trova per prima nella situazione di non poter fare alcuna mossa. Elena muove per prima.



   Valeria, che li ha guardati giocare, osserva che l'esito del gioco è determinato completamente dall'insieme iniziale dei segmenti e non dipende affatto dalla strategia di gioco di Elena o di Giulia. Spiegare il motivo dell'osservazione di Valeria e individuare una regola semplice che consente di determinare in anticipo la vincitrice del gioco.

6. Sulla lavagna sono scritti $2n$ numeri positivi, divisi in due gruppi di n numeri ciascuno, nel modo seguente:

$$b_1 \le b_2 \le \cdots \le b_n, \qquad h_1 \ge h_2 \ge \cdots \ge h_n\,.$$

Jacopo e Niccolò devono disegnare n rettangoli a testa, indipendentemente l'uno dall'altro e ciascuno sul proprio foglio, in modo che ogni numero b_i¡ venga abbinato ad uno ed un sol numero h_j per formare un rettangolo di base b_i e altezza h_j.

Jacopo, per pigrizia, abbina b_1 ad h_1, b_2 ad h_2 e così via fino a b_n e h_n; Niccolò, che ha più fantasia, sceglie invece un diverso abbinamento basialtezze. Si dimostri che:

(a) per ogni rettangolo R di Jacopo esiste un rettangolo di Niccolò che ha contemporaneamente base e altezza maggiori o uguali di quelle di R;

(b) indipendentemente dall'abbinamento scelto da Niccolò, la somma delle aree dei rettangoli di Jacopo è minore o uguale di quella relativa ai rettangoli di Niccolò.

Anno accademico 2001–2002

1. Si dimostri che in un triangolo ogni bisettrice è minore della media geometrica dei due lati adiacenti.

2. Calcolare la probabilità che scrivendo a caso 3 lettere A, 3 lettere B e 3 lettere C nelle caselle di una scacchiera 3 x 3, due lettere uguali non stiano mai sulla stessa riga o sulla stessa colonna.

3. Determinare le soluzioni intere positive x, y, z, p dell'equazione

$$x^p + y^p = p^z$$

con p primo.

4. Sia G il punto di intersezione delle due mediane AH e BK del triangolo ABC. Sapendo che nel quadrilatero $GHCK$ è inscritto un cerchio di raggio uguale a quello del cerchio inscritto nel triangolo ABG, trovare i rapporti

$$\frac{AB}{BC}, \frac{BC}{CA}, \frac{CA}{AB}.$$

5. Dato il polinomio

$$p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0\,,$$

si dimostri che se esiste un numero reale $M \ge 0$ tale che

$$|a_{n-1}| \le M\,, \ldots, |a_0| \le M\,,$$

allora ogni radice x_0 di $p(x)$ verifica $|x_0| \le M + 1$.

6. Un sistema di lampadine, connesse fra loro e dotate ciascuna di un interruttore, ha la proprietà che premendo l'interruttore di una lampadina si cambia il suo stato e quello di ogni altra ad essa direttamente connessa. Si dimostri che se l'unico modo di avere tutte le lampadine spente è quello di lasciare tutti gli interruttori nella posizione iniziale, allora è possibile ottenere qualunque configurazione di lampadine accese.

Anno accademico 2002–2003

1. Determinare, se esiste, un intero positivo divisibile per 2002, la cui somma delle cifre sia 2002.

2. Determinare quanti sono i numeri reali x tali che $0 \leq x \leq \pi$ e
$$\log_4 |\operatorname{sen} 4x| + \left|\log_2 \sqrt{|\cos x|}\right| = 0\,.$$
Si intende che per tali valori di x gli argomenti dei logaritmi devono essere positivi.

3. Si scelgano a caso tre punti distinti tra i vertici di un poligono regolare di 2002 lati (ogni terna di punti distinti ha la stessa probabilità di essere scelta). Determinare la probabilità che i tre punti scelti siano a loro volta vertici di
   (a) un triangolo rettangolo;
   (b) un triangolo ottusangolo;
   (c) un triangolo acutangolo.

4. Si dice diametro di un quadrilatero la massima distanza tra due suoi vertici, anche non consecutivi.
   (a) Determinare il massimo valore che può assumere l'area di un quadrilatero di diametro minore od uguale a uno.
   (b) Caratterizzare i quadrilateri di area massima, determinando in particolare se possono avere un lato di lunghezza uno.

5. (a) Determinare la più grande costante M tale che

$$(a+b+c+d)^2 \geq M(ab+bc+cd)$$

qualunque siano i numeri reali maggiori o uguali a zero a, b, c, d. Per tale valore di M, determinare i numeri a, b, c, d per i quali si ottiene una uguaglianza.

   (b) Determinare se e come cambia la risposta al punto precedente se a, b, c, d sono numeri reali qualunque.

6. La zona sacra di un'antica popolazione è costituita da un rettangolo lungo 60 metri e largo 20, suddiviso in tre quadrati di 20 metri di lato. Il primo quadrato è la base di una piramide retta, alta 50 metri; il secondo quadrato è libero; il terzo quadrato è la base di un edificio a forma di cubo.

   In un particolare momento dell'anno, l'ombra della piramide si proietta sul cubo in modo tale che l'ombra del vertice della piramide cade esattamente nel centro della faccia superiore del cubo.

   Si determini quanto vale in tale istante l'area della parte in ombra della faccia del cubo rivolta verso la piramide.

Anno accademico 2003–2004

1. Determinare il luogo delle proiezioni ortogonali di un punto dello spazio sui piani che passano per un altro punto fissato.

2. Due punti si muovono su due rette incidenti con egual velocità. Si dimostri che esiste un punto del piano individuato dalle due rette che in ogni istante è equidistante dai due punti.

3. Si sa che la somma di due interi positivi è 30030. Si dimostri che il loro prodotto non è divisibile per 30030.

   È ancora vera questa proprietà se si sostituisce il numero 30030 con 11550? E, in generale, per quali numeri a il prodotto di due interi positivi con somma a è divisibile per a?

4. Si considerino un cerchio con centro O e raggio unitario e una sua corda AB. Si costruisca la circonferenza che ha AB come diametro e sia C un punto su di essa. Quanto vale, al variare della corda AB e del punto C, il massimo della lunghezza di OC? (Si giustifichi accuratamente la risposta).

5. Si supponga che l'equazione $x^3+px^2+qx+r=0$ abbia tre radici reali. Sia d la differenza fra la radice maggiore e quella minore. Si dimostri che

$$\sqrt{p^2-3q} \leq d \leq \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{p^2-3q}\,.$$

6. Si enunci la definizione di *poligono convesso* e si dica che cosa è la sua area. (Non più di dieci righe).

Anno accademico 2004–2005

1. Si determinino i rettangoli che sono “pavimentabili” con mattonelle rettangolari 3×2, cioè che possono essere decomposti in un numero finito di rettangoli (le mattonelle) aventi, ciascuno, i lati di lunghezza 3 e 2.

2. Se $\frac{r}{s}$ è una frazione irriducibile non nulla, cioè se r e s sono interi non nulli e primi fra loro, sia $C(\frac{r}{s})$ il cerchio nel piano di equazione
$$\left(x-\frac{r}{s}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2s^2}\right)^2 \leq \left(\frac{1}{2s^2}\right)^2.$$
Si dimostri che se $\frac{r}{s} \neq \frac{p}{q}$ allora i due cerchi $C(\frac{r}{s})$ e $C(\frac{p}{q})$ sono disgiunti, tranne quando le frazioni $\frac{r}{s}$ e $\frac{p}{q}$ sono tali che $|ps-rq|=1$, nel qual caso i cerchi sono tra loro tangenti. Si dimostri inoltre che in questo caso il punto di tangenza ha entrambe le coordinate razionali.

3. Sia $p(x,y)$ un polinomio a coefficienti reali nelle due variabili x e y tale che $p(n,0)=0$ per ogni intero positivo n. Si provi che esiste un polinomio $q(x,y)$ tale che $p(x,y)=y\cdot q(x,y)$.

   (Si ricorda che un polinomio $p(x,y)$ nelle variabili x e y è una somma finita di monomi del tipo $a\cdot x^n\cdot y^m$, dove a è un numero reale ed n e m sono numeri interi maggiori o uguali a 0.)

4. Dati nel piano $n>2$ punti non tutti allineati, si dimostri che esiste almeno una retta che contiene esattamente due di essi.

5. Dato un triangolo con i lati di lunghezza a, b, c e le rispettive mediane di lunghezza x, y, z, si dimostri la seguente doppia disuguaglianza:
$$2\,(x^2+y^2+z^2) \leq 3\,(ab+bc+ca) \leq 4\,(x^2+y^2+z^2).$$
Infine si discuta, separatamente per le due disuguaglianze, se e in quali casi possa valere l’uguaglianza.

6. Una partizione di un numero intero $n \geq 1$ è una decomposizione di n in addendi interi (parti) $m_1,\ldots,m_k$ tali che $m_i \geq 1$ e $m_1+\ldots+m_k=n$. Per esempio le partizioni di 3 sono $3,\ 2+1,\ 1+1+1$ e quelle di 4 sono $4,\ 3+1,\ 2+2,\ 2+1+1,\ 1+1+1+1$.

   Si dimostri che il numero delle partizioni di un intero n in al più r parti è uguale al numero delle sue partizioni in parti ciascuna al massimo uguale a r.

Anno accademico 2005–2006

1. Si consideri il sistema di equazioni in due incognite x, y

$$\begin{aligned} ax+by &= e\,, \\ cx+dy &= f\,, \end{aligned}$$

dove a, b, c, d, e, f sono numeri interi relativi.

   (a) Dimostrare che il sistema ammette una e una sola soluzione (non necessariamente intera) qualunque siano e, f se e solo se $ad-bc \neq 0$.

   (b) Si supponga di scegliere a caso i coefficienti a, b, c, d, e, f tra gli interi relativi con valore assoluto minore o uguale a un intero positivo n prefissato. Dimostrare che la probabilità che il sistema abbia esattamente una soluzione (non necessariamente intera) è compresa tra $1-\frac{1}{2n}$ e $1-\frac{1}{3n^2}$.

2. Risolvere
$$8(4^x+4^{-x})-54(2^x+2^{-x})+101=0\,.$$

3. Si consideri un triangolo qualsiasi di vertici A, B, C. Si indichino con H, K, L i piedi delle altezze emanate dai vertici A, B, C rispettivamente.

(a) Dimostrare che le altezze AH, BK e CL sono anche le bisettrici interne del triangolo HKL.

(b) Si supponga che il triangolo ABC sia acuto. Come si può interpretare il risultato precedente in termini di un ipotetico gioco del biliardo all'interno di un tavolo triangolare (si trascuri l'attrito e si supponga che le collisioni con le pareti siano perfettamente elastiche).

4. Nel piano cartesiano si consideri il triangolo di vertici $(0,0)$, $(1,0)$, $(\frac{3}{5},\frac{4}{5})$, e sia α l'angolo (in radianti) in $(0,0)$.

   (a) Esprimere gli altri angoli in termini di α.

   (b) Poniamo $B_n = 5^n \sin(n\alpha)$, $n=0,1,2,\ldots$. Mostrare che i B_n sono numeri interi tali che $B_0=0$, $B_1=4$ e
$$B_{n+2}=6B_{n+1}-25B_n, \qquad n=0,1,2,\ldots$$

   (c) Mostrare che, per $n=0,1,\ldots$, gli interi B_{n+1} e B_{n+2} hanno lo stesso resto nella divisione per 5.

   (d) Dimostrare che $\frac{\alpha}{\pi}$ è irrazionale.

5. Sia $f(x)=x^2+ax+b$, dove a,b sono numeri reali.

   (a) Mostrare che esiste x_0 nell'intervallo $[-1,1]$ tale che $|f(x_0)| \geq \frac{1}{2}$.

   (b) Mostrare anche che, se $|f(x)| \leq \frac{1}{2}$ per ogni x nell'intervallo, allora $f(x)=x^2-\frac{1}{2}$.

6. Siano $f(x)$, $g(x)$ polinomi a coefficienti reali e sia $d>0$ il massimo dei loro gradi.

   (a) Mostrare che il polinomio $f^3(x)-g^3(x)$ ha grado $\geq 2d$ oppure è nullo. Mostrare inoltre che la disuguaglianza non può essere in generale migliorata.

   (b) Sia $R(x)$ un polinomio di grado 3 a coefficienti reali tale che $R(f(x))=R(g(x))$. Mostrare che $f(x)=g(x)$.

Anno accademico 2006–2007

1. (i) Sia dato il triangolo ABC e H, G, O ne siano rispettivamente l'ortocentro, il baricentro ed il circocentro. Si mostri che G giace sul segmento HO e che $HG = 2 \cdot GO$.

   (ii) Un rettangolo $HOMF$ ha i lati di lunghezza $HO = 11$ e $OM = 5$. Un triangolo ABC ha H come ortocentro, O come circocentro, M come punto mediano di BC e F come piede dell'altezza uscente da A. Si calcoli la lunghezza di BC. (Si può assumere come dimostrata la tesi del punto (i)).

2. Siano dati tre numeri interi positivi a, b, c con massimo comun divisore uguale a 1.

   (a) Supponiamo che $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{c}$. Dimostrare che allora a, b, c sono tutti quadrati perfetti. E' necessariamente vera la conclusione se si omette l'ipotesi sul massimo comun divisore?

   (b) Supponiamo invece che $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}=\sqrt[3]{c}$. Dimostrare che allora a, b, c sono tutti cubi perfetti.

3. Si consideri l'espressione

$$4^x+4^y+4^z \qquad (*)$$

   dove x, y, z sono interi non negativi.

   (i) Provare che la quantità sopra scritta è un quadrato perfetto per infinite terne di interi (x,y,z).

   (ii) Determinare *tutte* le terne di interi non negativi (x,y,z) tali che la quantità sopra scritta sia un quadrato perfetto.

4. In un quadrato di lato 1 sono disposte alcune circonferenze; la somma dei loro perimetri è 10. Dimostrare che le circonferenze date sono almeno 4 e che esiste una retta che ne interseca almeno 4.

5. Un test di matematica è costituito da dieci quiz a risposta "sì" o "no". Ogni risposta corretta vale 1, ogni risposta errata vale -1, ogni risposta omessa vale 0. Il test è superato se si raggiunge un totale di 6.

   (i) Qual è la probabilità che, dando dieci risposte a caso, si fornisca la risposta corretta esattamente a otto domande?

   (ii) Qual è la probabilità che, dando dieci risposte a caso, si superi il test?

   (iii) Qual è la probabilità che, conoscendo la risposta corretta a quattro domande, e rispondendo a caso a quattro delle rimanenti sei, si superi il test?

6. (i) Si disegni il sottoinsieme dei punti (x,y) del piano tali che

$$x\sin\xi + y\sin(2\xi) \geq 0$$

   per ogni $\xi \in [0,\pi]$.

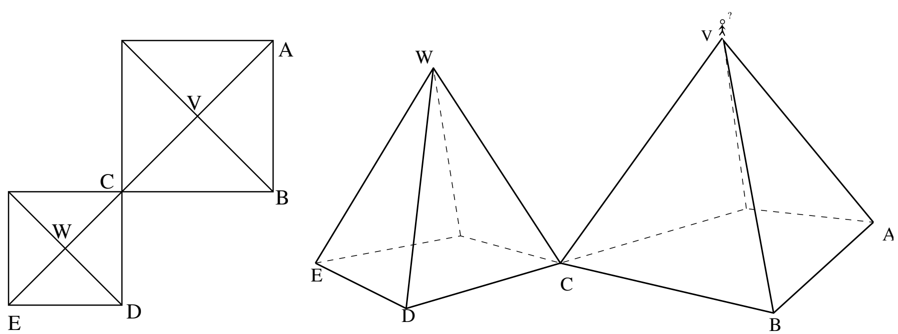
   (ii) Si determinino tutti i valori reali di t per i quali esiste $\xi \in [0,\pi]$ tale che

$$(\sin(2\xi)+4\sin\xi)\,t^2+(3t+4)\sin(2\xi)<0$$

Anno accademico 2007–2008

1. Un turista parte per un viaggio di 800km in autostrada; alla partenza ha fatto il pieno di carburante, e con il pieno ha un'autonomia di 200km; ma, a causa di uno sciopero, i distributori di benzina hanno una probabilità del 50% di essere chiusi; lungo l'autostrada il turista troverà un distributore ogni 100km, e, se il distributore sarà aperto, ogni volta farà il pieno. Che probabilità ha il turista di arrivare a destinazione? *(Nota: per "probabilità" si intende il rapporto fra il numero dei casi favorevoli e il numero totale dei casi)*

2. Nella piana di Giza vi sono due piccole piramidi regolari a base quadrata, che si toccano in un vertice C e hanno i lati di base paralleli, come nella pianta e nella prospettiva qui sotto.



Un turista stanco si è arrampicato sulla cima V della prima piramide, e ora vorrebbe spostarsi sulla cima W della seconda piramide: si chiede quale sia il percorso più corto. Sapete aiutarlo?

3. Un artigiano abita in un piccolo paese dove vi sono due banche A e B; la prima presta denaro con tasso annuo del 12% ; la seconda del 8%. L'artigiano ottiene il 1/1/2000 un prestito (non rinnovabile) di 1000 euro dalla banca A. Al 1/1/2001 deve restituire 1120 euro, ha messo da parte 100 euro, e si reca nella banca B a chiedere un prestito di 1020 euro per coprire la differenza. Al 1/1/02, ha messo da parte altri 100 euro, e chiede in prestito la parte rimanente alla banca A; e cosí via: ogni anno l'artigiano, per rimborsare la differenza fra il prestito precedente e i 100 euro che ha messo da parte, chiede un prestito alla banca concorrente. Cosa succede ai debiti dell'artigiano con il passare degli anni?
Si ripetano i calcoli precedenti, ma supponendo che il 1/1/2000 l'artigiano si fosse recato presso la banca B (e poi alla A, e poi alla B, e cosí via).

4. Un gioielliere vuole imballare 3 bocce di cristallo di forma sferica e di diametro di 10cm; ha trovato una scatola a forma di parallelepipedo di lati 16cm$\times$16cm$\times$20cm. Dite, motivando la risposta, se è possibile far stare le 3 bocce nella scatola.

5. Siano a, b interi relativi tali che $2a+3b$ è divisibile per 11. Si mostri che a^2-5b^2 è divisibile per 11.

Anno accademico 2008–2009

1. Considera numeri interi relativi p_1, p_2, p_3 e interi positivi q_1, q_2, q_3 tali che
$$|p_1q_2 - p_2q_1| = |p_1q_3 - p_3q_1| = |p_2q_3 - p_3q_2| = 1.$$
Verifica che, eventualmente dopo un riordinamento delle coppie (p_1, q_1), (p_2, q_2), (p_3, q_3), hai $p_3 = p_1 + p_2$ e $q_3 = q_1 + q_2$.

2. Date due lunghezze $0 < r < R$ e un angolo $0 < \alpha < \pi$, considera nel piano una circonferenza $\mathscr{C}$ di centro O e raggio r e due punti A e B tali che $\overline{OA} = \overline{OB} = R$ e $\widehat{AOB} = \alpha$. Descrivi, giustificando la risposta, il cammino più breve che unisce A a B toccando $\mathscr{C}$ in almeno un punto, ma senza penetrare nel cerchio delimitato da $\mathscr{C}$. Calcola la lunghezza di tale cammino.

3. Dato un intero n e un foglio quadrato costituito da n^2 quadrati di lato 1cm, considera un "labirinto" con le seguenti proprietà:

   (a) le pareti del labirinto sono costituite da lati dei quadrati e contengono il bordo del foglio;

   (b) partendo da qualsiasi punto su una parete del labirinto si può sempre arrivare, muovendosi lungo le pareti del labirinto, al bordo del foglio;

   (c) ogni punto del labirinto è raggiungibile da ogni altro punto;

   (d) ogni quadrato 2×2 contiene almeno una parete del labirinto al suo interno.

   Dimostra che la lunghezza totale delle pareti non dipende dalla forma del labirinto.

4. Un piccolo congresso scientifico conta 30 partecipanti, provenienti da 6 città, 5 per città. La sala da pranzo della sede del convegno dispone di 6 tavoli da 5 posti. Gli organizzatori, per favorire la conoscenza reciproca dei partecipanti, vogliono disporli in modo che in nessun tavolo siano presenti due scienziati provenienti dalla stessa città. In quanti modi è possibile disporre i partecipanti nei 6 tavoli?

   Nota: considera i tavoli come distinti, ma considera uguali due disposizioni con gli stessi gruppi nei 6 tavoli (in altre parole, ignora l'ordine in cui i commensali sono seduti allo stesso tavolo). È più che sufficiente indicare il risultato come prodotto di potenze.

5. Sia P un poliedro convesso.

   (a) Supponiamo che P abbia un numero dispari di facce, e che tutte le facce abbiano lo stesso numero di lati. Mostra che tutte le facce hanno 4 lati.

   (b) Supponiamo che P abbia la proprietà che, date due qualsiasi sue facce F_1 e F_2, esiste una rotazione dello spazio che lascia P invariante e che porta F_1 su F_2. Mostra che P ha un numero pari di facce.

6. Dato un cubo C di lato ℓ, considera i punti medi dei suoi spigoli e il poliedro convesso P avente tali punti come vertici. Descrivi l'ottaedro regolare Q tale che $P = C \cap Q$ e determina il volume di $C \cup Q$.

Anno accademico 2009–2010

1. A partire da un triangolo dato T_0 si costruisca il triangolo T_1 avente come vertici i punti di intersezione tra i lati di T_0 e il cerchio ad esso inscritto. Si costruisca quindi T_2 a partire da T_1 attraverso le stesse operazioni e si consideri la successione di triangoli T_0, T_1, T_2, ..., T_n, ... ottenuta ripetendo la procedura indicata infinite volte. Si dimostri che, all'aumentare di n, gli angoli di questi triangoli diventano sempre più prossimi a quelli di un triangolo equilatero.

2. Siano a, b numeri reali, n, m interi tali che $n > m > 0$, e sia $f(x) = x^n + ax^m + b$.

   (a) Descrivere in modo semplice tutti i casi in cui $f(x)$ è il quadrato di un polinomio.

   (b) Dimostrare che f può essere il cubo di un polinomio solo se $a = b = 0$.

3. Un cubo di lato unitario è posto sopra un piano orizzontale, in modo che una delle sue diagonali maggiori sia perpendicolare ad esso. Il sole (che si suppone a distanza infinita) è in posizione tale da illuminare tutte e tre le facce del cubo rivolte verso l'alto. Si dimostri che l'area dell'ombra proiettata dal cubo sul piano non dipende dalla posizione del sole e calcolarne il valore.

4. Su un piano cartesiano è disposta una rete metallica costituita da fili rettilinei che, incrociandosi perpendicolarmente, formano quadrati di lato unitario. La rete è disposta con i fili paralleli agli assi coordinati e gli incroci nei punti con coordinate intere.

   Una formica si muove lungo la rete, scegliendo a caso ad ogni incrocio quale direzione prendere, ma sempre nel verso positivo degli assi coordinati.

   (a) La formica ha percorso un cammino dall'origine $(0,0)$ al punto di coordinate (m,n), con $m,n > 0$. Qual è la probabilità che sia passata per un dato punto di coordinate (i,j)?

   (b) Per quali punti (i,j) del rettangolo di vertici $(0,0)$, $(m,0)$, $(0,n)$, (m,n) tale probabilità è minima?

5. Sia $f(x) = x^2 - 2$.

   (a) Dimostrare che per ogni numero reale θ vale l'uguaglianza $f(2\cos\theta) = 2\cos(2\theta)$.

   Scelto un numero reale a_0, definiamo per ricorrenza i numeri a_1, a_2, ... ponendo $a_{n+1} = f(a_n)$ per $n = 0, 1, 2, \ldots$

   (b) Dimostrare che se $|a_0| > 2$ i numeri $|a_n|$ non sono limitati.

   (c) Supponendo che la successione ottenuta, $a_0, a_1, a_2, \ldots$ sia periodica (ossia che esista un intero positivo p tale che $a_{n+p} = a_n$ per ogni n), dimostrare che esiste un numero razionale r tale che $a_0 = 2\cos(2\pi r)$.

   (d) Supponiamo invece che la successione a_0, a_1, a_2, ... tenda a un limite finito ℓ. Dimostrare che allora si deve avere, per n abbastanza grande, $a_n = -1$ (e dunque $\ell = -1$), oppure $a_n = 2$ (e dunque $\ell = 2$).

6. Sia $a > 1$ un numero reale assegnato. Per $x > 0$ reale poniamo

$$\sigma(x) = \frac{1-x}{a+x} \qquad \text{e} \qquad q(x) = \sigma\big(\sigma(x)\big)\ .$$

(a) Dimostrare che $q(x) = \dfrac{a-1+2x}{a^2+1+(a-1)x}$.

(b) Dimostrare che, posto $s = \dfrac{\sqrt{a^2+2a+5}-a-1}{2}$, si ha $s > 0$ e che, se $0 < x < s$, si ha $x < q(x) < s$.

(c) Dimostrare che se $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, dove P e Q sono polinomi a coefficienti reali, è tale che $R(x) = R\big(\sigma(x)\big)$ identicamente, allora R è costante.

(d) Dire come cambiano queste asserzioni quando $a = 1$.