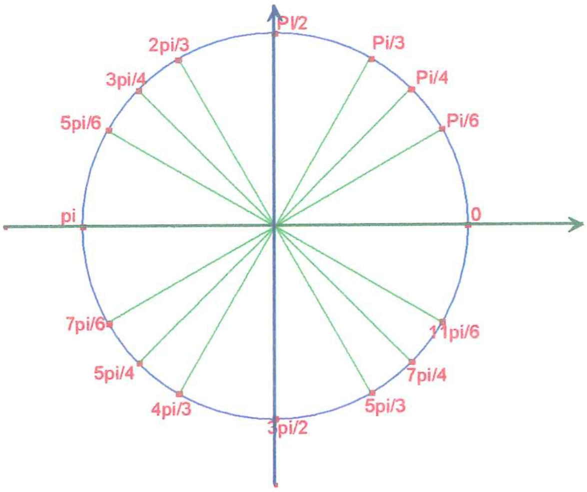
Trigonometria

Angoli

Disposizione degli angoli principali rispetto alla circonferenza trigonometrica



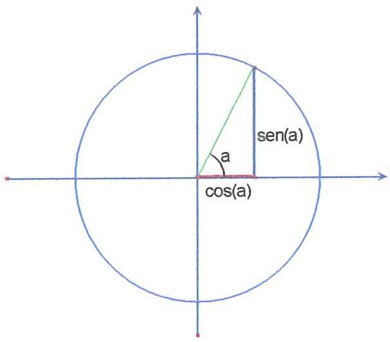
Relazione per passare dalla misura in gradi alla misura in radianti

$$\text{Misura in radianti} = \frac{\text{misura in gradi} \cdot \pi}{180^0}$$

Relazione per passare dalla misura in radianti alla misura in gradi

$$\text{Misura in gradi} = \frac{\text{misura in radianti} \cdot 180^0}{\pi}$$

Definizione di seno e coseno di un angolo orientato nella circonferenza goniometrica



$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

Il seno risulta positivo nel primo e secondo quadrante, il coseno nel primo e nel quarto.

Formule

$$\text{tg}\alpha = \frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha} \qquad \text{cotg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \qquad \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} \qquad \text{cosec}\alpha = \frac{1}{\text{sen}\alpha}$$

	Senα	cosα	tgα	cotgα
senα		$\pm\sqrt{1-\text{sen}^2\alpha}$	$\frac{\text{sen}\alpha}{\pm\sqrt{1-\text{sen}^2\alpha}}$	$\frac{\pm\sqrt{1-\text{sen}^2\alpha}}{\text{sen}\alpha}$
cosα	$\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$		$\frac{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$	$\frac{\cos\alpha}{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$
tgα	$\frac{\text{tg}\alpha}{\pm\sqrt{1+\text{tg}^2\alpha}}$	$\frac{1}{\pm\sqrt{1+\text{tg}^2\alpha}}$		$\frac{1}{\text{tg}\alpha}$
cotgα	$\frac{1}{\pm\sqrt{1+\text{cotg}^2\alpha}}$	$\frac{\text{cotg}\alpha}{\pm\sqrt{1+\text{cotg}^2\alpha}}$	$\frac{1}{\text{cotg}\alpha}$	

Funzioni goniometriche per gli angoli principali

Angoli in gradi (α)	Angoli in radianti(α)	senα	cos α	tgα	Cotg α
0°	0	0	1	0	±∞
30°	π/6	1/2	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}$
45°	π/4	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1	1
60°	π/3	$\sqrt{3}/2$	- 1/2	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}/3$
90°	π/2	1	0	±∞	0
120°	2π/3	$\sqrt{3}/2$	- 1/2	$-\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}/3$
135°	3π/4	$\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	-1	-1
150°	5π/6	1/2	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{3}/3$	$-\sqrt{3}$
180°	π	0	-1	0	±∞
210°	7π/6	- 1/2	$-\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}/3$
225°	5π/4	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	1	1
240°	4π/3	$-\sqrt{3}/2$	- 1/2	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}/3$
270°	3π/2	- 1	0	±∞	0
300°	5π/3	$-\sqrt{3}/2$	1/2	$-\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}/3$
315°	7π/4	$-\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	-1	-1
330°	11π/6	- 1/2	$\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{3}/3$	$-\sqrt{3}$
360°	2π	0	1	0	±∞

Funzioni goniometriche di angoli associati

Angoli complementari

$$sen\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=sen\alpha \qquad tg\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cot g\alpha \qquad cotg\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=tg\alpha$$

Angoli che differiscono di π/2

$$sen\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-sen\alpha \qquad tg\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\cot g\alpha \qquad cotg\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-tg\alpha$$

Angoli la cui somma è di 3π/2

$$sen\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\cos\alpha \qquad \cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-sen\alpha \qquad tg\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=\cot g\alpha \qquad cotg\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=tg\alpha$$

Angoli che differiscono di 3π/2

$$sen\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\cos\alpha \qquad \cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=sen\alpha \qquad tg\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\cot g\alpha \qquad cotg\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-tg\alpha$$

Angoli supplementari

$$sen(\pi-\alpha)=sen\alpha \qquad \cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha \qquad tg(\pi-\alpha)=-tg\alpha \qquad cotg(\pi-\alpha)=-\cot g\alpha$$

Angoli che differiscono di π

$sen(\pi + \alpha) = -sen\alpha$ $\quad\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$ $\quad tg(\pi + \alpha) = tg\alpha$ $\quad cotg(\pi + \alpha) = \cot g\alpha$

Angoli esplementari

$sen(2\pi - \alpha) = -sen\alpha$ $\quad\cos(2\pi - \alpha) = +\cos\alpha$ $\quad tg(2\pi - \alpha) = -tg\alpha$ $\quad cotg(2\pi - \alpha) = -\cot g\alpha$

Angoli opposti

$sen(-\alpha) = -sen\alpha$ $\quad\cos(-\alpha) = +\cos\alpha$ $\quad tg(-\alpha) = -tg\alpha$ $\quad cotg(-\alpha) = -\cot g\alpha$

Funzioni goniometriche

FORMULE DI ADDIZIONE/SOTTRAZIONE

$$\text{sen}(\alpha \pm \beta) = \text{sen}\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\,\text{sen}\beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \cos\alpha\cos\beta$$

$$\text{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\text{tg}\alpha\text{a} + \text{tg}\beta}{1 - \text{tg}\alpha\text{a} \cdot \text{tg}\beta}$$

FORMULE DI DUPLICAZIONE

$$sen(2\alpha) = 2sen\alpha \cdot \cos\alpha$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - sen^2\alpha = 1 - 2sen^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

$$tg(2\alpha) = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}$$

FORMULE DI BISEZIONE

$$sen\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \qquad \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} \qquad tg\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{sen\alpha} = \frac{sen\alpha}{1+\cos\alpha}$$

FORMULE PARAMETRICHE

Posto $t = tg\frac{\alpha}{2}$ con $\alpha \neq \pi + 2\text{k}\pi$, allora

$$sen\alpha = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \text{tg}\alpha = sen\alpha = \frac{2t}{1-t^2}$$

FORMULE DI PROSTAFERESI

$$senp + senq = 2sen\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2} \qquad senp - senq = 2sen\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$$

$$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2} \qquad \cos p - \cos q = -2sen\frac{p+q}{2}sen\frac{p-q}{2}$$

FORMULA DI WERNR

$$sen\alpha \cdot sen\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$$

$$sen\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}[sen(\alpha + \beta) + sen(\alpha - \beta)]$$

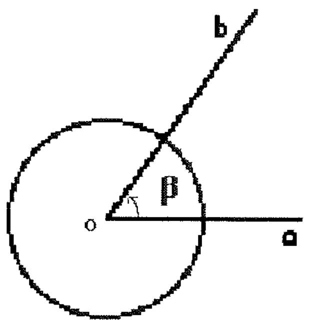
Trigonometria

Prerequisiti:
Nozione di angolo e di arco.

Obiettivi
convertire le misure degli angoli dai gradi ai radianti e viceversa;
sapere le relazioni fra gli elementi (lati, angoli) di un triangolo;
conoscere l'andamento grafico e le proprietà delle principali funzioni goniometriche;
utilizzare le principali formule trigonometriche per risolvere semplici problemi geometrici;
saper risolvere semplici equazioni e disequazioni goniometriche.

Goniometria

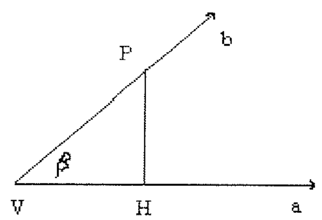
Data una circonferenza avente il centro nel vertice di un angolo, è possibile orientare l'angolo ponendo come verso positivo di percorrenza quello antiorario.



Le principali unità di misura degli angoli piani sono:
- il grado sessagesimale (*deg* sulle calcolatrici)
- l'angolo radiante (*rad* sulle calcolatrici). Il radiante è l'angolo al centro di una circonferenza, di raggio arbitrario, che sottende un arco di lunghezza uguale al raggio stesso.

La misura in radianti di un angolo, la cui misura in gradi è $\beta°$, si ottiene come: $x = \dfrac{\pi \cdot \beta°}{180°}$

La misura in radianti di un angolo è uguale alla misura dell'arco (calcolata rispetto al raggio della circonferenza cui angolo ed arco appartengono).



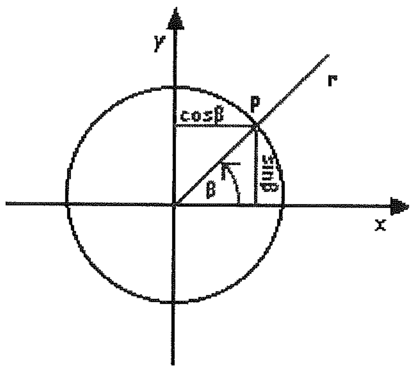
Consideriamo un angolo orientato β di vertice V e lati *a* e *b*. Preso su *b* un punto P arbitrario, purché distinto dal vertice V, proiettiamolo su *a*: sia H il piede della perpendicolare da P su *a*. Si ha che:

$$\frac{HP}{VP} = \sin\beta \qquad \frac{VH}{VP} = \cos\beta \qquad \frac{HP}{VH} = tg\beta$$

(rispettivamente seno, coseno e tangente di β)

Introducendo un sistema di riferimento cartesiano si definisce circonferenza goniometrica una circonferenza orientata alla quale è associato un sistema di riferimento cartesiano ortogonale, la cui origine coincide con il centro della circonferenza stessa e la cui unità di misura è assunta uguale al raggio di quest'ultima. (circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 1$).

Detto β l'angolo al centro AOP ricordando che il raggio è unitario, si ha che:
Dunque seno e coseno dell'angolo orientato β (o dell'arco orientato AP) sono rispettivamente **l'ordinata** e **l'ascissa** di **P**:
sen β = ordinata del punto P secondo estremo dell'arco β (il primo estremo è in A)
cos β = ascissa del punto P secondo estremo dell'arco β
tgβ (o **tan**β) = rapporto, quando esiste, tra il seno e il coseno dell'angolo β (cioè quando cosβ ≠ 0, dunque per β ≠ $\pi/2 + k\pi$, $k \in$ Z)



Vale che:

$$\cos^2\beta + sen^2\beta = 1$$

$$tg\beta = \frac{sen\beta}{\cos\beta}$$

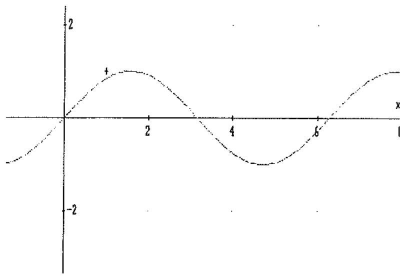
Valori delle funzioni goniometriche di archi particolari

α	**senα**	**cosα**	**tgα**
30° = π/6	1/2	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$
45° = π/4	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
60° = π/3	$\sqrt{3}/2$	1/2	$\sqrt{3}$
90° = π/2	1	0	non esiste
180° = π	0	-1	0
270° = 3/2π	-1	0	non esiste
0° = 360° = 2π	0	1	0

Funzioni goniometriche

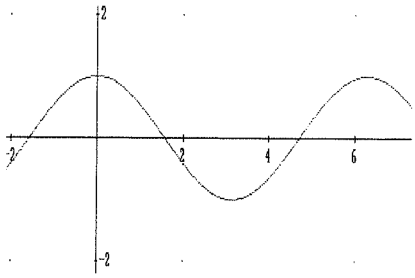
Possiamo considerare le funzioni goniometriche come *funzioni reali di variabile reale*, scriverne le equazioni nelle abituali denominazioni delle variabili $y = sin\ x$, $y = cos\ x$, $y = tg\ x$.... e rappresentarne i grafici in un sistema di riferimento *xOy monometrico*.

y = sen x
definita per ogni x, il codominio è [-1,1], periodica di periodo 2π, interseca l'asse x in $\pi + k\pi$, con $k \in Z$.



La curva rappresentata viene chiamata *sinusoide*

y = cos x
definita per ogni x, il codominio è [-1,1], periodica di periodo 2π, interseca l'asse x in $\pi/2 + k\pi$, con $k \in Z$.



La curva rappresentata viene chiamata co*sinusoide*.

y = tg x:
funzione di dominio D = $\{x \in R : x \neq \pi/2 + k\pi, k \in Z\}$, condominio R, periodo π, interseca l'asse x in $x = k\pi$, con $k \in$Z

Principali formule di goniometria

FORMULE DI ADDIZIONE

sen(α+β) = sinαcosβ + cosαsinβ
cos(α + β) = cosαcosβ -sinαsinβ
$$tg(\alpha+\beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha tg\beta}$$

FORMULE DI DUPLICAZIONE
(si ottengono dalle precedenti ponendo α = β)
sin 2α = 2 sinα cosα
cos 2α = $\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$
$$tg\,2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}$$

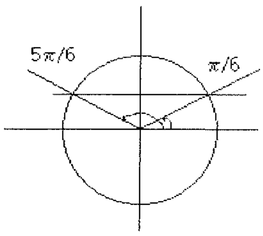
Equazioni goniometriche

- *di primo grado, elementari*

Sono elementari equazioni del tipo: $senx = h$ $\cos x = h$ con h∈ [-1, 1]
Ricordando la definizione delle funzioni *sinx* e *cosx* queste equazioni si risolvono intersecando la circonferenza (di equazione $x^2 + y^2 = 1$) con l'equazione $y = h$ (per la prima equazione) $x = h$ (per la seconda), che rappresentano delle rette parallele agli assi cartesiani.

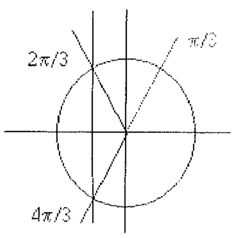
Esempi

sen x = ½



$x = \pi/6 + 2k\pi$,
x = 5π/6 + 2kπ, con $k \in \mathbf{Z}$

cos x = -1/2



x = 2/3 π +2kπ,
x = 4/3 π +2kπ, con $k \in \mathbf{Z}$.

- *primo grado, lineari:* $a senx + b\cos x = h$

  Si risolvono intersecando la circonferenza (di equazione $x^2 + y^2 = 1$)
  con l'equazione $ay + bx = h$(che rappresenta una retta)

  Esempio

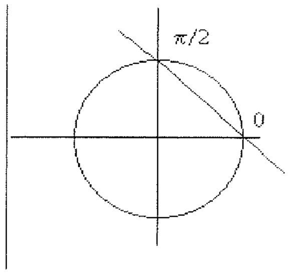
$senx + \cos x = 1$

Si pone $y = senx$, $x = \cos x$ e si interseca la retta $y = -x + 1$
così ottenuta con la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 1$

Si ottengono i punti (0,1) e (1,0) che corrispondono alle soluzioni x = 0, x = π/2

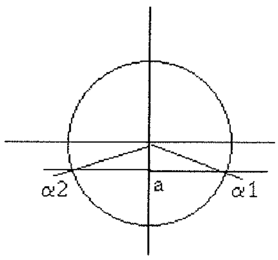
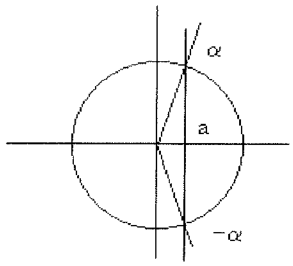
considerando poi il periodo si ha:

x = 0 + 2kπ, x = π/2 + 2kπ, con $k \in \mathbf{Z}$.



Disequazioni goniometriche

- *di primo grado, elementari*

$\text{sen}\,x > a$ con $-1 < a < 1$ $\alpha_1 + 2k\pi < x < \alpha_2 + 2k\pi$, con $k \in Z$  $senx < a$ con $-1 < a < 1$ ha come soluzione la parte del grafico non evidenziata, quindi $\alpha_2 + 2k\pi < x < 2\pi - \alpha_1 + 2k\pi$ con $k \in Z$	$\cos x > a$ con $-1 < a < 1$ $-\alpha + 2k\pi < x < \alpha + 2k\pi$ con $k \in Z$  $\cos x < a$ con $-1 < a < 1$ ha come soluzione la parte del grafico non evidenziata, quindi $\alpha + 2k\pi < x < 2\pi - \alpha + 2k\pi$ con $k \in Z$

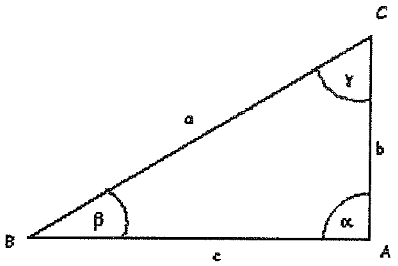
Nel caso in cui fosse $a < -1 \vee a > 1$ la disequazione è sempre soddisfatta oppure non ammette soluzioni: le disequazioni $\text{sen}\,x > a$ e $\cos x > a$ con $a < -1$ sono verificate per $\forall x$, con $a > 1$ non sono mai verificate. Identicamente le disequazioni $senx < a$ e $\cos x < a$ con $a < -1$ non sono mai verificate, con $a > 1$ sono verificate per $\forall x$.

- *di secondo grado*

  Si risolvono come le disequazioni algebriche di secondo grado, scegliendo gli intervalli interni o esterni alle soluzioni trovate, si ottengono così delle disequazioni goniometriche di primo grado che si risolvono come precedentemente visto.

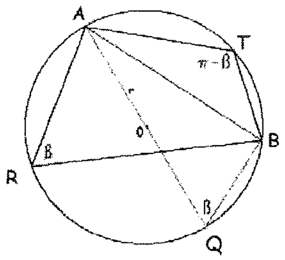
Trigonometria

Relazioni tra gli elementi di un triangolo rettangolo



per le definizioni viste precedentemente è:

$b = a sen\beta$	$c = a sen\gamma$
$b = a\cos\gamma$	$c = a\cos\beta$
$b = c tg\beta$	$c = b tg\gamma$

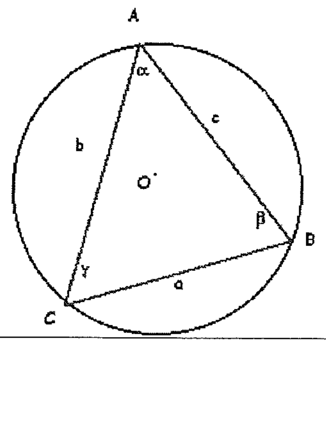


Teorema della corda

La misura di una corda di una circonferenza è uguale al prodotto tra la misura del diametro ed il seno di uno qualunque degli angoli alla circonferenza che insistono su uno dei due archi sottesi dalla corda: AB = 2r senβ.
Si osserva che gli angoli ATB e AQB sono supplementari (angoli opposti di un quadrilatero inscritto in una circonferenza), quindi hanno lo stesso seno.

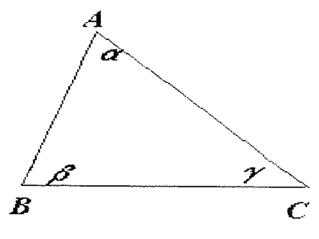
Relazioni tra gli elementi di un triangolo qualsiasi

Teorema dei seni:
In un triangolo qualunque è costante il rapporto tra la misura di un lato ed il seno dell'angolo opposto: $\dfrac{a}{sen\alpha} = \dfrac{b}{sen\beta} = \dfrac{c}{sen\gamma}$.



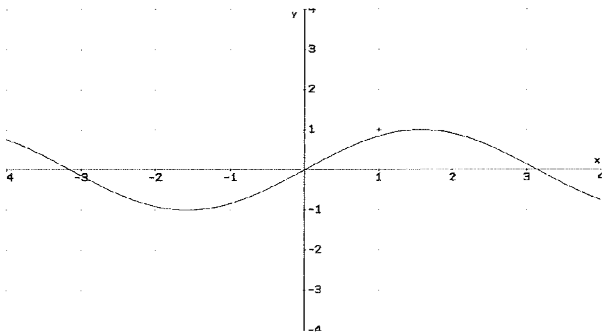
Teorema del coseno:
In un triangolo qualsiasi, il quadrato della misura di ogni lato è uguale alla somma dei quadrati delle misure degli altri due, diminuita del doppio prodotto delle misure di questi per il coseno dell'angolo tra essi compreso:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

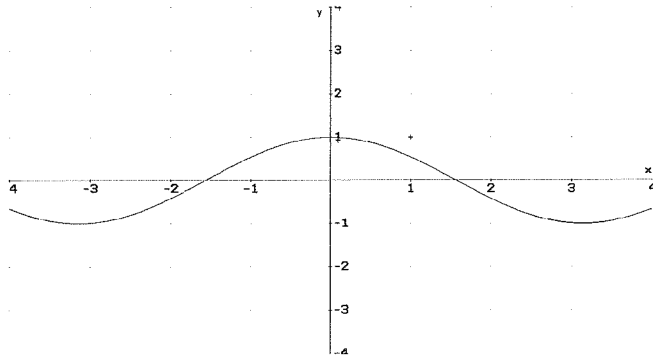


Grafici delle principali funzioni trigonometriche dirette e inverse

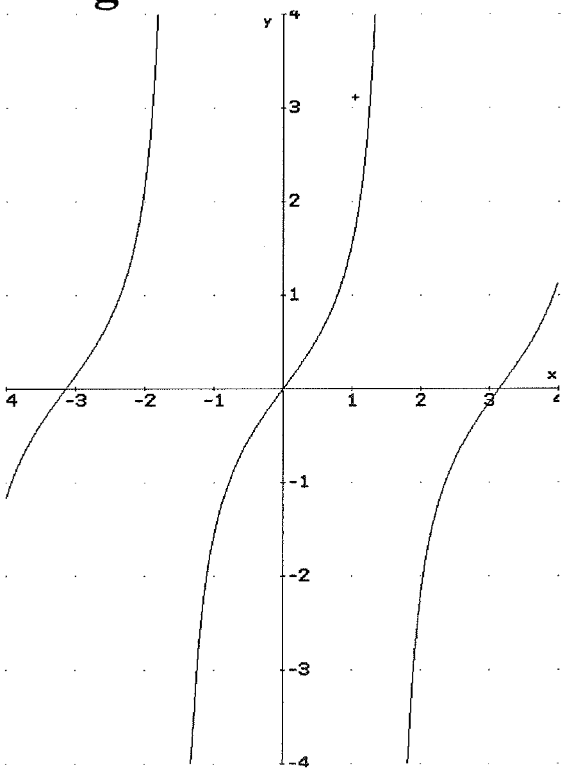
Y=senx



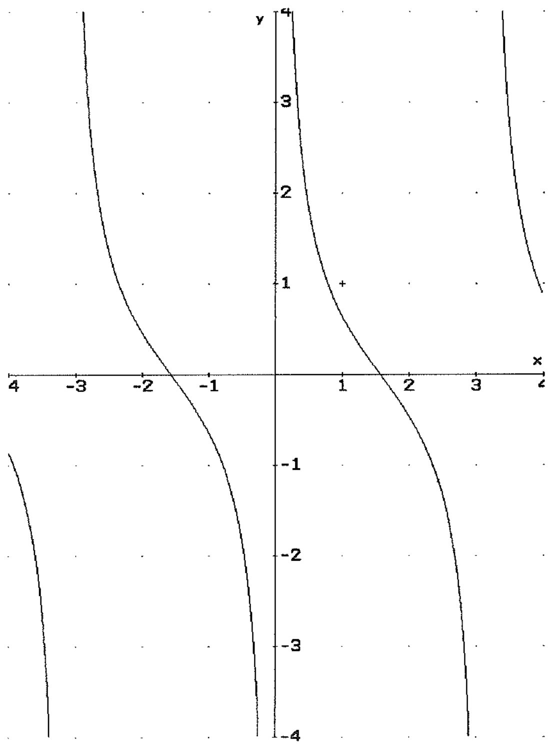
Y=cosx



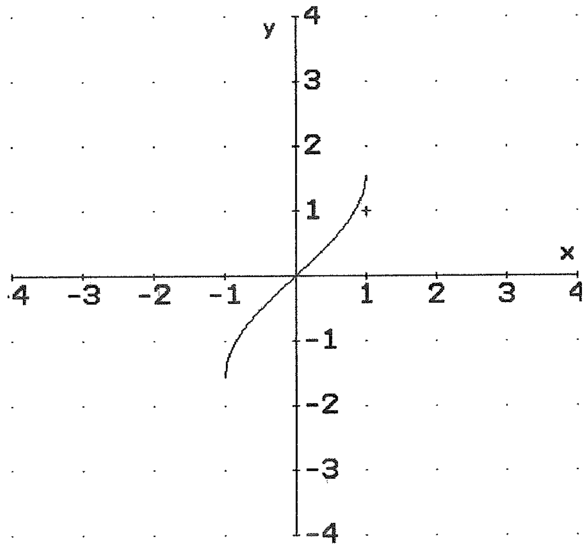
Y=tgx



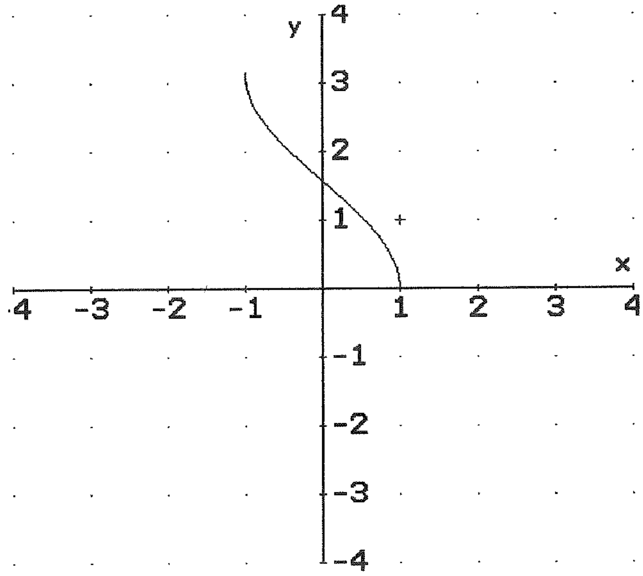
Y=cotgx



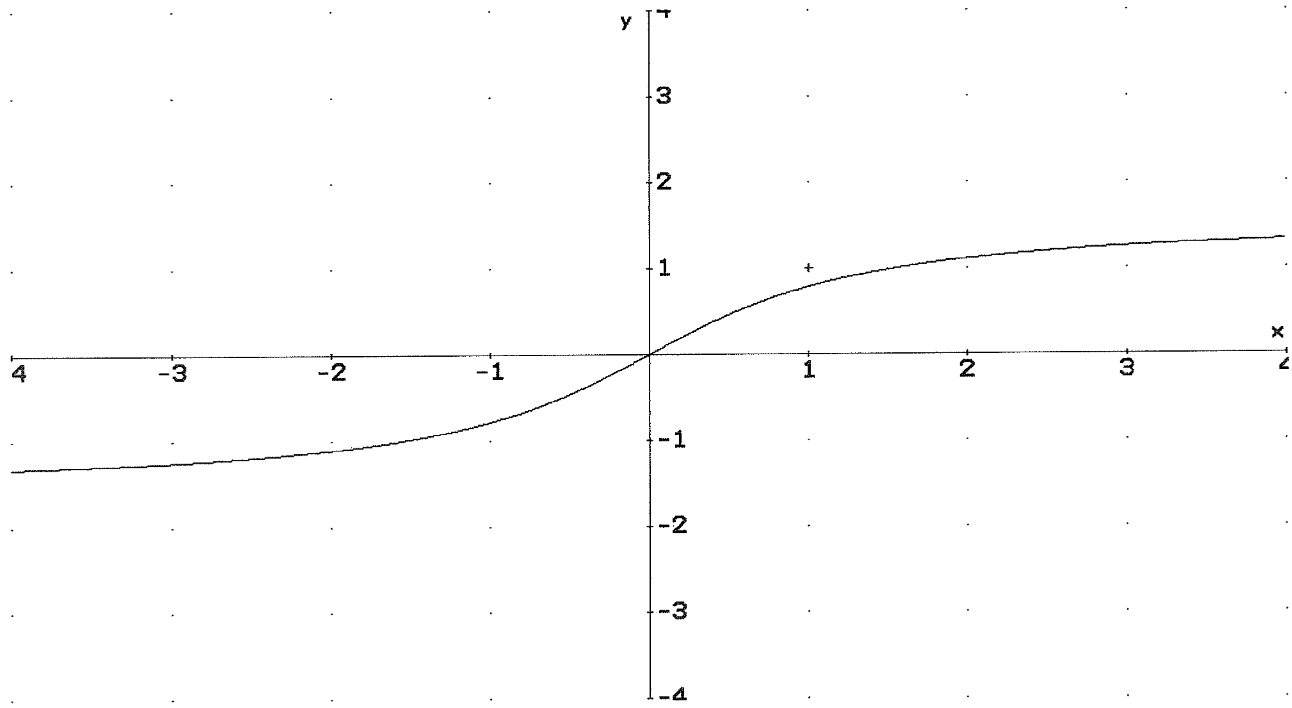
Y=arcsinx



Y=arcos x

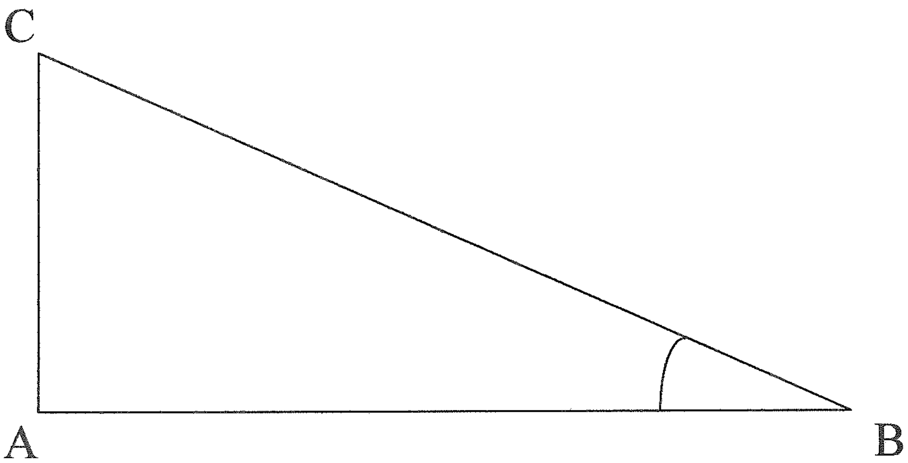


Y=arctgx



Risoluzione di triangoli

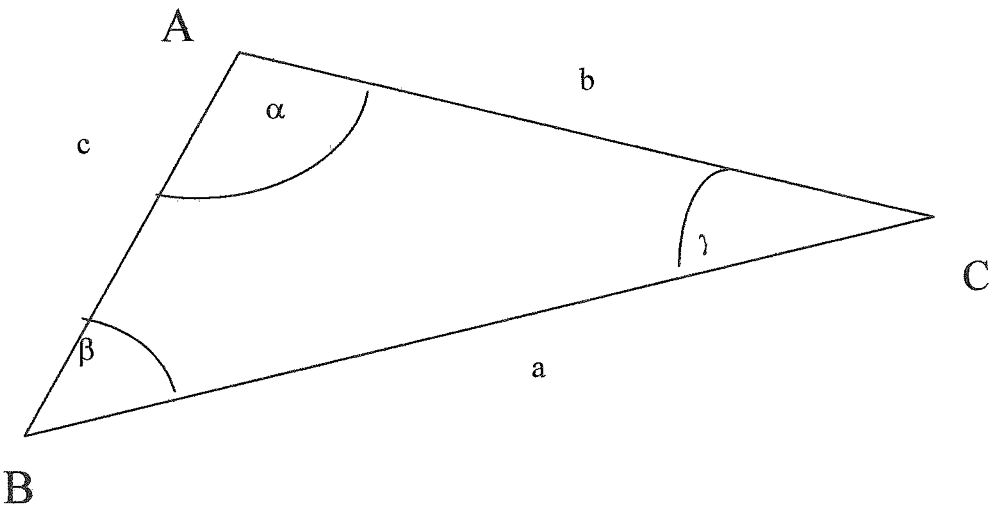
Triangoli rettangoli



AB=CB .cosα   CA=CB .tgα

AC=CB .sinα   CB= CA.cotgα

Triangoli qualsiasi



1 caso) Sono noti un lato e i due angoli adiacenti

ESEMPIO NOTO c, α e β

$\gamma=180°-(\alpha+\beta)$

$a=\dfrac{c\cdot sen\alpha}{sen\gamma}$ $b=\dfrac{c\cdot sen\beta}{sen\gamma}$

2 caso) Sono noti due lati e l'angolo fra essi compreso

ESEMPIO NOTO b,c, e α

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha}$$

$$\beta = \arcsin\left(\frac{b \cdot sen\alpha}{a}\right)$$

$$y = 180° - (\alpha + \beta)$$

3 caso) Sono noti i tre lati
ESEMPIO NOTO a, b,c.

$$a = \arccos\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)$$

$$\beta = \arccos\left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}\right)$$

$$y = 180° - (\alpha + \beta)$$

$ caso) Sono noti due lati e l'angolo opposto ad uno di essi
ESEMPIO NOTO a,b e α

$$\beta = \arcsin\left(\frac{b \cdot sen\alpha}{a}\right)$$

β può assumere due valori uno compreso tra 0° e 90° l' altro compreso tra 90° e 180°

si devono quindi calcolare due valori di γ

$$y = 180° - (\alpha + \beta_1)$$

$$y = 180° - (\alpha + \beta_2)$$

Ovviamente si scarta la possibilit à di avere angoli negativi.. Si possono quindi ottenere anche due soluzioni imponendo che c sia

$$\mathrm{c} = \frac{\mathrm{a} \cdot \mathrm{sen}\gamma}{\mathrm{sen}\alpha}$$