

CALCOLO COMBINATORIO

Oggetto del calcolo combinatorio è il conteggio di tutti i possibili modi con i quali associare gli elementi di uno o più insiemi.

Raggruppamenti semplici

Ogni raggruppamento contiene elementi distinti tra loro:

1. Come si può stilare l'ordine di arrivo di una gara di atletica a cui partecipano n atleti?
2. In quanti modi possiamo distribuire n regali fra n persone?
3. In quanti modi si possono assegnare k lavori identici a n imprese?

Nell'esempio 1 k (primi 3 classificati) è minore di n (partecipanti) e la terna di vincitori Tizio, Caio, Sempronio differisce dalla terna Sempronio, Caio, Tizio (una medaglia d'oro è preferita ad una di bronzo!!!).

In questo caso i sottogruppi differiscono sia per la natura degli elementi sia per l'ordine in cui sono disposti. I possibili raggruppamenti che si possono effettuare sono detti **disposizioni semplici** di n elementi di classe k :

$$D_{n,k} = n(n-1) \dots (n-k+1)$$

Nell'esempio 2 $k=n$ in questo caso si definiscono **permutazioni semplici** di n elementi i raggruppamenti formati dagli n elementi in un ordine qualsiasi:

$$P_n = n! = n(n-1) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Nell'esempio 3 k è minore di n come per le disposizioni, ma stavolta i gruppi differiscono fra loro esclusivamente per la natura degli elementi (l'ordine non conta) e quindi tutti i possibili raggruppamenti sono detti **combinazioni semplici** di n elementi di classe k :

$$C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{D_{n,k}}{P_k} \quad (1)$$

Raggruppamenti con ripetizione

Nei raggruppamenti gli n elementi possono comparire più di una volta.

1. In quanti modi si possono presentare le facce di due dadi?
2. Quanti sono gli anagrammi (indipendentemente dal significato) della parola ASSE?
3. In quanti modi posso distribuire 10 oggetti identici in tre cassetti?

Nell'esempio 1. ogni faccia del primo dado può essere associata a ogni faccia del secondo. I possibili raggruppamenti che si possono effettuare sono detti **disposizioni con ripetizione** di n elementi di classe k :

$$D'_{n,k} = n^k$$

Nell'esempio 2. bisogna porre attenzione al fatto che scambiando fra loro le "s" non si ha una nuova parola. Se è data una parola di n lettere, nella quale una lettera è ripetuta α volte, un'altra β volte ecc., il numero delle **permutazioni con elementi ripetuti** che si possono ottenere è pari a:

$$P_n^{(\alpha, \beta, \dots)} = \frac{n!}{\alpha! \beta! \dots}$$

¹ Il simbolo $\binom{n}{k}$ è detto coefficiente binomiale

Nell'esempio 3. si tratta di determinare le combinazioni con ripetizione di tre elementi (i cassette) di classe 10. Le combinazioni di n elementi di classe k in cui gli elementi possono anche essere ripetuti prendono il nome di **combinazioni con ripetizione**:

$$C'_{n,k} = \frac{n(n+1)(n+2)\dots(n+k-1)}{k!} = \binom{n+k-1}{k}$$

CALCOLO DELLE PROBABILITA'

Si definisce **probabilità** di un evento E il rapporto tra il numero m di **casi favorevoli** e il numero n di **casi possibili**, giudicati egualmente possibili.

$$P(E) = \frac{m}{n}$$

Alla luce della seguente definizione quindi la probabilità è un numero razionale p compreso fra 0 e 1: $0 \leq p \leq 1$.

Si definisce **frequenza relativa** di un evento E , in n prove effettuate nelle medesime condizioni, il rapporto fra il numero k delle prove nelle quali l'evento si è verificato e il numero n delle prove effettuate:

$$f = \frac{k}{n} \text{ con } 0 \leq f \leq 1$$

Probabilità della somma logica di eventi

Dati due eventi si definisce **somma logica** degli eventi, l'evento che risulta se si verifica almeno uno degli eventi componenti qualora gli eventi componenti siano incompatibili altrimenti vale l'esempio che segue.

Esempio: Da un'urna contenente 90 palline numerate da 1 a 90, si estrae una pallina. Calcolare la probabilità che esca un numero divisibile per 2 o per 5:

E_1 : "esce un numero divisibile per 2"

E_2 : "esce un numero divisibile per 5"

$E_1 \cap E_2$: "esce un numero divisibile per 10"

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2) = \frac{45}{90} + \frac{18}{90} - \frac{9}{90} = \frac{54}{90}$$

Probabilità della somma logica di eventi

Dati due eventi si definisce **prodotto logico** degli eventi, l'evento che risulta verificato se gli eventi componenti si verificano entrambi.

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1)P(E_2)$$

Esempio: Un'urna contiene 5 palline numerate da 1 a 5. Si estraggono successivamente due palline rimettendo la prima estratta nell'urna). Calcolare la probabilità di estrarre due numeri dispari:

E_1 : "il primo estratto è dispari"

E_2 : "il secondo estratto è dispari"

$$P(E_1 \cap E_2) = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{25}$$

STATISTICA

distribuzione di frequenza campionaria			
	X	Freq. ass.	Freq. rel.
L. Classico	1	17	0,226666667
L. Scientifico	2	18	0,24
ITG	3	10	0,133333333
ITS	4	12	0,16
ITC	5	10	0,133333333
altro	6	8	0,106666667
		75	1

valori di sintesi  riassunti di posizione (basati sui momenti e sui riordini)
riassunti di dispersione

riassunti di posizione (basati sui momenti):

- *media campionaria*

$$\bar{x}_n = \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{17 + 18 + 10 + \dots + 8}{6} = 12,5$$

riassunti di dispersione:

- *varianza campionaria e deviazione standard (scarto campionario):*

$$s_n^2 = s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{74} ((17 - 12,5)^2 + \dots + (8 - 12,5)^2) = 1,13$$

$$s_n = s = \sqrt{s_n^2} = 1,06$$

CALCOLO COMBINATORIO

$$m! = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$$

$C_{m,k}$ = **COMBINAZIONI** di m elementi di classe k

$$C_{m,k} = \binom{m}{k} = \frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \dots \cdot (m-k+1)}{k!}$$

$$C_{m,k} = \binom{m}{k} = \frac{m!}{k! (m-k)!}$$

$C_{m,k}$: non interessa l'ORDINE in cui si prendono gli elementi (a k a k)

$D_{m,k}$: **DISPOSIZIONI** di m elementi di classe k
(interessa ORDINE in cui prendo gli elementi)

$$D_{m,k} = m(m-1)(m-2) \cdot \dots \cdot (m-k+1) = \frac{m!}{(m-k)!}$$

Proprietà

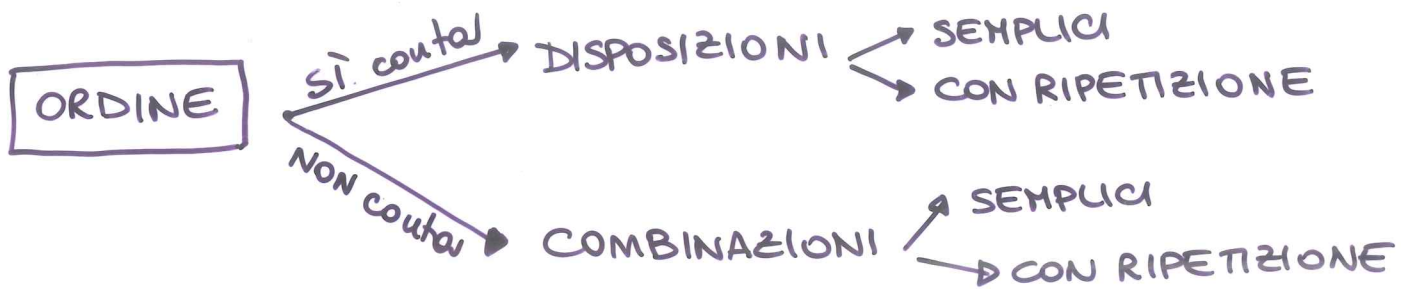
$$\binom{m}{0} = \binom{m}{m} = 1 \quad ; \quad \binom{m}{k} = \binom{m}{m-k}$$

Potenza m-esima (binomio di Newton)

$$\boxed{(a+b)^m} = \binom{m}{m} a^m + \binom{m}{m-1} a^{m-1} b + \binom{m}{m-2} a^{m-2} b^2 + \dots + \dots + \binom{m}{1} a b^{m-1} + \binom{m}{0} a^0 b^m$$

① CALCOLO COMBINATORIO

Si occupa di studiare IN QUANTI MODI è possibile RAGGRUPPARE gli elementi di un insieme.

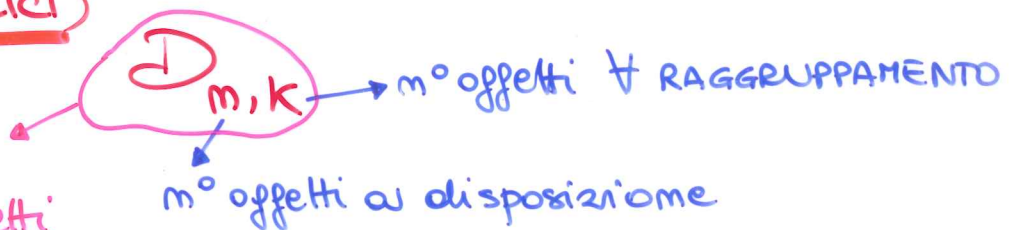


DISPOSIZIONI (SEMPlici)

N° delle DISPOSIZ.

SEMPlici di "m" oggetti

a gruppi di "k" ($k \leq m$)



Ogni gruppo è diverso dagli altri :

- per gli elementi che contiene (ALMENO 1 $\neq$)
- per l'ORDINE degli elementi

$$D_{m,k} = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \dots \cdot (m-k+1)$$

ESEMPIO :

Quanti modi si possono accostare 7 palline di colore $\neq$ in gruppi da 4?

$$D_{7,4} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$$

$$m - k + 1 = 7 - 4 + 1 = 4$$

DISPOSIZIONI CON RIPETIZIONE

$$D_{m,k}^r \quad (k \geq m)$$

2

I gruppi differiscono:

- per gli elementi
 - per l'ORDINE
- } MA UN ELEMENTO PUÒ COMPARE più di una volta

$$D_{m,k}^r = m^k$$

ESEMPIO: Quante colonne del Totocalcio possiamo compilare con i simboli 1, 2, X?

$$D_{3,13}^r = 3^{13} = 1.594.323$$

Se $m=k$ $\Rightarrow$ PERMUTAZIONI (semplici, ripetute)
(allineamenti che si ottengono scambiando di posto agli "m" oggetti)

PERMUTAZIONI SEMPLICI

$$P_m = m! = m \cdot (m-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$$

ESEMPIO: In quanti modi si possono disporre 6 persone in fila?

$$P_6 = 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$$

PERMUTAZIONI CON RIPETIZIONE

$$P_m(h, k, \dots) = \frac{m!}{h! \cdot k! \cdot \dots}$$

permutazioni di m elementi di cui h, k, ... RIPETUTI

I gruppi differiscono x l'ORDINE e x IL POSTO OCCUPATO dagli elementi ripetuti

ESEMPIO: In quanti modi, lanciando successivamente una moneta per 6 volte, può presentarsi la successione di 2T e 4C?

$$P_6^{(2,4)} = \frac{6!}{2! \cdot 4!} = \frac{\cancel{6} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{\cancel{2} \cdot \cancel{1} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}} = 15$$

$$0! = 1$$

$$1! = 1$$

$$n! = n \cdot (n-1)!$$

$$D_{m,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

COMBINAZIONI SEMPLICI $C_{m,k}$ ($k \leq n$) (n elementi distinti presi k a k , senza ripetizioni, come se si scelgano gli elem. tra gli " n ".)

$$C_{m,k} = \frac{D_{m,k}}{P_k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!}$$

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!} = \binom{n}{k} \text{ COEFFIC. BINOMIALE } (n \text{ su } k)$$

$$\binom{n}{n} = 1 \quad \binom{n}{0} = 1 \quad \binom{0}{0} = 1$$

ESEMPIO: In quanti modi possiamo scegliere 3 aperitivi da offrire fra 7 a disposizione?

$$C_{7,3} = \binom{7}{3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3!} = \frac{\cancel{7} \cdot \cancel{6} \cdot \cancel{5}}{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}} = 35$$

$$n-k+1 = 7-3+1 = 5$$

COMBINAZIONI CON RIPETIZIONE

$$C_{m,k}^r \quad (k \leq m) \quad 4$$

Sono tutti i possibili gruppi che si possono formare con k elementi, presi fra gli " m "; ogni elemento di un gruppo può essere ripetuto fino a k volte, non interessa l'ORDINE con cui gli elementi si presentano ed è diverso il n° delle volte con cui un elemento compare

$$C_{m,k}^r = \binom{m+k-1}{k} = \frac{m \cdot (m+1) \cdot (m+2) \cdot \dots \cdot (m+k-1)}{k!}$$

ESEMPIO: In quanti modi diversi possiamo distribuire 4 oggetti in 3 scatole?

$$C_{4,3}^r = \binom{6}{3} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20$$

$$m+k-1 = 4+3-1 = 6$$

ES. 108: PAROLE ottenute con 4 lettere* scelte da 6:

↓ CONTA ORDINE

↳ DISPOSIZIONI

* prese 1 sola volta → senza ripetizione

$$D_{6,4} \text{ (possibili parole)} = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$$

$$m-k+1 = 6-4+1 = 3$$

le parole che non contengono vocali sono quelle

5
formate con le lettere B C D F scelte dalle 4 $\Rightarrow m=k$

Saranno in numero pari a $P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

La % è : $\frac{\text{parole che non contengono vocali}}{\text{parole di 4 lettere}} = \frac{P_4}{D_{6,4}}$

$$\frac{P_4}{D_{6,4}} = \frac{\cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{\underset{3}{\cancel{6}} \cdot 5 \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3}} = \frac{1}{15} = 0,06\bar{6} \dots \simeq 6,7\% \text{ (A)}$$

109

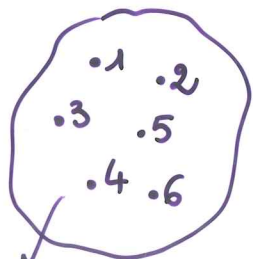


i $\neq$ seguali che può mandare
ALDO corrispondono alle possibili
permutazioni di queste
5 bandiere in cui si ripetono
colori :

$$P_5^{(2,3)} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = \frac{5 \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3}^2 \cdot \cancel{2} \cdot 1}{\cancel{2} \cdot 1 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1} = 10$$

114

⌋ sottoinsiemi di 3 elementi contenuti in un I di 6 el:
(non conta l'ordine) $\Rightarrow$ COMBINAZIONI (semplici)



in quanti modi

Si possono formare

Sottoinsiemi di 3 elementi

$$C_{6,3} = \binom{6}{3} = \frac{\cancel{6} \cdot 5 \cdot \cancel{4}^2}{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1} = 20$$

$$m - k + 1 = 6 - 3 + 1 = 4$$

STATISTICA DESCRITTIVA

6

Esempio di DISTRIBUZIONE di FREQUENZE :

MODALITÀ *	f_w FREQ. ASSOL.	f_r FREQ. RELAT.	$f_r\%$ PERCEN.	f_c FREQ. CUMULAT.	$f_r\%$ CUMUL.
2	3	$0,11 (3/27)$	11%	3	11%
3	11	0,41	41%	14	52%
4	10	0,37	37%	24	89%
5	2	0,07	7%	26	96%
6	1	0,04	4%	27	100%
	27	1	100%		

POPOLAZIONE

* m^o componenti nucleo familiare degli studenti di una classe

CARATTERE POPOLAZIONE

VALORI DI SINTESI

- INDICI DI POSIZIONE (MEDIA - MODA - MEDIANA)
- INDICI DI VARIABILITÀ (SCARTO QUADRATICO MEDIO, SCARTO SEMPLICE)

MEDIA ARITMETICA (semplice): $M = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$

MEDIA ARITMETICA (ponderata):

$x_1, \dots, x_n = \text{MODALITÀ}$

$f_1, \dots, f_n = \text{PESI (cioè } f_a \text{ delle mod.)}$

$$\bar{M} = \frac{x_1 \cdot f_1 + \dots + x_n \cdot f_n}{f_1 + \dots + f_n}$$

MEDIA GEOMETRICA (semplice): $G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}$

MEDIA QUADRATICA (semplice): $M_Q = \sqrt{\frac{(x_1)^2 + \dots + (x_n)^2}{n}}$

MODA = valore che ha la MAX frequenza (am.)
MODA (è il dato che si ripete + volte)

50, 100, 200, 200, 200, 300, 300
 MODA

MEDIANA $x_1, x_2, \dots, x_n$: SEQUENZA ORDINATA di n°
 (crescente o decrescente)

• Se n DISPARI $\Rightarrow Me$ (VALORE CENTRALE)

21, 22, 26, 28, 35
 ↑ MEDIANA

• Se n PARI $\Rightarrow Me$ (MEDIA ARITM. dei due valori centrali)

21, 22, 26, 28
 $\frac{22 + 26}{2} = \textcircled{24} Me$

In generale :

Se n DISPARI $\Rightarrow Me$ occupa il posto $\frac{n+1}{2}$

Se n PARI $\Rightarrow Me$ è media aritmetica dei valori
 ai posti $\frac{n}{2}$ e $\frac{n}{2} + 1$

Offine (con n div. in classi) $\Rightarrow Me$ è il DATO cui com =
 sponde la 1^a funz. che
 supera la metà delle osserva-
 zioni

MODAL.	f _{CUM}	f _{av}
2	3	3
<u>3</u> MODA	<u>14</u>	<u>11</u> → infatti!
4	24	10
5	26	2
6	<u>27</u>	

→ tot. osservaz $\Rightarrow$ metà = 13,5

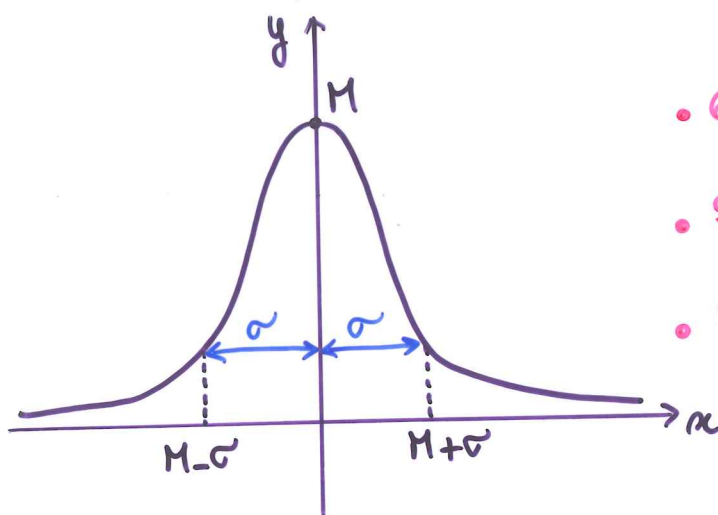
SCARTO QUADRATICO MEDIO (σ) (o deviazione standard)

$$\sigma = \sqrt{\underbrace{(x_1 - \mu)^2}_{\mu} + (x_2 - \mu)^2 + \dots + (x_n - \mu)^2}$$

↓ SCARTO dalla media

$\sigma^2 = \text{VARIANZA}$ ($\sigma = \sqrt{\text{VAR}}$)

In una distribuzione NORMALE (o GAUSSIANA) :



- 68,27% $\in (M - \sigma; M + \sigma)$
- 95,45% $\in (M - 2\sigma; M + 2\sigma)$
- 99,73% $\in (M - 3\sigma; M + 3\sigma)$

I valori si addensano intorno alla
MEDIA

Ex. 110 etã media = 24 $\bar{u} = 28$ $\bar{d} = 18$ $\frac{N_u}{N_d} = ?$

$$\bar{e} = \frac{\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_{N_u} + d_1 + d_2 + \dots + d_{N_d}}{N_u + N_d}$$

$$= \frac{\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_{N_\mu}}{N_\mu} \cdot N_\mu + \frac{d_1 + d_2 + \dots + d_{N_d}}{N_d} \cdot N_d =$$

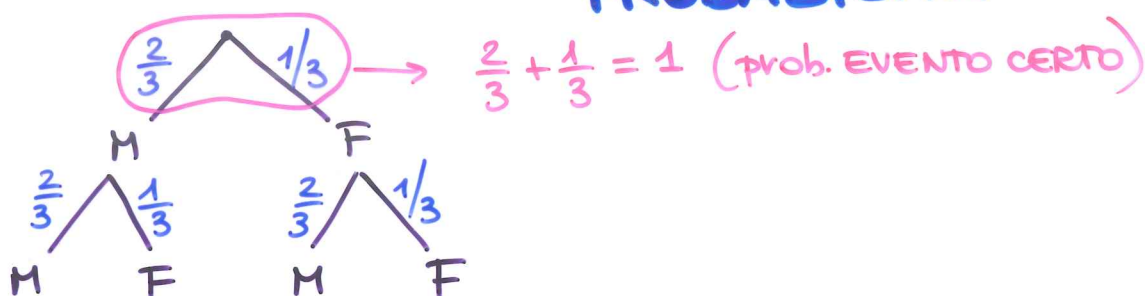
$$\Rightarrow \frac{28 N_M + 18 N_D}{N_M + N_D} = 24$$

$$28 N_M + 18 N_D = 24 N_M + 24 N_D$$

$$\frac{4 N_M}{4} = \frac{6 N_D}{4} \Rightarrow \frac{N_M}{N_D} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

111 $M = 2F$ con DIAGRAMMI AD ALBERO

PROBABILITÀ



dunque i rami metto le probabilità degli eventi:

$$P(M) = \frac{\text{N° MASCHI}}{\text{totale}} = \frac{2}{3}$$

Se posso RISORTEGGIARE $\Rightarrow$ con REIMBUSSOLAMENTO (e come rimettere la pallina nell'urna) $\Rightarrow$ P non CAMBIA!

$$P(MM) = P(M) \cdot P(M) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$$

$$P(FF) = P(F) \cdot P(F) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

$$P(FM \cup MF) = P(FM) + P(MF) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$$

$$1 - P(MM \cup FF)^* = 1 - \left(\frac{4}{9} + \frac{1}{9} \right) = \frac{4}{9}$$

* PROBABILITÀ EVENTO CONTRARIO :

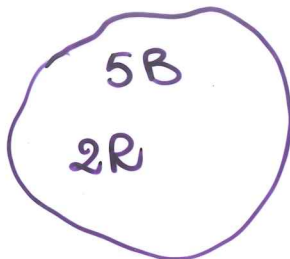
10

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

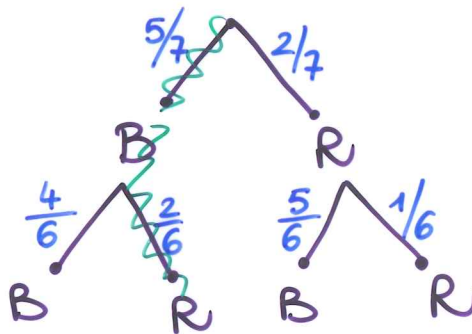
ATT! FREQUENZE STATISTICHE $\Leftrightarrow$ PROBABILITÀ

N.B Se l'estrazione fosse stata IN BLOCCO (estraggo contemporaneamente) $\Rightarrow$ EVENTI DIPENDENTI
(senza REIMBUSSOL.) $\Rightarrow$ la probab. CAMBIA (xché cambia il n° totale)

ESEMPIO :



$P(BR) = ?$ estratte CONTEMPORAN. ?



$$P(BR) = P(B) \cdot P(R) = \frac{5}{7} \cdot \frac{2}{6}$$

NO
Con il CALCOLO COMBINATORIO : $P(BR) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}}$

Casi possibili (coppie, gruppi di 2
da 7 elementi
(contando l'ordine))

$$= D_{7,2} = 7^2 = 49$$

(con ripetizione)

$$m - k + 1 = 7 - 2 + 1 = 5 + 1 = 6$$

112

REDDITO	≤ 10	≤ 20	≤ 30	≤ 50	> 50
% PERSONE	28%	47%	73%	94%	6%

11

At! questo dato comprende anche
le 28% di coloro che hanno
reddito ≤ 10

[A] redd. $< 10 = 28\%$ redd. $> 30 = (100 - 73)\% = 27\%$

[B] redd. $< 20 = 47\%$ [OK] $20 < \text{redd} < 50 = 94 - 47 = 47\%$

113 $S_1 = \{0; 2; 4; 10\}$ $S_2 = \{0; 6; 12; 30\}$

$N_1 = \text{VAR. di } S_1$ $N_2 = \text{VAR di } S_2$

$$M_1 = \frac{0+2+4+10}{4} = 4$$

$$M_2 = \frac{0+6+12+30}{4} =$$

$$= \frac{3 \cdot (0+2+4+10)}{4} = 12$$

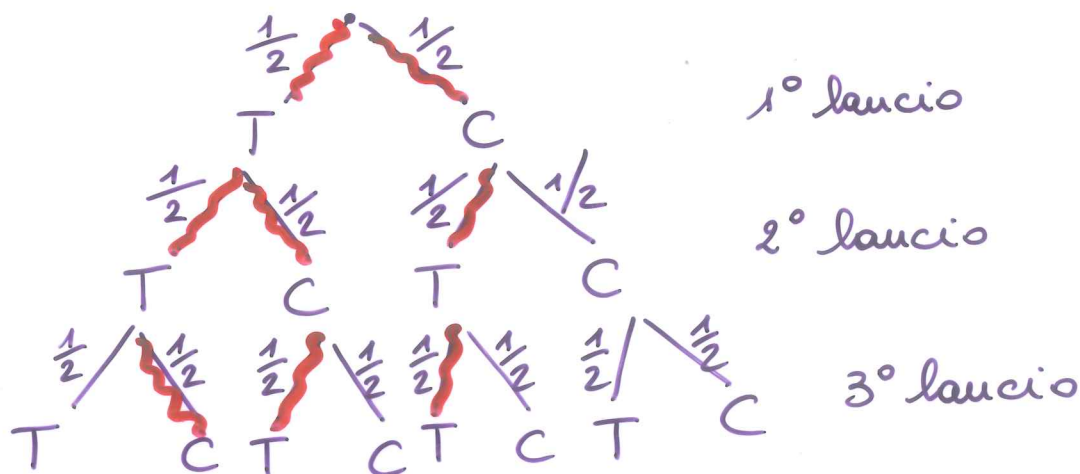
$$N_1 = \frac{(0-4)^2 + (2-4)^2 + (4-4)^2 + (10-4)^2}{4} =$$

$$= \frac{16 + 4 + 36}{4} = \frac{56}{4} = 14$$

$$N_2 = \frac{(0-12)^2 + (6-12)^2 + (12-12)^2 + (30-12)^2}{4} =$$

$$= \frac{144 + 36 + 324}{4} = 126$$

$N_2 = 126 = 14 \times 9 = N_1 \times 9 \Rightarrow$ [C]



2 teste e 1 croce $\Rightarrow p(TTC \cup TCT \cup CTT) =$

$$p(TTC) + p(TCT) + p(CTT) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8} \quad \boxed{B}$$

Att! FREQUENZA RELATIVA $\sim$ PROBABILITÀ

Casi possibili nel lancio 3 volte una moneta $\hat{=}$: 2^3

Inferenze: lancio "n" volte una moneta $\Rightarrow 2^n$

lancio "n" volte un dado $\Rightarrow 6^n$

116 Media voti $\bar{X} = 24$ (in 30 esami)

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_9}{9} = 24 \quad x_i = \text{voti esami}$$

$x_{10} = ?$ tc: Media nuova $(\bar{X})' = 24,5$

$$(\bar{X})' = 24,5 = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_9 + x_{10}}{9+1} \Rightarrow 245 = \sum_{i=1}^9 x_i + x_{10}$$