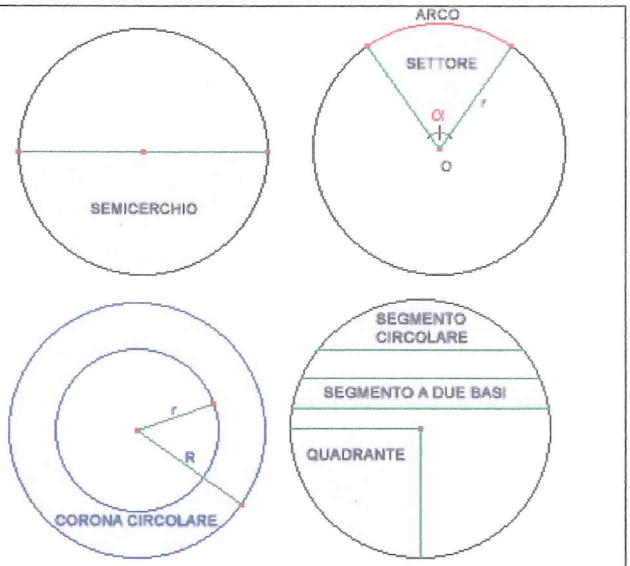
CIRCONFERENZA E CERCHIO

Lunghezza della circonferenza: $C = 2\pi r$

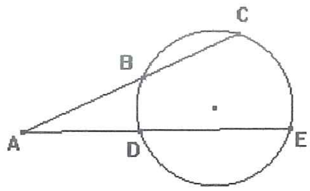
Area del cerchio: $A = \pi r^2$

Lunghezza dell'arco: $l = \dfrac{C \cdot \alpha}{360}$ con α in gradi

Area del settore circolare: $A = \dfrac{\pi r^2 \alpha}{360}$



- **Teorema della secanti**: $AC \cdot AB = AE \cdot AD$



POLIGONI REGOLARI

- Proprietà: ogni poligono regolare è inscrittibile e circoscrittibile, e le due circonferenze hanno lo stesso centro.
- Si dice **apotema** di un poligono regolare il raggio del cerchio inscritto nel poligono.
- Proprietà: in ogni poligono regolare il rapporto tra l'apotema a e il lato l è costante. Tale costante è un *numero fisso*: $f = \dfrac{a}{l}$

NUMERO FISSO f			
Triangolo	0,289	Quadrato	0,5
Pentagono	0,688	Esagono	0,866
Ettagono	1,038	Ottagono	1,207
Ennagono	1,374	Decagono	1,539

- In generale in un **poligono regolare** con n lati di lato l e apotema a: $A = p \cdot a$ (p semiperimetro)
- **Area di un poligono circoscritto ad una circonferenza** di raggio r: $A = p \cdot r$ (p semiperimetro)

TRIANGOLI

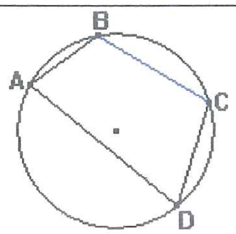
- **Teorema di Erone:** $A = \sqrt{p \cdot (p - AB) \cdot (p - BC) \cdot (p - AC)}$ (p semiperimetro)
- **Teoremi di Euclide**: In un triangolo rettangolo:
  1. Un cateto è medio proporzionale tra la sua proiezione sull'ipotenusa e l'ipotenusa stessa
  2. L'altezza relativa all'ipotenusa è media proporzionale tra le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa

QUADRILATERI

Area di un quadrilatero:
$A = \dfrac{1}{2} AD \cdot \overline{AB} \cdot sen\alpha$

Condizione di inscrittibilità: $\widehat{A} + \widehat{C} = \widehat{B} + \widehat{D}$ $= 180°$

Condizione di circoscrittibilità: $AD + BC = AB + DC$



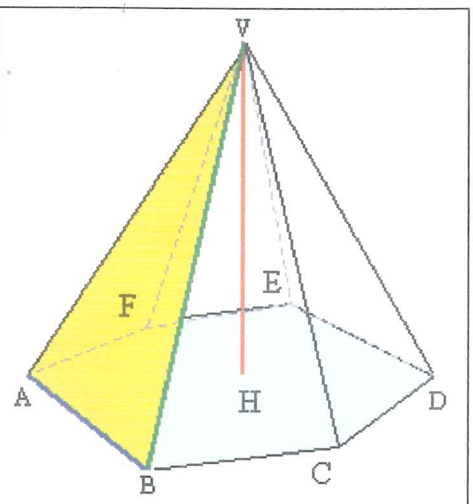
PIRAMIDE E TRONCO DI PIRAMIDE

PIRAMIDE

La **piramide** è un poliedro limitato da un poligono qualsiasi e da tanti triangoli quanti sono i lati di questo poligono, aventi tutti un vertice in comune.

- Una **piramide** si dice **retta** se il poligono di base è circoscrittibile a una circonferenza e il piede dell'altezza coincide con il centro di questa circonferenza.
- L'**apotema di una piramide retta** è l'altezza di una delle sue facce.
- Una **piramide** si dice **regolare** se è retta ed il poligono di base è un poligono regolare.

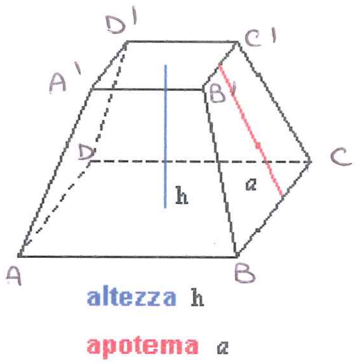
- **Superficie Laterale**: $S_L = p \cdot a$ p = SEMIPERIMETRO
- **Superficie Totale**: $S_T = S_L + A_b$
- **Volume**: $V = \dfrac{A_b \cdot h}{3}$



TRONCO DI PIRAMIDE

Tagliando una piramide con un piano parallelo alla base si ottengono due solidi: uno è ancora una piramide, l'altro è un **tronco di piramide**.
I due poligoni che lo delimitano costituiscono le **basi** del tronco di piramide, e le **facce laterali** sono dei trapezi. La distanza tra le basi è l'**altezza** del solido.

- Le facce laterali di un tronco di piramide regolare sono tutti trapezi isosceli congruenti.
- L'altezza di uno qualsiasi di questi trapezi è l'**apotema** del tronco di piramide.
- **Superficie Laterale**: $S_L = (p + p') \cdot a$
- **Superficie Totale**: $S_T = S_L + (A_b + A_b')$
- **Volume**: $V = \dfrac{h}{3} \cdot \left(A_b + A_b' + \sqrt{A_b \cdot A_b'}\right)$



PRISMA - PARALLELEPIPEDO – CUBO

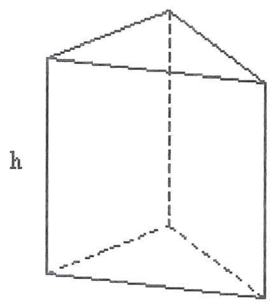
PRISMA

Il **prisma** è un poliedro limitato da due poligoni uguali e paralleli (basi) e da tanti parallelogrammi (facce laterali) quanti sono i lati del poligono di base.

- **prisma retto**: se tutte le facce laterali sono perpendicolari alle basi e l'altezza coincide con uno degli spigoli
- **prisma regolare**: se è retto e le basi sono poligoni regolari (le facce laterali sono rettangoli uguali fra loro).

Prisma retto:

- **Superficie Laterale**: $S_L = 2p \cdot h$
- **Superficie Totale**: $S_T = 2A_B + S_L$
- **Volume**: $V = A_B \cdot h$



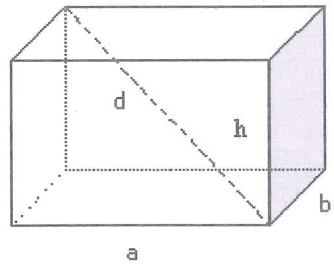
PARALLELEPIPEDO

Un **parallelepipedo** è un prisma le cui basi sono dei parallelogrammi.

- **parallelepipedo retto**: se tutte le sue facce sono perpendicolari alle basi (le facce sono dei rettangoli e le basi dei parallelogrammi)

- **Diagonale:** $d = \sqrt{a^2 + b^2 + h^2}$
- **Superficie Laterale**: $S_L = 2p \cdot h$

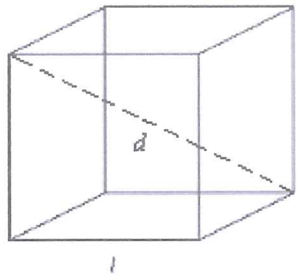
- **Superficie Totale**: $S_T = S_L + 2 \cdot A_b$
- **Volume**: $V = (b \cdot a) \cdot h$



CUBO

Il **cubo** è un parallelepipedo rettangolo con le tre dimensioni uguali tra loro. Il cubo è un <u>poliedro regolare</u> limitato da sei facce quadrate (esaedro). d

- **Superficie Laterale**: $S_L = 4l^2$
- **Superficie Totale**: $S_T = 6l^2$
- **Volume**: $V = l^3$

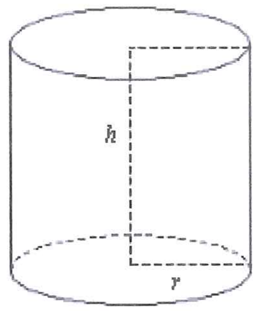


CILINDRO – CONO

CILINDRO

Il **cilindro** è un solido ottenuto dalla rotazione completa di un rettangolo intorno ad un suo lato.

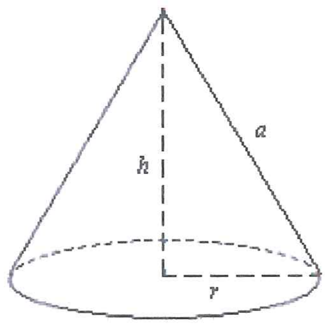
- **Cilindro equilatero:** è un cilindro in cui l'altezza è lunga quanto il diametro della base.
- **Superficie Laterale**: $S_L = 2\pi r \cdot h$
- **Superficie Totale**: $S_T = 2\pi r \cdot h + 2\pi r^2$
- **Volume**: $V = \pi r^2 \cdot h$



CONO

Il **cono** è un solido ottenuto dalla rotazione di un triangolo intorno ad un suo cateto.

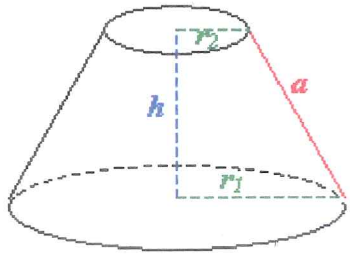
- **Cono equilatero:** è un cono in cui l'apotema è lungo quanto il diametro.
- **Superficie Laterale**: $S_L = \pi r \cdot a$
- **Superficie Totale**: $S_T = \pi r \cdot a + \pi r^2$
- **Volume**: $V = \dfrac{\pi r^2 \cdot h}{3}$



TRONCO DI CONO

Tagliando un cono con un piano parallelo alla base si ottengono due solidi: uno è ancora un cono, l'altro è un **tronco di cono**.
I due poligoni che lo delimitano costituiscono le **basi** del tronco di cono. La distanza tra le basi è l'**altezza** del solido.

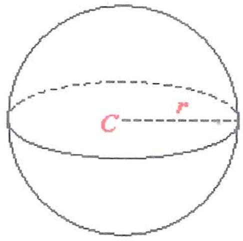
- **Superficie Laterale**: $S_L = \pi (r_1 + r_2) \cdot a$
- **Superficie Totale**: $S_T = \pi (r_1 + r_2) \cdot a + \pi r_1^2 + \pi r_2^2$
- **Volume**: $V = \dfrac{\pi h}{3} \left(r_1^2 + r_2^2 + r_1 \cdot r_2 \right)$



SFERA

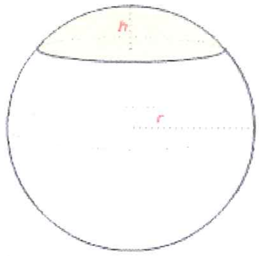
SFERA

- Superficie: $S = 4\pi r^2$
- Volume: $V = \dfrac{4\pi r^3}{3}$



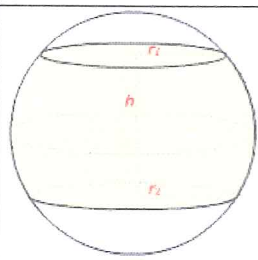
CALOTTA SFERICA

- Superficie: $S = 2\pi r \cdot h$
- Volume: $V = \dfrac{\pi h^2}{3}(3r - h)$



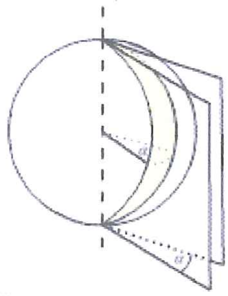
ZONA SFERICA

- Superficie: $S = 2\pi r \cdot h$ con r raggio della sfera
- Volume: $V = \dfrac{\pi h}{2}\left(\dfrac{h^2}{3} + r_1^2 + r_2^2\right)$



FUSO SFERICO

- Superficie: $S = \dfrac{\pi r^2 \cdot \alpha^\circ}{90}$
- Volume: $V = \dfrac{\pi r^3 \cdot \alpha^\circ}{270}$



Terzo modulo: Geometria analitica
Obiettivi

1. conoscere le nozioni fondamentali della geometria analitica del piano e dello spazio
2. interpretare geometricamente equazioni e sistemi algebrici di primo e di secondo grado
3. conoscere equazioni e disequazioni che definiscono semplici luoghi geometrici (circonferenza, cerchio, ellisse, parabola, iperbole, ecc.)
4. tradurre analiticamente semplici proprietà e problemi geometrici

Prerequisiti

1. equazioni, disequazioni, sistemi
2. concetto di piano cartesiano

1 Il piano cartesiano

Un sistema di riferimento nel piano cartesiano, costituito da due assi ortogonali su cui è stata individuata un'unità di misura, consiste in una associazione biunivoca tra punti del piano e le coppie ordinate di numeri reali (x;y).
Definizione 1.1 Data un'equazione in due incognite $F(x,y)=0$, si chiama luogo dei punti del piano l'insieme di tutti i punti le cui coordinate soddisfano l'equazione data.
Ricorda

- Per verificare che un punto appartiene a un luogo è sufficiente sostituire le sue coordinate nell'equazione stessa.
- Per calcolare il punto di intersezione di due curve (o rette) è sufficiente trovare le soluzioni comuni alle equazioni, cioè fare il sistema tra le due equazioni.
- La distanza tra due punti $A(x_A;y_A)$ e $B(x_B;y_B)$ è data da $\overline{AB}=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$
- Il punto medio del segmento AB è dato da $M(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2})$

2 La retta

Un'equazione di primo grado è sempre rappresentata da una retta. Per

disegnare una retta basta determinare le coordinate di due suoi punti.
L'equazione generale della retta è $ax + by + c = 0$.
Se $b \neq 0$ si può riscrivere nella forma equivalente $y = mx + q$ dove m è il coefficiente angolare e q l'ordinata all'origine.
Il coefficiente angolare delle rette passanti per A e B è dato da $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$
L'ordinata all'origine rappresenta l'ordinata del punto $Q(0; q)$ in cui la retta interseca l'asse y.
Le rette $y = m_1 x + q_1$ e $y = m_2 x + q_2$ sono

- parallele se e solo se $m_1 = m_2$
- perpendicolari se e solo se $m_2 = -\frac{1}{m_1}$.

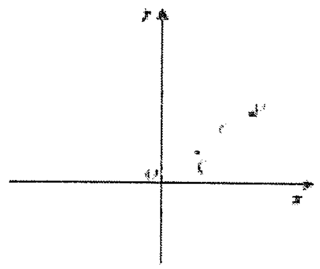
$y = 4x + q$ rappresenta tutte le rette parallele con coefficiente angolare 4.
$y - y_1 = m \cdot (x - x_1)$ è l'insieme di tutte le rette passanti per lo stesso punto $P(x_1; y_1)$.
L'equazione della retta passante per due punti $P(x_1; y_1)$ e $Q(x_2; y_2)$ è data da $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$ quando $x_1 \neq x_2$ e $y_1 \neq y_2$.

2 Le coniche

Un'equazione di secondo grado è sempre rappresentata da una conica. Queste curve si chiamano coniche perché sono ottenute tramite l'intersezione di una superficie conica con un piano. Si possono definire tutte come luoghi geometrici e, di conseguenza, ricavarne l'equazione algebrica che le rappresenta nel piano cartesiano. Una conica può essere una circonferenza, un'ellisse, una parabola, un'iperbole.

Circonferenza

La circonferenza è il luogo geometrico dei punti equidistanti da un punto C, detto centro. Si ottiene tagliando un cono con un piano perpendicolare al suo asse. La distanza fra ognuno dei suoi punti e il centro è il raggio della circonferenza.



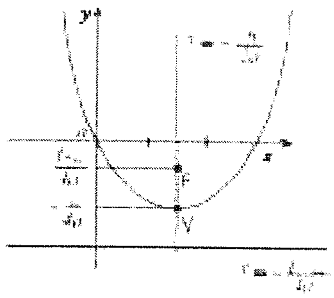
Note le coordinate del centro $C(\alpha; \beta)$ e la misura r del raggio, l'equazione della circonferenza è $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$.

L'equazione generale della circonferenza è $x^2+y^2+ax+by+c=0$ dove a, b e c sono legati alle coordinate del centro $C(\alpha;\beta)$ ed al raggio dalle seguenti relazioni:

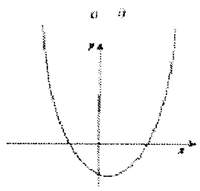
$$\begin{cases} \alpha = -\frac{a}{2} \\ \beta = -\frac{b}{2} \\ r = \sqrt{(-\frac{a}{2})^2 + (-\frac{b}{2})^2 - c} \end{cases} \qquad \begin{cases} a = -2\alpha \\ b = -2\beta \\ c = \alpha^2 + \beta^2 - r^2 \end{cases}$$

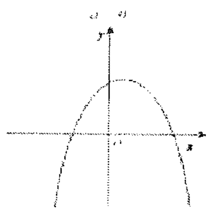
Parabola

La parabola è il luogo geometrico dei punti equidistanti da una retta (direttrice) e da un punto (fuoco). La retta passante per il fuoco e perpendicolare alla direttrice si chiama asse della parabola. L'asse della parabola è un asse di simmetria e interseca la parabola nel vertice.
Una parabola con asse parallelo all'asse y è rappresentata da un'equazione del tipo $y = ax^2 + bx + c$ con $a \neq 0$.



Concavità e apertura della parabola dipendono dal parametro a.



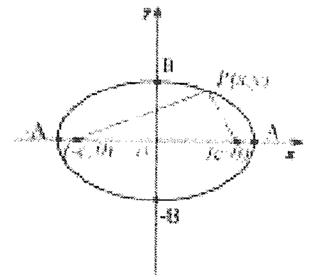


Per l'ellisse e l'iperbole richiamiamo solo brevemente la forma delle loro equazioni e le relazioni che legano le coordinate dei punti caratteristici per la loro determinazione come luoghi geometri.

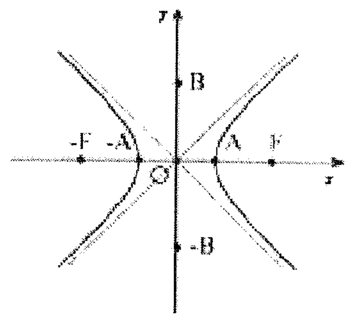
Ellisse

Equazione dell'ellisse riferita al centro degli assi cartesiani $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.
Centro $O(0;0)$.
Fuochi $F_1(-c;0)$ e $F_2 = (c;0)$ essendo $c^2 = a^2 - b^2$.
Vertici $A(a;0)$, $B(0;b)$, $-A$, $-B$.
$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$.

Ricorda
L'eccentricità e indica la forma più o meno schiacciata dell'ellisse: $0 \leq e < 1$.
Quanto vale nella circonferenza?



Iperbole
Equazione dell'iperbole riferita al centro degli assi cartesiani $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.
Centro $O(0;0)$.
Fuochi $F_1(-c;0)$ e $F_2 = (c;0)$ essendo $c^2 = a^2 + b^2$.
Vertici $A(a;0)$, $B(0;b)$, $-A$, $-B$.
Asintoti $y = \pm\frac{b}{a}x$.
$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$.
Per l'iperbole è $e > 1$.



Tangenti a una conica
Una retta ed una conica possono essere secanti, tangenti o esterne l'una rispetto all'altra.
Dato il sistema formato dall'equazione della conica e da quella della retta, nell'equazione di secondo grado che lo risolve (ricavando una delle due variabili in funzione dell'altra), abbiamo le tre possibili alternative:

- $\Delta > 0$, la retta è secante;
- $\Delta = 0$, la retta è tangente;

- $\Delta < 0$, la retta è esterna.

Dato un punto $P(x_0; y_0)$ e una conica di equazione $ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$ si possono verificare le tre condizioni:

- P è esterno alla conica, le rette per P tangenti sono due[1];
- P appartiene alla conica, la retta tangente è una sola[2];
- P è interno alla conica, non esistono rette tangenti uscenti da P.

Per determinare le equazioni delle eventuali rette tangenti, si può procedere come segue:

- si determina l'equazione dell'insieme delle rette passanti per $P(x_0; y_0)$, ovvero $y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$;
- si scrive il sistema fra le equazioni dell'insieme delle rette passanti per P e la conica;
- con il metodo di sostituzione si ottiene quindi un'equazione di secondo grado nella variabile x con m come parametro;
- si impone la condizione di tangenza, ossia $\Delta = 0$; questo porta ad un'equazione di secondo grado nella variabile m;
- si risolve l'equazione di secondo grado rispetto a m;
  ✓se ci sono due soluzioni distinte, allora le rette tangenti sono due e il punto P è esterno alla circonferenza;
  ✓se ci sono due soluzioni coincidenti, allora la retta tangente è una sola e il punto P appartiene alla circonferenza;
  ✓se non ci sono soluzioni reali, allora non esistono rette tangenti e il punto P è interno alla circonferenza;
- si sostituisce il valore o i valori trovati di m nell'equazione del fascio di rette.

Esempio 2.1

Data la parabola di equazione $y = x^2 + 2x + 4$, determinare le equazioni delle rette passanti per il punto $P(-2; 0)$ e tangenti alla parabola.
L'equazione dell'insieme delle rette passanti per P è $y = m(x + 2)$.

Mettiamo a sistema l'equazione della retta con quella della parabola $\begin{cases} y = m(x+2) \\ y = x^2 + 2x + 4 \end{cases}$
ed otteniamo l'equazione di secondo grado $x^2 + (2 - m)x + 4 - 2m = 0$.
Imponiamo la condizione di tangenza $\Delta = 0$, ovvero $\Delta = (2 - m)^2 - 4(4 - 2m) = 0$ che diventa $m^2 + 4m - 12 = 0$.
Risolviamo l'equazione di secondo grado in m e determiniamo due soluzioni $m_1 = -6$ e $m_2 = 2$.
Esistono, quindi, due rette angenti alla parabola e passsanti per P, rispettivamente di equazione $y = -6x - 12$ e $y = 2x + 4$.

[1] perchè le intersezioni sono due
[2] perchè l'intersezione è una