

Esponenziali e logaritmi

Prerequisiti

Proprietà delle potenze

Concetto di equazione e disequazione

Concetto di funzione

Obiettivi:

definizione di logaritmo,

proprietà.

Conoscere l'andamento grafico e le principali proprietà della funzione logaritmica ed esponenziale.

Risolvere equazioni e disequazioni esponenziali, logaritmiche.

Potenze con esponente reale

La potenza a^x è definita:

- se $a > 0$, per ogni $x \in \mathbf{R}$;
- se $a = 0$, per tutti e soli gli $x \in \mathbf{R}^+$
- se $a < 0$, per tutti e soli gli $x \in \mathbf{Z}$.

Funzione esponenziale

Si chiama *funzione esponenziale* ogni funzione del tipo :

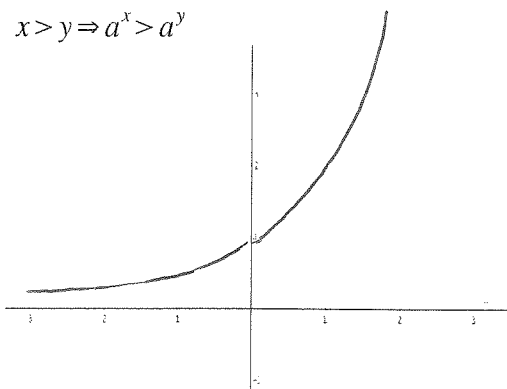
$$y = a^x, \text{ con } a > 0 \text{ fissato, } x \in \mathbf{R}.$$

- Il *dominio* della funzione, cioè l'insieme dei valori che si possono attribuire a x è tutto $\mathbf{R}$;
- il *codominio*, cioè l'insieme dei valori che la funzione assume è $\mathbf{R}^+$ (la funzione esponenziale è sempre strettamente positiva).

Si distinguono due casi

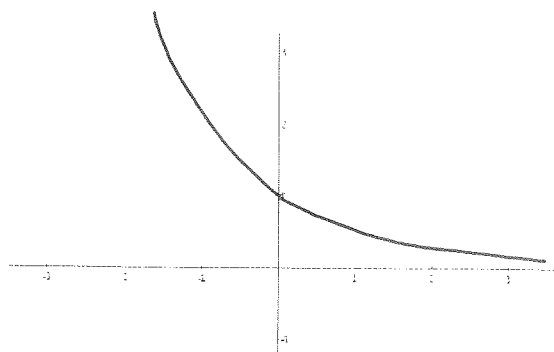
$a > 1$: funzione crescente

$$x > y \Rightarrow a^x > a^y$$



$0 < a < 1$: funzione decrescente

$$x > y \Rightarrow a^x < a^y$$



Proprietà degli esponenziali

Per le proprietà degli esponenziali ci si rifà a quelle delle potenze già elencate in un precedente modulo

Si chiama **logaritmo in base a di b** l'unica soluzione dell'equazione esponenziale elementare nel caso determinato, cioè l'esponente x da assegnare alla base a per ottenere il numero b .

$$a^x = b$$



a = base dell'esponenziale
e del logaritmo

$$x = \log_a b$$

Il logaritmo risulta essere l'operazione inversa dell'esponenziale, pertanto le limitazioni cui è soggetta l'esponenziale si riflettono sul logaritmo: fissata la base $a > 0$, deve essere $b > 0$.

Valgono i casi particolari:

- $\log_a 1 = 0$, poichè $a^0 = 1$
- $\log_a a = 1$, poichè $a^1 = a$.

Funzione logaritmica

Si chiama *funzione logaritmica* ogni funzione del tipo :

$$y = \log_a x, \text{ con } a > 0 \text{ e } a \neq 1 \text{ fissato, } x \in \mathbf{R}^+$$

La funzione logaritmica è l'inversa dell'esponenziale, pertanto *dominio* e *codominio* risultano scambiati rispetto a quelli della funzione esponenziale.

- Il *dominio* della funzione, cioè l'insieme dei valori che si possono attribuire a x è $\mathbf{R}^+$;
- il *codominio*, cioè l'insieme dei valori che la funzione assume è $\mathbf{R}$.

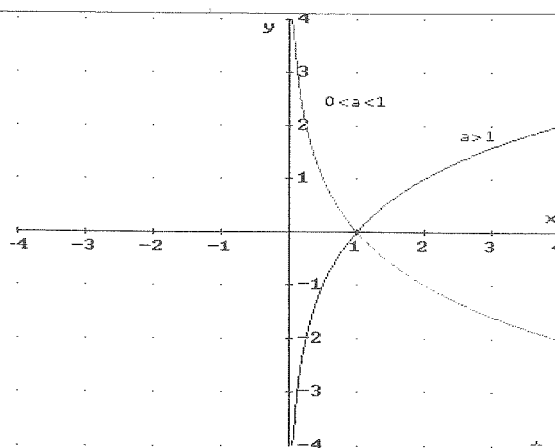
Si distinguono due casi:

- $a > 1$: funzione crescente : $x > y \Rightarrow \log_a x > \log_a y$;
- $0 < a < 1$: funzione decrescente : $x > y \Rightarrow \log_a x < \log_a y$;

I grafici della funzione logaritmica si ottengono da quelli della funzione esponenziale per simmetria rispetto alla bisettrice del I e III quadrante ($y = x$).

I grafici illustrano il comportamento della funzione logaritmica $y = \log_a x$ nei due casi :

- $a > 1$
- $0 < a < 1$



Proprietà dei logaritmi.

- 1) $\log_a x^y = y \cdot \log_a x$ ($x > 0, y > 0, a > 0$) $\log_a a = 1$
- 2) $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$ $\log_a 1 = 0$
- 3) $\log_a (x/y) = \log_a x - \log_a y$
- 4) $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ (FORMULA CAMBIAMENTO BASE)

I logaritmi che compaiono sulle calcolatrici sono in base $a=10$ oppure in base $a=e \approx 2,718$:
 $\log x$ indica il $\log_{10} x$, detto anche logaritmo decimale; $\ln x$, indica il $\log_e x$, detto anche logaritmo naturale o neperiano.

Equazioni esponenziali

Un'equazione si dice *esponenziale* quando l'incognita compare soltanto nell'esponente di una o più potenze.

L'equazione esponenziale più semplice (elementare) è del tipo :

$$a^x = b, \text{ con } a > 0 \text{ e } b > 0; x \text{ è l'incognita dell'equazione.}$$

Un'equazione esponenziale del tipo $a^x = b$ può essere

- *impossibile* se $b \leq 0$, oppure $b \neq 1$ e $a = 1$;
- *verificata da ogni valore reale di x* se $a = 1$, $b = 1$;
- *determinata* se $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$;

Equazioni logaritmiche

Un'equazione si dice *logaritmica* quando l'incognita compare soltanto nell'argomento di uno o più logaritmi.

L'equazione logaritmica più semplice (elementare) è del tipo :

$\log_a x = b$, con $a > 0$ e $b \in R$; $x > 0$ è l'incognita dell'equazione .

La sua soluzione, per quanto detto a proposito dell'equazione esponenziale, è : $x = a^b$.

Per risolvere un'equazione logaritmica conviene:

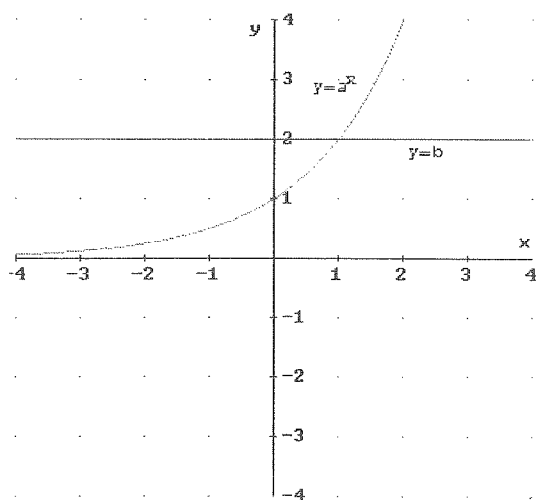
1. (quando è possibile) trasformare l'equazione data in una equivalente del tipo $\log_a A(x) = \log_a B(x)$, applicando le proprietà dei logaritmi (vedi appendice) determinare le soluzioni dell'equazione $A(x) = B(x)$;
2. eseguire il controllo mediante verifica diretta dei valori di x calcolati al punto 2 ;
3. in alternativa al punto 3, associare all'equazione di cui al punto 2 tutte le condizioni di esistenza sui logaritmi (ricordiamo che un logaritmo è definito soltanto per valori positivi del suo argomento), per selezionare le soluzioni accettabili.

Disequazioni esponenziali e logaritmiche

Le disequazioni esponenziali si presentano nella forma: $a^x < b$ oppure $a^x > b$

Risolvere queste disequazioni significa stabilire per quali valori di x la curva esponenziale si trova rispettivamente al di sotto o al di sopra della retta $y = b$:

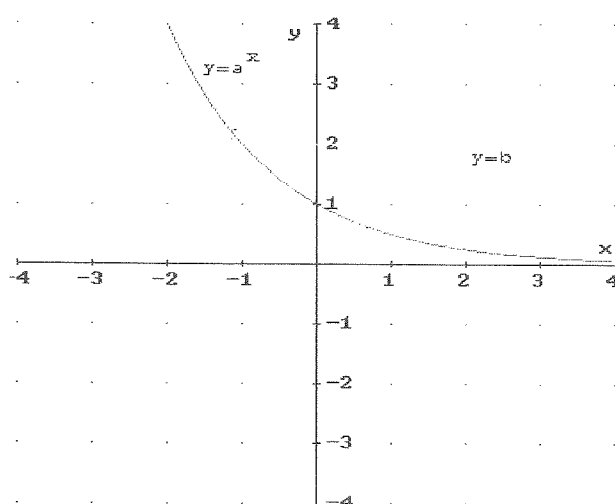
se $a > 1$



$$a^x > b \quad \text{per } x > \log_a b$$

$$a^x < b \quad \text{per } x < \log_a b$$

Ne l caso $0 < a < 1$



$$a^x > b \quad \text{per } x < \log_a b$$

$$a^x < b \quad \text{per } x > \log_a b$$

Nel caso $a > 1$ se $b < 0$ (e cioè la retta si trova nel semipiano delle ordinate negative),

- la disequazione $a^x < b$ non ammette soluzioni reali
- la disequazione $a^x > b$ è verificata per ogni valore reale di x

Un discorso analogo vale per le disequazioni logaritmiche

Il grafico che segue rappresenta le due situazioni nel caso

- $a > 1$
- $0 < a < 1$

$$\log_a x > b \quad \text{oppure} \quad \log_a x < b$$

hanno soluzioni solo positive ($x > 0$ per l'esistenza del logaritmo), mentre possono avere soluzioni per ogni valore reale di b

