Primo modulo: Aritmetica

Obiettivi

1. ordinamento e confronto di numeri;
2. riconoscere la rappresentazione di un numero in base diversa dalla base 10;
3. conoscere differenza tra numeri razionali e irrazionali;
4. frazioni equivalenti;
5. saper utilizzare le proprietà delle potenze;
6. calcolare percentuali.

Prerequisiti

1. le operazioni fra i numeri;
2. fattorizzazione numeri primi;
3. MCD e mcm;
4. rappresentare un numero razionale in forma decimale;
5. rappresentare un numero decimale come numero intero moltiplicato per una opportuna potenza di 10[1];
6. divisione fra polinomi.

1 Numeri naturali

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots\}.$$

Definizione 1.1 *Dato $a \in \mathbb{N}$ definiamo $a^0 = 1$, $a^1 = a$, $a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ volte}} = a^{n-1}a$.*

Proprietà delle potenze:

1. $a^m a^n = a^{m+n}$;
2. $(a^m)^n = a^{mn}$;
3. $(ab)^m = a^m b^m$;

[1] Ad esempio, $0,000735 = 735 \cdot 10^{-6}$

Fattorizzazione di un numero naturale
Se $p = nm$, diciamo che:

- p è multiplo di m e n;
- p è divisibile per m e n;
- m e n sono divisori di p.

Definizione 1.2 *Un numero naturale $p > 1$ si dice* primo *se non ammette divisori diversi da 1 e da p.*

Teorema 1.1 *Ogni numero naturale n si fattorizza in modo unico come prodotto di numeri primi, ciascuno dei quali elevati ad una potenza opportuna.*

Esempio 1.1

$$7 = 7, \qquad 15 = 3 \cdot 5, \qquad 32 = 2^5, \qquad 108 = 2^2 \cdot 3^3.$$

Conversione tra sistemi diversi di numerazione
Il numero naturale 357 può essere scritto anche come $3 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0$. È talvolta utile scrivere un certo numero utilizzando come numero base un numero diverso da 10. È importante quindi sapere passare da una base ad un'altra nella scrittura di un numero.

Esempio 1.2 Scrivere il numero 36 in base 2 e in base 8. Siccome $36 = 2^5 + 2^2$ abbiamo che 36 in base 2 si scrive 100100. Siccome $36 = 4 \cdot 8^1 + 4 \cdot 8^0$, allora 36 in base 8 si scrive 44. Viceversa, che numero viene scritto come 1221 in base 3? Abbiamo che il numero equivale a $3^3 + 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^1 + 3^0 = 52$.

2 Numeri interi relativi

$$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3 \ldots, n, -n, \ldots\}.$$

I numeri interi si introducono per comodità: un debito di 10 euro può essere descritto come un credito di -10 euro (permettendo così di esprimere tutto in un solo modo, cioè in termini di crediti).

Ricorda

- se $a \in \mathbb{Z}$, non è detto che $-a < 0$;
- se $a \in \mathbb{Z}$ $ab < ac$ non è in genere equivalente a $b < c$, cioè non si può semplificare mantenendo lo stesso segno: se $a > 0$ allora la disuguaglianza si mantiene, altrimenti si inverte.

3 Numeri razionali

$$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}.$$

Osservazioni 3.1 1. La scrittura di un numero razionale non è univoca: $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$, $\frac{-1}{2} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$, per convenzione se il numero è negativo abbiamo scritto che nel quoziente il numero negativo sta al numeratore;

2. per confrontare numeri razionali conviene innanzitutto averli scritti nella stessa forma (come frazione o come numero decimale). Il confronto tra numeri decimali è immediato, per confrontare due frazioni, che non si riesce ad ordinare immediatamente[2] si possono portare in forma decimale, cosa che conviene fare se si ha una calcolatrice, oppure scriverle entrambe in maniera equivalente con lo stesso denominatore e confrontare i numeratori;

Proporzioni

Una proporzione è una uguaglianza di due rapporti tra grandezze a due a due omogenee, o tra le loro misure.
In una proporzione $A : B = C : D$ i termini A e C si chiamano antecedenti, i termini B e D conseguenti; A e D si dicono estremi, B e C medi.

Proporzionalità

Proporzionalità diretta
Due classi di grandezze X e Y si dicono fra loro direttamente proporzionali se esiste una costante k, non nulla, tale che, per ogni x e y appartenenti a X e Y, sia $y = kx$.

Proporzionalità inversa
Due classi di grandezze X e Y si dicono fra loro inversamente proporzionali se esiste una costante k, non nulla, tale che, per ogni x e y appartenenti a X e Y, sia $x \cdot y = k$.

Proprietà delle proporzioni

- Fondamentale:
  In una proporzione il prodotto dei medi è uguale al prodotto degli estremi.
  Da $A : B = C : D$ segue $A \cdot D = B \cdot C$
- Invertire:
  Da $A : B = C : D$ segue $B : A = D : C$

[2] Ad esempio è ovvio che $\frac{2}{5} < \frac{4}{3}$, dal momento che la prima frazione è ovviamente < 1, la seconda maggiore

- Permutare i medi o gli estremi:
  Da $A : B = C : D$ segue $A : C = B : D$
  Da $A : B = C : D$ segue $D : B = C : A$

Percentuali

Una percentuale è una frazione, cioè un rapporto tra due grandezze con denominatore 100. Per calcolarla si può utilizzare una proporzione, oppure cercare di ridurre il denominatore della frazione a 100 mediante la proprietà invariantiva.
Se si vuole stabilire che percentuale rappresenta x rispetto ad a avremo la proporzione $percentuale P : 100 = x : a$.
La percentuale esprime quindi la frazione: $P = \frac{100x}{a}$ e può essere scritta come $P\%$ oppure $\frac{P}{100}$ oppure in numero decimale, ad esempio $P = \frac{3}{20} = \frac{15}{100} = 0,15 = 15\%$.

Notazione scientifica

Un numero x si dice espresso in notazione scientifica se viene scritto nella forma $x = a \cdot 10^b$, dove a è un numero con una sola cifra diversa da zero prima del punto decimale, mentre b è un numero intero.
La notazione scientifica è spesso utilizzata per esprimere valori molto grandi o molto piccoli. Ad esempio 10^4 equivale a 10000; 10^{-3} a 0,001; il numero di molecole che stanno in una mole (costante di Avogadro), che vale circa 6 seguito da 23 zeri, è scritto come $6,02 \cdot 10^{23}$.

4 Numeri reali

Non tutte le grandezze fisiche e geometriche descrivibili con un numero possono essere descritte da un numero razionale. Ad esempio, il rapporto tra lunghezza della circonferenza e suo diametro, o fra il lato e la diagonale di un quadrato, non sono numeri esprimibili con frazioni. Per questo l'insieme dei numeri razionali si "allarga", con l'introduzione di un insieme più grande, chiamato insieme dei numeri reali, e denotato con $\mathbb{R}$. I numeri reali che non sono razionali si chiamano anche *irrazionali*.

Ricorda

- un numero irrazionale ha un'espressione decimale infinita e non periodica;
- la somma di un numero razionale e di uno irrazionale è irrazionale;
- le proprietà delle potenze richiamate in Definizione 1.1 valgono in generale anche se a, b sono reali. Ad esse si possono aggiungere le seguenti, avendo posto, per $a \neq 0$, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$:

1. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$;
2. $(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}$.

5 Polinomi e radici di polinomi

Dato un polinomio $P(x)$, se $a \in \mathbb{R}$ verifica $P(a) = 0$, allora a si chiama *radice* del polinomio $P(x)$.

In generale, dati $P(x)$ e $Q(x)$, con grado di P n maggiore o uguale grado di Q m, è possibile eseguire la divisione fra P e Q. Si dimostra allora che esistono unici polinomi $A(x)$ e $R(x)$ tali che:

$$P(x) = A(x)Q(x) + R(x),$$

ed il grado di A è $n - m$ mentre quello di $R(x)$ è minore di m.

Se $R(x) = 0$, allora $P(x)$ è divisibile per $Q(x)$.

Un caso interessante e particolare è quando Q assume la forma $Q(x) = x - a$. In questo caso, se il resto è zero, allora a è una radice di $P(x)$. Vale il seguente teorema:

il resto della divisione di $P(x)$ per $x - a$ è il valore $P(a)$. (teorema del resto)