Secondo modulo: Algebra

Obiettivi

1. riconoscere la risolubilità di equazioni e disequazioni in casi particolari
2. risolvere equazioni intere e frazionarie di primo grado, secondo grado, grado superiore al secondo, irrazionali
3. risolvere disequazioni intere e frazionarie di primo grado, secondo grado, grado superiore al secondo, irrazionali
4. risolvere sistemi di equazioni di primo grado, secondo grado e grado superiore al secondo
5. risolvere sistemi di disequazioni

Prerequisiti

1. calcolo con i polinomi
2. scomposizione di un polinomio in fattori primi
3. determinazione di M.C.D. e m.c.m. fra polinomi

1 Equazioni

Un'equazione è una scrittura del tipo $P(x) = Q(x)$ per la quale interessa trovare i valori della variabile x che la rendono vera. È importante osservare che va specificato in che insieme x va cercato, in genere se non specificato altrimenti si intende che x varia nei reali.

Osservazioni 1.1 Un'equazione si può sempre riportare alla forma equivalente $P(x) = 0$.

Osservazioni 1.2 Nell'espressione di $P(x)$ possono comparire, oltre alla lettera x che viene usualmente utilizzata per indicare l'incognita, anche altre lettere. Bisogna fare attenzione al fatto che alcune lettere hanno il significato di incognite, altre invece quello di parametri.

Definizione 1.1 Dato il polinomio $P(x)$, le soluzioni dell'equazione $P(x) = 0$ sono dette radici del polinomio. Un generico polinomio $P(x)$ di grado n si scrive:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

con $a_n \neq 0$. Tale espressione è detta forma normale del polinomio.

Equazioni di primo grado

La forma normale di un'equazione di primo grado è $ax + b = 0$.

Si possono presentare tre casi:

- se $a \neq 0$ allora la soluzione è $x = -\frac{b}{a}$ e l'equazione è determinata
- se a=0 e b=0 allora ci sono infinite soluzioni e l'equazione è indeterminata
- se a=0 e $b \neq 0$ allora non ci sono soluzioni e l'equazione è impossibile

Ricorda
Per le equazioni frazionarie occorre porre le condizioni di esistenza e verificare l'accettabilità delle soluzioni.
Per le equazioni letterali occorre fare la discussione.

Equazioni di secondo grado
La forma normale di un'equazione di secondo grado è $ax^2 + bx + c = 0$ con $a \neq 0$.
Il discriminante dell'equazione di secondo grado $ax^2 + bx + c = 0$ è $\Delta = b^2 - 4ac$.

segno del discriminante	soluzioni
$\Delta > 0$	$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ e $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ due soluzioni reali distinte
$\Delta = 0$	$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$ due soluzioni reali coincidenti
$\Delta < 0$	impossibile in R due soluzioni non reali (complesse coniugate)

Equazioni di grado superiore al secondo
Una delle conseguenze interessanti del *Teorema fondamentale dell'algebra* è che un'equazione di grado n a coefficienti reali ha al massimo n soluzioni reali.
Solo in casi particolari si riescono a trovare le radici di un polinomio di grado maggiore di 2. Se si riesce a scomporre P nel prodotto di due fattori A e B di grado minore, la ricerca delle radici è più facile. Ad esempio:

$$x^4 - 3x^3 - 4x^2 + 12x = x^4 - 4x^2 - 3x^3 + 12x = x(x^2 - 4)(x - 3),$$

ed ha dunque radici $2, -2, 0, 3$.

Equazioni irrazionali
Un'equazione è irrazionale se contiene almeno un radicale nel cui radicando compare l'incognita.
Data un'equazione $A(x) = B(x)$, consideriamo l'equazione $[A(x)]^n = [B(x)]^n$:

- se n è dispari, essa è equivalente a quella data
- se n è pari, essa ha come soluzioni, oltre a quelle di $A(x) = B(x)$, anche quelle di $A(x) = -B(x)$

Per risolvere un'equazione irrazionale $\sqrt[n]{A(x)} = B(x)$ si deve allora:

- elevare a n entrambi i membri dell'equazione
- controllare se n è pari o dispari:
  ✓se n è dispari, le soluzioni dell'equazione ottenuta sono le stesse dell'equazione irrazionale
  ✓se n è pari, dobbiamo eseguire il controllo delle soluzioni mediante verifica o mediante condizioni $\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) \geq 0 \end{cases}$ CONDIZIONI DI ACCETTABILITÀ

2 Sistemi

Definizione 2.1 Un sistema di equazioni è un insieme di due o più equazioni. La soluzione di un sistema è quella comune a tutte le equazioni che lo compongono.
Definizione 2.2 Il grado di un sistema è dato dal prodotto dei gradi delle sue equazioni.

Sistemi lineari
La forma normale di un sistema di primo grado di due equazioni in due incognite è $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$
Un sistema è determinato, impossibile o indeterminato se ha rispettivamente una, nessuna o infinite soluzioni.
Se si studia il problema in termini geometrici, le equazioni del sistema vengono rappresentate, nel piano cartesiano, da rette.
Se il sistema è

- determinato, le due rette si intersecano in un punto e quindi sono incidenti
- indeterminato, le due rette sono coincidenti
- impossibile, le due rette sono parallele

Un sistema può essere risolto con i metodi di sostituzione, confronto e riduzione.

Sistemi di grado superiore al primo
I sistemi di grado superiore al primo si possono risolvere con il metodo di sostituzione o con algoritmi particolari.

3 Disequazioni

Definizione 3.1 Una disuguaglianza dove compaiono espressioni letterali è una disequazione. Risolverla significa stabilire quali valori delle lettere rendono la disuguaglianza vera. Tali valori costituiscono l'insieme delle soluzioni.

Ricorda

Proprietà delle disuguaglianze, valide $\forall a, b \in R$:

- $a < b \mapsto a + k < b + k$ $(\forall k \in R)$
- $a < b \mapsto ak < bk$ $(\forall k \in R^+)$
- $a < b \mapsto ak > bk$ $(\forall k \in R^-)$
- $a < b \mapsto \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ ($\forall$ a,b concordi)

SI CAMBIA IL VERSO della disug se:
• si moltiplica o si divide per n° < 0
• si passa al reciproco

Disequazioni di primo grado

La forma normale di una disequazione di primo grado è $ax+b < 0$ o $ax+b > 0$ con $a \neq 0$.

Una disequazione di primo grado si risolve come le equazioni di primo, ricordando che se si moltiplica o divide per un numero negativo occorre cambiare anche il verso della disequazione.

Disequazioni di secondo grado

La forma normale di una disequazione di secondo grado è $ax^2 + bx + c < 0$ o $ax^2 + bx + c > 0$ con $a \neq 0$.

Per risolvere $ax^2 + bx + c > 0$:

- si determinano le (eventuali) soluzioni dell'equazione associata;
- se $a > 0$ si ricorda che la parabola ha la concavità verso l'alto, si prendono quindi i valori esterni alle radici (se non ci sono radici la disequazione è sempre verificata);
- se $a < 0$ si ricorda che la parabola ha concavità verso il basso, si prendono quindi i valori interni alle radici (se non ci sono radici la disequazione non è mai verificata).

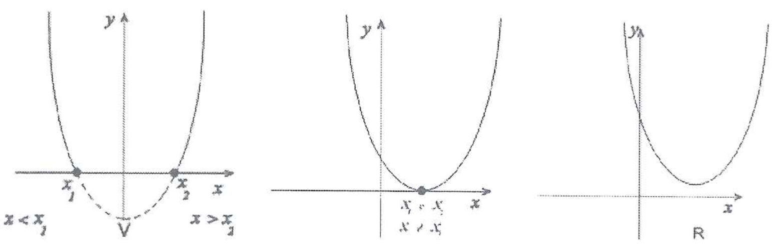

Figure 1: soluzione della disequazione $ax^2 + bx + c > 0$ nel caso $a > 0$

Infine, per risolvere $ax^2 + bx + c < 0$ basta cambiare tutti i segni e ricondursi al caso precedente.

Disequazioni di grado superiore al secondo
La risoluzione di disequazioni di grado superiore al secondo è possibile se si scompone in fattori il polinomio associato. In tal caso si studia il segno dei diversi fattori e si compila un quadro complessivo. Da questo quadro si determina il segno del polinomio iniziale mediante la regola dei segni della moltiplicazione.

Disequazioni frazionarie
Per risolvere una disequazione fratta $\frac{A(x)}{B(x)} > 0$ o $\frac{A(x)}{B(x)} < 0$ si studiano i segni del numeratore e del denominatore, poi si determina il segno della frazione mediante la regola dei segni della moltiplicazione.
Ricorda

- occorre porre le condizioni di esistenza per il denominatore, poiché la frazione non esiste se il denominatore è nullo
- non è possibile eliminare il denominatore!

Sistemi di disequazioni
Per risolvere un sistema di disequazioni si risolvono le singole disequazioni; poi si determina in quali intervalli sono verificate contemporaneamente tutte le disequazioni.

Disequazioni irrazionali
Una disequazione è irrazionale se contiene almeno un radicale nel cui radicando compare l'incognita.
Per risolvere una disequazione irrazionale con un radicale di indice n è necessario ricondurre il problema alla soluzione di una disequazione razionale, ovvero dopo aver isolato il radicale:

- se l'indice n della radice è dispari è possibile elevare a n entrambi i membri della disequazione
- se l'indice n della radice è pari occorre porre la condizione di esistenza del radicale e
  ✓se il segno del secondo membro è positivo è possibiole elevare a n entrambi i membri dell'equazione
  ✓se è negativo la disequazione verrà risolta confrontando i segni dei due termini (la radice di indice pari è sempre positiva)

Casi particolari

$$\sqrt{A(x)} < B(x) \Leftrightarrow \begin{cases} B(x) > 0 \\ A(x) \geq 0 \\ A(x) < [B(x)]^2 \end{cases}$$

$$\sqrt{A(x)} > B(x) \Leftrightarrow \begin{cases} B(x) < 0 \\ A(x) \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) > [B(x)]^2 \end{cases}$$